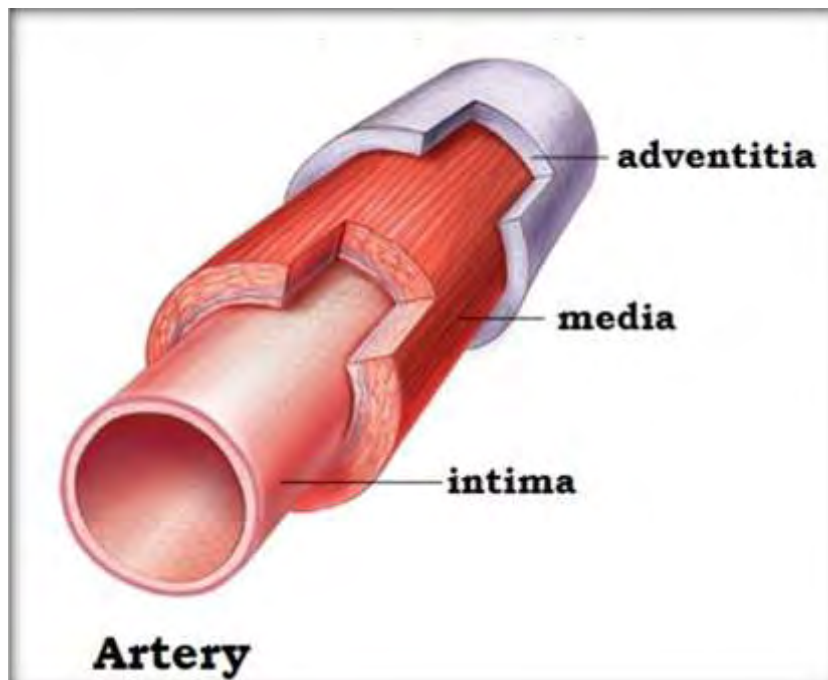
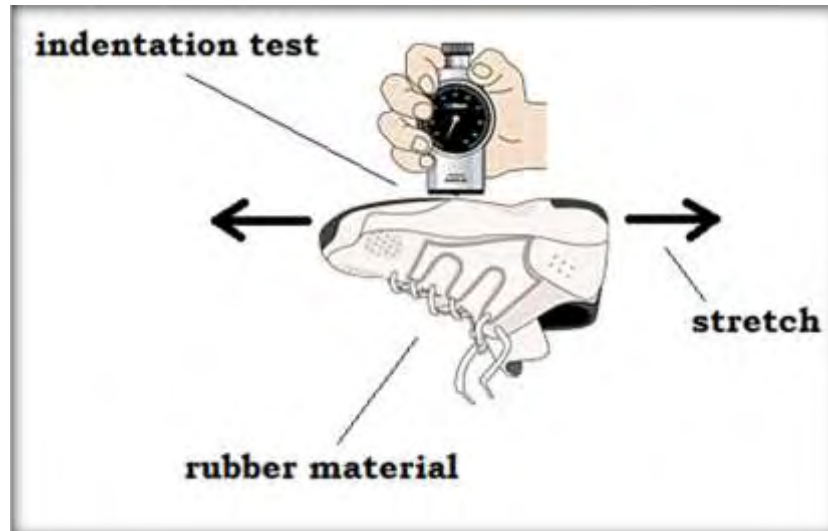




## Η μηχανική των επαφών στα ελαστομερή υλικά: Ανάλυση πειραμάτων διεύθυνσης και εφαρμογές στις ανθρώπινες αρτηρίες

Ζαφειροπούλου Βασιλική



Επιβλέπων Καθηγητής: Γιαννακόπουλος Αντώνιος

Βόλος, Μάιος 2013

## Ευχαριστίες

**Σ**ε αυτό το σημείο, οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τους ανθρώπους που συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση του διδακτορικού μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντώνιο Γιαννακόπουλο για την εμπιστοσύνη και το ενδιαφέρον που μου έδειξε τόσο κατά την ανάθεση της εργασίας όσο και κατά τη διάρκεια υλοποίησης της. Θα ήθελα ακόμη να τον ευχαριστήσω για την καθοδήγηση, τη συμπαράσταση και την υπομονή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Θανάση Ζήση για την επίλυση και την επαλήθευση των αναλυτικών αποτελεσμάτων της εργασίας μου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τον κ. Αθανάσιο Γιαννούκα για τις πολύτιμες συμβουλές του όσον αφορά τα ιατρικά ζητήματα που προέκυψαν κατά την υλοποίηση της εργασίας, τα μέλη που απαρτίζουν την επταμελή επιτροπή τους/ τις κυρίους/ κυρίες καθηγητές, Παναγιώτη Τσόπελα, Χρύσα Λαοπίδου, Γρηγόρη Χαϊδεμενόπουλο, Παναγιώτη Ρουσή, Αθανάσιο Γιαννούκα, Αντώνιο Γιαννακόπουλο και Αλέξη Κερμανίδη. Ολοκληρώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με στήριξε τόσο ηθικά όσο και οικονομικά σε όλη αυτή την προσπάθειά μου, αφού ουσιαστικά ήταν αναγκαίο να εργάζομαι παράλληλα με την εκπόνηση της εργασίας μου, εφόσον δεν προέκυψε κάποια οικονομική «βοήθεια» μέσω του Πανεπιστημίου.

**Ζαφειροπούλου Ι. Βασιλική**  
Αθήνα, 10 Μαΐου 2013

# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	1
Κεφάλαιο 1.....	3
1.1 Δοκιμή σκληρομέτρησης.....	3
1.2 Σκληρόμετρα Shore.....	10
1.3 Ελαστομερή υλικά.....	30
1.3.1 Δομή, σύσταση και μηχανικές ιδιότητες των ελαστομερών υλικών.....	36
1.3.2 Χρήσιμες εφαρμογές της ανάλυσης.....	41
1.4 Σκληρομέτρηση με συσκευή Shore κλίμακας O.....	44
1.5 Σκληρομέτρηση ελαστικού με κωδικό S/ N Blue XO με συσκευή Shore O εφαρμόζοντας στο δείγμα τη μέγιστη δύναμη του οργάνου και τη μεθοδολογία του Hertz.....	46
1.5.1 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού S/ N Blue XO.....	48
1.6 Σκληρομέτρηση ελαστικών δοκιμών με συσκευή Shore O εφαρμόζοντας στο δείγμα τη μέγιστη δύναμη του οργάνου και τη μεθοδολογία του Hertz.....	50
1.6.1 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστικών δοκιμών.....	53
1.7 Διόρθωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων εφαρμόζοντας τη σχέση της δύναμης P σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240 (Boyce et al.).....	56
1.8 Απόκλιση μεταξύ της εξίσωσης καμπύλης του Hertz και της εξίσωσης κύκλου.....	58
1.9 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστικών δειγμάτων εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting.....	59
1.10 Προσδιορισμός του μέτρου ελαστικότητας ελαστικού δείγματος ανεπαρκούς πάχους με τη χρήση πινάκων των Chen και Engel.....	67
1.11 Περιγραφή του «μοντέλου» των Stevanovic et al.....	76
1.11.1 Σύγκριση των πειραμάτων των Stevanovic et al. με το προτεινόμενο μοντέλο.....	79
1.11.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας υλικού που επικάθεται πάνω σε γνωστό υπόστρωμα.....	80
1.11.3 Σχεδιασμός της καμπύλης των Stevanovic et al. εφαρμόζοντας τη σχέση του Ting για τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής.....	80
1.12 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του «λεπτού» δοκιμίου G&T που επικάθεται σε πλήθος στρώσεων του ίδιου υλικού εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting.....	85
1.13 Σύγκριση των θεωριών Hertz, Ting, Lin et al. και FEA με τη μορφή διαγραμμάτων.....	93
Παράρτημα Α.....	101
1.14 Σκληρομέτρηση του υλικού με κωδικό S/ N Blue Xo 120974...101	
Παράρτημα Β.....	105
1.15 Σκληρομέτρηση σε ελαστικά δείγματα.....	105
Παράρτημα Γ.....	108

1.16 Σκληρομέτρηση σε ελαστικό δοκίμιο με κωδικό G&T.....	108
Παράρτημα Δ.....	112
Κεφάλαιο 2.....	114
2.1 Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M.....	114
2.2 Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M (Micro O – Ring Hardness Tester).....	116
2.3 Προετοιμασία της συσκευής Shore κλίμακας M για την υλοποίηση των σκληρομετρήσεων.....	122
2.4 Αντιμετώπιση του προβλήματος του κωνικού διεισδυτή ανάλογα με το ποσοστό εισχώρησής του στο δείγμα σύμφωνα με τις μεθοδολογίες Hertz και Ciavarella.....	124
2.5 Απόδειξη της γραμμικής σχέσης του ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M σύμφωνα με τις σχέσεις του Ciavarella.....	131
2.6 Σύγκριση των σχέσεων που προτείνουν οι Lin et al. και ο Ciavarella για σκληρομετρήσεις με κωνικούς διεισδυτές.....	136
2.7 Αντιμετώπιση του προβλήματος της συγκολλητικότητας μεταξύ δείγματος και διεισδυτή κατά τη σκληρομέτρηση.....	147
2.8 Η επίδραση της γεωμετρίας του διεισδυτή πάνω σε ελαστικό ημίχωρο σύμφωνα με τους Briscoe et al.....	149
2.8.1 Ελαστική επαφή: Αναλυτικές σχέσεις δύναμης – μετατόπισης...149	
2.9 Απόδειξη της γραμμικής σχέσης του ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M σύμφωνα με τις σχέσεις των Lin et al.....	151
2.10 Σκληρομέτρηση ελαστομερών δοκιμίων με συσκευή Shore κλίμακας M.....	154
2.10.1 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ενός ελαστομερούς δοκιμίου εφαρμόζοντας τη θεωρία του Ciavarella.....	157
2.11 Σκληρομέτρηση πολλών στρώσεων του υλικού G&T με συσκευή Shore κλίμακας M.....	159
2.12 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων ενός ελαστικού δείγματος σύμφωνα με τη θεωρία του Jaffar.....	161
Παράρτημα Ε.....	163
2.13 Σκληρομέτρηση σε ελαστομερή δοκίμια.....	163
Παράρτημα Ζ.....	180
2.14 Σκληρομέτρηση σε ελαστικό δείγμα με κωδικό G&T.....	180
Παράρτημα Η.....	182
2.15 Εξισώσεις που συνδέουν τη δύναμη, το βάθος διείσδυσης και την ακτίνα επαφής σε κωνικό διεισδυτή με σφαιρική αιχμή.....	182
Κεφάλαιο 3.....	185
3.1 Προέκταση του ελαστικού δείγματος G&T και υπολογισμός της δύναμης τριβής για αποφυγή της ολίσθησης.....	185
3.2 Σκληρομέτρηση προεντεταμένου ελαστικού με κωδικό G&T.....	188
3.3 Προτεινόμενες μεθοδολογίες υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T με συσκευή Shore κλίμακας O.....	189
3.3.1 Υπολογισμός του πάχους $t$ του ελαστικού δείγματος στην τρέχουσα κατάσταση.....	190
3.3.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία υπολογισμού των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα.....	192

3.3.3 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Hertz.....	193
3.3.4 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting.....	195
3.4 Στερεό Neo – Hookean.....	198
3.5 Στερεό Mooney – Rivlin.....	202
3.5.1 Μονοαξονικός ελκυσμός.....	202
3.5.2 Διαξονικός ελκυσμός.....	204
3.6 Επιφανειακή διείδυση σε ασυμπίεστο υλικό που έχει υποστεί αρχικά ίσο-διαξονικό ελκυσμό (Green, Rivlin, Shield).....	211
3.7 «Μοντέλο» Yeoh.....	214
3.7.1 Μονοαξονικός ελκυσμός.....	214
3.7.2 Διαξονικός ελκυσμός.....	214
3.8 Υπέρ-ελαστικό προσομοίωμα του Gent.....	222
3.8.1 Μονοαξονικός ελκυσμός.....	222
3.8.2 Διαξονικός ελκυσμός.....	223
3.9 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung.....	228
3.9.1 Μονοαξονικός ελκυσμός.....	228
3.9.2 Διαξονικός ελκυσμός.....	229
3.10 Σκληρομέτρηση προεντεταμένου ελαστικού G&T αποτελούμενο από δύο στρώματα του ίδιου υλικού με συσκευή Shore κλίμακας O.....	233
3.10.1 Προσδιορισμός του πάχους $t$ του προεντεταμένου δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση.....	234
3.10.2 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα G&T εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Ting.....	235
3.10.3 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα G&T εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Hertz.....	237
3.11 Συσχέτιση της εκκεντρότητας με την παραμόρφωση και το αποτύπωμα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Vlassak et al.....	240
3.12 Συσχέτιση του μέτρου ελαστικότητας με την εκκεντρότητα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Vlassak et al.....	246
3.13 Συσχέτιση του μέτρου ελαστικότητας με την εκκεντρότητα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Willis.....	250
3.14 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς που υποβάλλεται σε μονοαξονικό ελκυσμό.....	255
3.15 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς που υποβάλλεται σε ίσο-διαξονικό ελκυσμό.....	258
3.16 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε απαραμόρφωτο και παραμορφωμένο δείγμα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Waters και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα κατά Stevanovic et al. (συνδυασμός με θεωρία του Ting).....	260
3.16.1 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο δείγμα εφαρμόζοντας τις καμπύλες Vlassak et al. και Willis.....	265
3.17 Κάμψη ελαστικού δοκιμίου πάνω σε χαλύβδινο κύλινδρο.....	270
Παράρτημα Θ.....	275
3.18 Προένταση σε ελαστικό δοκίμιο με κωδικό G&T.....	275

Παράρτημα Ι.....	283
3.19 Προένταση σε ελαστικό δείγμα με κωδικό G&T (δύο στρώσεις υλικού).....	283
Παράρτημα Κ.....	289
3.20 Σχέσεις κατά Μ. Α. Biot (1965).....	289
Παράρτημα Λ.....	291
Παράρτημα Μ.....	296
3.21 Το «μοντέλο» της διείσδυσης ενός άκαμπτου σφαιρικού διεισδυτή σε έναν υπέρ-ελαστικό ημίχωρο σύμφωνα με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων.....	296
Κεφάλαιο 4.....	299
4.1 Πείραμα καμπτικής και εφελκυστικής διείσδυσης σε δοκίμιο τύπου Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης (Gel-like material).....	299
4.1.1 Χρήση των αναλυτικών σχέσεων για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας.....	308
4.2 Περίσφιξη δοκιμίου.....	314
Παράρτημα Ν.....	316
4.3 Καμπτική και εφελκυστική διείσδυση σε δοκίμιο τύπου Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης (Powder-talc).....	316
Παράρτημα Ξ.....	324
4.4 Περίσφιξη σε γιαούρτι αγελάδας βάρους 200 g.....	324
Κεφάλαιο 5.....	328
5.1 Αρτηρίες και φλέβες.....	328
5.1.1 Γήρανση των αρτηριών.....	335
5.1.2 Πότε αρχίζουν να γερνούν τα αγγεία.....	336
5.1.3 Παράγοντες γήρανσης των αγγείων.....	336
5.2 Γενικά για την αθηροσκλήρωση.....	337
5.2.1 Που οφείλεται η αρτηριοσκλήρωση.....	337
5.2.2 Πως αναπτύσσεται σταδιακά η αρτηριοσκλήρωση.....	339
5.2.3 Η ανατομία της καρδιάς και των στεφανιαίων αρτηριών.....	342
5.2.4 Θρόμβωση και αθηροσκλήρωση.....	343
5.2.5 Ανευρύσματα.....	346
5.2.6 Τα είδη της αρτηριοσκλήρωσης.....	347
5.3 Η έννοια της αγγειοπλαστικής.....	348
5.3.1 Σύντομη ιστορία του stent.....	349
5.3.2 Τι είναι και που τοποθετείτε το stent.....	350
5.4 Χαρακτηριστικά της ροής του αίματος.....	354
5.4.1 Φυσιολογική φλεβική ροή.....	354
5.4.2 Φυσιολογική αρτηριακή ροή.....	355
5.4.3 Ροή σε παθολογικές αρτηρίες.....	357
5.5 Έμβιο-μηχανική των μαλακών ιστών.....	359
5.5.1 Γενικά μηχανικά χαρακτηριστικά των μαλακών ιστών.....	360
5.6 Το «μοντέλο» της αρτηρίας.....	363
5.6.1 Συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα της αρτηρίας.....	365
5.6.2 Συνθήκες αξονοσυμμετρίας.....	367
5.6.3 Συνθήκες διεπιφάνειας.....	368
5.6.4 Συνέχεια του υλικού.....	369
5.7 Τάσεις και παραμορφώσεις σε κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα.....	370

5.8 Στρέψη κυλινδρικού σωλήνα με λεπτό τοίχωμα.....	375
5.9 Υπολογισμός των ορθών τάσεων σε κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα εφαρμόζοντας το «μοντέλο» των Mooney-Rivlin.....	377
5.10 Εξισώσεις κύριων τάσεων στην περίπτωση ισότροπου κυλινδρικού σωλήνα με λεπτό-τοιχη διατομή.....	382
5.11 Ακτινική παραμόρφωση κυλινδρικού ασυμπίεστου σωλήνα σύμφωνα με τον Chadwick (1972).....	384
5.12 Υπολογισμός ορθών τάσεων σε ανοιχτό κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα.....	385
5.13 Σύνδεση της μεταβολής του όγκου με την πίεση σε έναν κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα χρησιμοποιώντας το «μοντέλο» Mooney-Rivlin....	387
5.14 Σύνδεση της μεταβολής του εμβαδού της κάθετης διατομής με την πίεση σε έναν κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα χρησιμοποιώντας το «μοντέλο» Mooney-Rivlin.....	389
5.15 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής.....	390
5.16 «Μοντέλο» Yeoh με δύο σταθερές.....	391
5.17 Υπολογισμός των ορθών τάσεων σε ένα ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής εφαρμόζοντας το «μοντέλο» του Yeoh.....	392
5.18 Το ζήτημα της αντοχής σε ελαστομερές δείγμα.....	394
5.19 Αριθμητικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της ορθής τάσης σε ενός κυλινδρικού σωλήνα.....	401
5.20 Ισοδύναμη τάση Mises.....	403
5.21 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff σύμφωνα με την προσέγγιση του Pipkin.....	404
5.22 Μητρώο παραμόρφωσης Green.....	406
5.23 Ελαστικό υλικό του Fung.....	407
5.23.1 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff.....	407
5.23.2 Μητρώο τάσεων κατά Cauchy.....	407
5.24 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung για ανισότροπα υλικά – Αρτηρίες.....	409
5.25 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung για ανισότροπα υλικά – Ανάλυση μεμβρανών.....	410
5.25.1 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff.....	410
5.26 Το πρόβλημα της αναστροφής σε σωλήνα με λεπτό τοίχωμα.....	412
5.27 Απεικόνιση του στρώματος adventitia χωρίς αρχικές τάσεις (stress-free state) σύμφωνα με τη θεωρία του Takamizawa.....	413
5.28 Πίεση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας (media-intima και adventitia).....	415
5.29 Διαδικασία υπολογισμού της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία.....	417
5.29.1 Αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (load-free state).....	419
5.29.2 Αρτηρία υπό συνθήκες φόρτισης (loaded state).....	425
5.30 Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε μία θωρακική αρτηρία λαγού (Rachev).....	429
5.31 Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία γουρουνιού (Takamisawa).....	440
Παράρτημα Ο.....	455

5.32.1 Συνδυασμένη διόγκωση και ελκυσμός σε ένα κυκλικό σωλήνα.....	455
5.32.2 Πολικές Συντεταγμένες.....	457
Συμπεράσματα.....	459
Μελλοντική έρευνα.....	467
Βιβλιογραφία.....	470



## Abstract

This present project refers to the problem of contacts in elastomers and then became an effort to apply the theory to specific type of materials called bio-materials. Bio-materials such as human arteries belong in the subcategory of elastomers.

Elastomers belong in the general category of polymers with high levels of elasticity caused by their internal structure. To calculate their mechanical properties basic premise is to measure the hardness with an experimental procedure called hardness measurement. The measurement takes place on the outer surface of the sample. Sometimes a sharp object penetrates into the material and sometimes "pulls" the surface of the specimen outwards. Depending on the hardness that the sample has, the appropriate experimental procedure is being chosen. In the first and second chapter, we studied the problem of hardness measurement on surfaces of elastomers with spherical and conical penetrator, respectively. Having measured the hardness of the material through the experimental procedure, we proposed a methodology for calculating the modulus in the rubbery samples. The modulus of elasticity is unique for each material and because of this fact it is a highly important mechanical property. This is a property that describes the condition of the material and can give us important information about it. In particular, knowing the modulus of elasticity of a healthy material we can conclude if the main body is sick or not.

The third chapter describes the hardness measurement of a prestressed elastomeric sample. To describe a material we need a model characterized by a statute law. Each constitutive law consists of fixed parameters that vary depending on the material. Therefore it is necessary to calculate these constants to simulate the corresponding material. The hardness measurement though is not enough to make this happen, as by penetrating undeformed sample we can calculate only one constant of the material. So we deemed necessary to move the pretension of the main body in order to calculate the other constant parameters and eventually emerge the constitutive law describing the material. Since the pretension we imposed is a kind of draft, we decided to see what would happen if we confining the "body" as detailed in the fourth chapter. When drawstring an elastomeric material, the sample appears to be disrupted if a certain fragment is exceeded during the crushing. This is of particular interest for further future research.

Completing the project, in the fifth chapter, we applied the theory of elastomeric materials in a "body", such as human artery, which belongs to the category of bio-materials. In this case, we used constitutive laws describing anisotropic materials and proposed a methodology for calculating the residual stress in a human artery at load-free state and loaded state.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε αρχικά το πρόβλημα των επαφών σε ελαστομερή υλικά και στη συνέχεια έγινε μία προσπάθεια εφαρμογής της θεωρίας σε μία κατηγορία υλικών που αποκαλούνται εμβιουλικά. Τα εμβιουλικά, όπως είναι για παράδειγμα οι ανθρώπινες αρτηρίες, ανήκουν στην κατηγορία των ελαστομερών υλικών.

Τα ελαστομερή υλικά ανήκουν στην κατηγορία των πολυμερών παρουσιάζοντας υψηλή ελαστικότητα εξαιτίας της εσωτερικής τους δομής. Για να υπολογίσουμε τις μηχανικές τους ιδιότητες βασική προϋπόθεση είναι να μετρήσουμε τη σκληρότητα τους με μία πειραματική διαδικασία που ονομάζεται σκληρομέτρηση. Η σκληρομέτρηση πραγματοποιείται στην εξωτερική επιφάνεια του δείγματος. Άλλοτε το αιχμηρό αντικείμενο εισχωρεί μέσα στο υλικό και άλλοτε «τραβάει» την επιφάνεια του δοκιμίου προς τα έξω. Ανάλογα λοιπόν, με τη σκληρότητα που παρουσιάζει το δείγμα επιλέγεται και η κατάλληλη πειραματική διαδικασία. Στο πρώτο και στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετήθηκε το πρόβλημα της σκληρομέτρησης σε επιφάνειες ελαστομερών «σωμάτων» με σφαιρικό και κωνικό διεισδυτή, αντίστοιχα. Αφού μετρήθηκε η σκληρότητα του υλικού μέσω της πειραματικής διαδικασίας, προτείνουμε μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε ελαστομερή δείγματα. Το μέτρο ελαστικότητας είναι μοναδικό για κάθε υλικό και εξαιτίας αυτού αποτελεί σημαντική μηχανική ιδιότητα. Πρόκειται για μία ιδιότητα που περιγράφει την κατάσταση του υλικού και μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες γι αυτό. Ειδικότερα, γνωρίζοντας το μέτρο ελαστικότητας σε ένα υγιές υλικό μπορούμε να συμπεράνουμε εάν το «σώμα» νοσεί ή όχι.

Στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφεται η σκληρομέτρηση ενός προεντεταμένου ελαστομερούς δείγματος. Για να περιγράψουμε ένα υλικό χρειαζόμαστε ένα προσομοίωμα που χαρακτηρίζεται από έναν καταστατικό νόμο. Κάθε καταστατικός νόμος αποτελείται από σταθερές παραμέτρους που μεταβάλλονται ανάλογα με το υλικό. Είναι λοιπόν, απαραίτητο να υπολογίσουμε αυτές τις σταθερές, ώστε να προσομοιάσουμε το εν λόγω υλικό. Η σκληρομέτρηση όμως δεν επαρκεί για να συμβεί αυτό, αφού μέσω της διείσδυσης σε απαραμόρφωτο δείγμα μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο μία σταθερά του υλικού. Έτσι, κρίναμε απαραίτητο να προχωρήσουμε στην προένταση του «σώματος», ώστε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες σταθερές παραμέτρους και να προκύψει τελικά ο καταστατικός νόμος που περιγράφει το υλικό.

Εφόσον η προένταση που επιβάλλαμε είναι ένα είδος ελκυσμού, αποφασίσαμε να δούμε τι θα συμβεί σε περίπτωση που περισφίξουμε το «σώμα», όπως περιγράφεται αναλυτικά στο τέταρτο κεφάλαιο. Κατά την περισφίξη σε ένα ελαστομερές υλικό, το δείγμα δείχνει να αποδιοργανώνεται εάν υπερβούμε κάποιο όριο κατά τη σύνθλιψη. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για περαιτέρω μελλοντική έρευνα.

Ολοκληρώνοντας την εργασία, στο πέμπτο κεφάλαιο, εφαρμόσαμε τη θεωρία των ελαστομερών υλικών σε ένα «σώμα», όπως είναι η αρτηρία, που ανήκει στην κατηγορία των εμβιολικών. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιήσαμε καταστατικούς νόμους που περιγράφουν ανισότροπα υλικά και προτείναμε μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία σε συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (load-free state) και φόρτισης (loaded state).

Τα ελαστομερή υλικά αποτελούν μία κατηγορία υλικών που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον συγκριτικά με άλλα. Αυτό συμβαίνει γιατί σε αυτή την κατηγορία των υλικών ανήκει ποικιλία τροφίμων όπως είναι για παράδειγμα το τυρί ή το γιαούρτι καθώς επίσης και πλήθος μαλακών ιστών όπως είναι ο εγκέφαλος, το συκώτι, τα νεφρά, οι σύνδεσμοι, οι χόνδροι, οι αρτηρίες κ.α. Τα «υλικά» που μόλις αναφέραμε σχετίζονται με τον άνθρωπο και εξαιτίας αυτού έχουν μεγάλη σπουδαιότητα. Τα «σώματα» αυτά λοιπόν, παρουσιάζουν μεγάλη ευαισθησία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι δύσκολο να τα αγγίξουμε γιατί μπορεί να τα «τραυματίσουμε». Για το λόγο αυτό επιλέξαμε να τα μελετήσουμε και προτείνουμε τη διείδυση, πιθανόν ως τη μοναδική πειραματική μεθοδολογία, για τη μέτρηση των μηχανικών τους ιδιοτήτων.

# Κεφάλαιο 1

## 1.1 Δοκιμή σκληρομέτρησης

**Α**πό τις αρχές του προηγούμενου αιώνα είναι αποδεδειγμένη η τεράστια σπουδαιότητα, για τη βιομηχανία μετάλλου και πλαστικού, της μέτρησης της σκληρότητας ενός μεταλλικού ή πλαστικού δοκιμίου. Η σκληρομέτρηση δίνει αξιόπιστα συμπεράσματα σχετικά με τον έλεγχο των εισερχομένων, των πρώτων υλών, των ενδιάμεσων όπως και των τελικών προϊόντων και έτσι συμβάλει ουσιαστικά στον ολοκληρωμένο ποιοτικό έλεγχο και τη διασφάλιση ποιότητας μιας επιχείρησης. **Εάν και δεν υπάρχει κάποιος ορισμός για τη σκληρότητα, θα μπορούσε να διατυπωθεί ότι με τον όρο σκληρότητα ορίζεται ο βαθμός αντίστασης ενός υλικού στην πλαστική παραμόρφωση που προκαλείται από τη διεισδυση άλλων σωμάτων σε αυτό.** Τα αποτελέσματα της σκληρομέτρησης παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το υλικό, ορισμένες από τις οποίες αναφέρονται παρακάτω:

- ✓ Προσδιορισμός του υλικού
- ✓ Έλεγχος ορθής διαδικασίας θερμικής κατεργασίας
- ✓ Έλεγχος της ποιότητας των επιφανειακών κατεργασιών
- ✓ Συμπεριφορά και αντοχή του υλικού κατά τη διάρκεια του χρόνου
- ✓ Συμπεριφορά του υλικού σε συνθήκες φθοράς και καταπόνησης
- ✓ Έλεγχος μείωσης της αντοχής μετά από θερμική κατεργασία
- ✓ Πληροφορίες σχετικά με την αντοχή σε εφελκυσμό.

Γενικότερα, η σκληρομέτρηση είναι μία πειραματική μέθοδος που εμφανίζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- ✓ Είναι μία γρήγορη, αξιόπιστη και εύκολη ως προς τη χρήση της μέθοδος
- ✓ Οικονομική σχετικά μέθοδος
- ✓ Μπορεί να ελέγξει τη σκληρότητα σε μεγάλο φάσμα υλικών
- ✓ Δίνει στοιχεία σχετικά με τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού
- ✓ Πρόκειται για έναν μη καταστρεπτικό έλεγχο, δηλαδή το υλικό δοκίμιο μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί μετά τον έλεγχο.

Ωστόσο, η δοκιμή σκληρομέτρησης εμφανίζει ορισμένες αδυναμίες. Ορισμένες από αυτές είναι οι ακόλουθες:

- ✓ Αν η δοκιμή πραγματοποιηθεί για μη ελεγχόμενο χρονικό διάστημα μπορεί να προκαλέσει λανθασμένες αναγνώσεις
- ✓ Ασυνεπής δύναμη επιβολής του βαθμονομημένου ελατηρίου προς τον διεισδυτή μπορεί να προκαλέσει λάθη
- ✓ Παρατηρούνται δυσκολίες στην προσπάθεια διατήρησης του διεισδυτή κάθετο στην επιφάνεια δοκιμής
- ✓ Η επιφάνεια δοκιμής πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη, για να υποστηρίξει την εισχώρηση του διεισδυτή.

Επιπροσθέτως, η δοκιμή σκληρομέτρησης χρησιμοποιείται πολύ συχνά με στόχο την εξακρίβωση καθώς και τη σύγκριση της μηχανικής συμπεριφοράς των ελαστομερών υλικών. Οι μετρήσεις, που προκύπτουν μετά την ολοκλήρωση της σκληρομέτρησης, οι οποίες εκφράζουν την αντίσταση του υλικού στη διείσδυση, βρίσκουν ευρέως εφαρμογή στη βιομηχανία των ελαστομερών σε περιπτώσεις που είναι επιθυμητό ή αναγκαίο να ελεγχθεί η ποιότητα του υλικού καθώς και για την εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού. Η τιμή της σκληρότητας σχετίζεται με την ελαστική συμπεριφορά του υλικού. Η μη καταστρεπτική και η «εν κινήσει» φύση της δοκιμής δίνει τη δυνατότητα στην απευθείας εκτίμηση των ιδιοτήτων των ελαστομερών υλικών. Αυτό είναι το κυριότερο χαρακτηριστικό της σκληρομέτρησης που οδηγεί στη εφαρμογή της δοκιμής για την εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων σε περιπτώσεις μαλακών ιστών όπως είναι το δέρμα αλλά και οι όγκοι, που περιβάλλονται από μαλακούς ιστούς. Στην προκειμένη περίπτωση, για όλους τους λόγους που προαναφέρθηκαν, για την υλοποίηση των πειραμάτων επιλέχθηκε η συσκευή Shore. Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες εικόνες, με απώτερο στόχο την κατανόηση της διαδικασίας σκληρομέτρησης πάνω σε μαλακά υλικά όπως είναι για παράδειγμα τα ελαστικά των αυτοκινήτων. Οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των πειραμάτων, σε τέτοιου είδους υλικά, ονομάζονται Shore σκληρόμετρα και εφαρμόζονται σε διάφορες κλίμακες ανάλογα με το είδος του δείγματος.



**Εικόνα 1.1.1** Διαδικασία σκληρομέτρησης χρησιμοποιώντας σταθερό, αναλογικό σκληρόμετρο Shore. Η συσκευή Shore χρησιμοποιείται με σκοπό να προσδιορίσει την σχετική σκληρότητα σε μαλακά υλικά, τα οποία είναι συνήθως πλαστικά ή καουτσούκ. Κατά τη διάρκεια του πειράματος μετριέται το βάθος διείσδυσης του συγκεκριμένου διεισδυτή στο υλικό, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, της δύναμης και του χρόνου. Η τιμή της σκληρότητας που προκύπτει χρησιμοποιείται συχνά για να εντοπίσει ή να καθορίσει μια

συγκεκριμένη σκληρότητα σε ελαστομερή υλικά ή ως μέτρο ελέγχου της ποιότητας του υλικού. Σύμφωνα με τη διαδικασία της δοκιμής, το δείγμα τοποθετείται, για πρώτη φορά, σε μία σκληρή επίπεδη επιφάνεια. Στη συνέχεια, ο διεισδυτής ωθείται στο δείγμα προσέχοντας ώστε η αιχμή του να είναι παράλληλη προς την επιφάνεια του δοκιμίου. Η σκληρότητα λόγω της σταθερής επαφής με το δείγμα διαβάζεται μέσα σε ένα δευτερόλεπτο, έτσι ώστε να μην υπάρχουν φαινόμενα ερπυσμού ή χαλάρωσης. Χαρακτηριστικό είναι το μέγεθος του μετρούμενου δείγματος. Τα δοκίμια πρέπει να έχουν πάχος συνήθως ίσο με 6.4 χιλιοστά. Ακόμη, υπάρχει η δυνατότητα να συσσωρεύονται πολλά δοκίμια για την επίτευξη του απαιτούμενου πάχους, δηλαδή 6.4 χιλιοστά, αλλά είναι γενικά προτιμότερο να χρησιμοποιείται ένα υλικό. Η εικόνα προήλθε από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.ptli.com/testlopedia/tests/DurometerShore-d2240.asp>.



**Εικόνα 1.1.2** Ψηφιακό, φορητό σκληρόμετρο κλίμακας Shore A, που βρίσκει εφαρμογή κυρίως σε μαλακά υλικά, τα οποία συνήθως χαρακτηρίζονται ως πλαστικά καθώς και σε ελαστομερή υλικά. Στην περίπτωση που είναι επιθυμητή η μέτρηση μαλακών πλαστικών, λαστιχένιων δοκιμίων αλλά και υφασμάτων, όπως είναι για παράδειγμα το δέρμα, τότε το πλέον κατάλληλο όργανο για τη μέτρηση είναι ένα σκληρόμετρο πλαστικού τύπου Shore κλίμακας Shore A. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική σελίδα <http://www.vrecosis.gr/product.asp?catid=285>.



**Εικόνα 1.1.3** Ψηφιακό, φορητό σκληρόμετρο κλίμακας Shore D, που χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση της σκληρότητας σε σκληρά πλαστικά, λάστιχα και γενικότερα υλικά που δεν είναι ιδιαίτερα ευπαθή εάν πάνω τους ασκηθεί δύναμη ίση με αυτή που μπορεί να επιβάλλει το ανθρώπινο νύχι. Τα σκληρόμετρα πλαστικών αποτελούνται από μία χαλύβδινη ακίδα στην πλαστική επιφάνεια, όπως φαίνεται στην εικόνα. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική σελίδα <http://www.vrecossis.gr/product.asp?catid=285>.



**Εικόνα 1.1.4** Σκληρομέτρηση σε ελαστικό δοκίμιο το οποίο ενσωματώνεται πάνω σε άλλα δοκίμια παρόμοιου τύπου λόγω ανεπαρκούς πάχους του υπό δοκιμή υλικού. Για την πραγματοποίηση της σκληρομέτρησης με συσκευές Shore, το δείγμα πρέπει να διαθέτει πάχος τουλάχιστον 6.4 χιλιοστά. Σύμφωνα με την εικόνα το δείγμα παρουσιάζει τιμή σκληρότητας ίση με  $S=40$ , όπως φαίνεται στην αναλογική οθόνη του οργάνου. Γενικά, τα σκληρόμετρα στο σύνολό τους διαθέτουν κορυφαία σχεδιασκή και κατασκευαστική ακρίβεια, έτσι ώστε να προκύψει αξιόπιστη και υψηλής ακρίβειας μέτρηση. Τα φορητά



σκληρόμετρα, όπως της εικόνας, διαθέτουν ευκολία ως προς τη χρήση και προσφέρουν μη καταστρεπτική μέτρηση. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα <http://www.buydurometers.com/>.

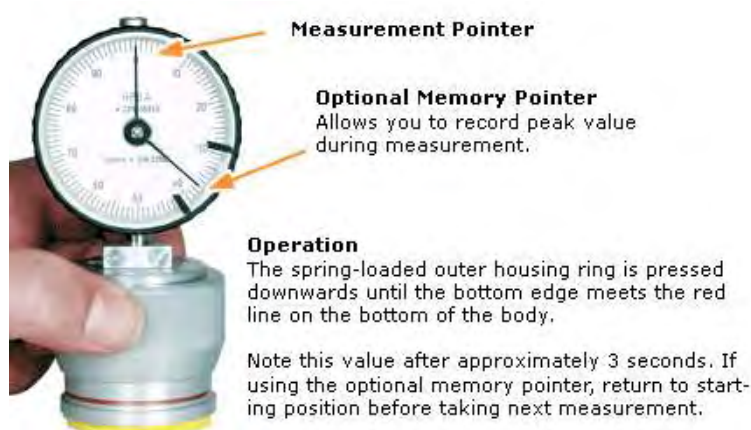


**Εικόνα 1.1.5** Απεικόνιση διαδοχικών σκληρομετρήσεων χρησιμοποιώντας φορητές, αναλογικές συσκευές Shore, που εφαρμόζονται συνήθως πάνω σε ελαστικά, πλαστικά και ελαστομερή δοκίμια. Σε κάθε περίπτωση, διακρίνεται η αιχμή του διεισδυτή ανάλογα με το είδος του υλικού καθώς και η καθετότητα τοποθέτησης του οργάνου ως προς την επιφάνεια του δείγματος. Στις παραπάνω εικόνες, τα υπό δοκιμή υλικά είναι τμήματα ελαστικών, όπως είναι για παράδειγμα το αθλητικό παπούτσι με την ελαστική σόλα και το ελαστικό του αυτοκινήτου. Οι εικόνες που παρατίθενται παραπάνω μπορούν να βρεθούν στις ηλεκτρονικές σελίδες <http://www.hoto-instruments.com/durometer/durometer-x.htm> και <http://www.buydurometers.com/>.

Σε όλες τις περιπτώσεις των δοκιμών σκληρομέτρησης των ελαστομερών και των πλαστικών υλικών τα σκληρόμετρα Shore είναι ιδανικά. Τα σκληρόμετρα Shore διαθέτουν όλους τους κανονισμούς ASTM και είναι εύκολα όσον αφορά τη χρήση τους. Η μέθοδος ASTM D 2240 χρησιμοποιείται γενικά στη Βόρειο Αμερική. Κάθε τύπος σκληρόμετρου είναι κατασκευασμένος από ειδική κλίμακα (A, B, C, D), ενώ οι τιμές του S στην οθόνη του οργάνου μέτρησης κυμαίνονται μεταξύ των τιμών μηδέν (0) και εκατό (100). Για δοκιμές της κλίμακας M, η εταιρία Shore διαθέτει μικροσυστήματα, τα οποία είναι σχεδιασμένα να προσδιορίζουν την σκληρότητα σε μαλακά ελαστομερή, τα οποία χαρακτηρίζονται από πολύ μικρό πάχος ενώ ταυτόχρονα έχουν «ανώμαλο» σχήμα. Κάθε συσκευή Shore αποτελείται από έναν άκαμπτο διεισδυτή, ένα εσωτερικό βαθμονομημένο ελατήριο μέσα από το οποίο μεταφέρεται η δύναμη, ένα όργανο ένδειξης των μετρήσεων και ένα επίπεδο «πόδι». Ουσιαστικά με την χρήση του όρου «πόδι» εννοείται μία μικρή, επίπεδη επιφάνεια που ευθυγραμμίζει την καθετότητα του διεισδυτή, όπως θα περιγραφεί παρακάτω. Στο μέσο του επιπέδου «ποδιού» είναι τοποθετημένος ο διεισδυτής, που εκτείνεται 2.5 χιλιοστά από την επιφάνεια του «ποδιού». Έτσι, στην περίπτωση που ο διεισδυτής

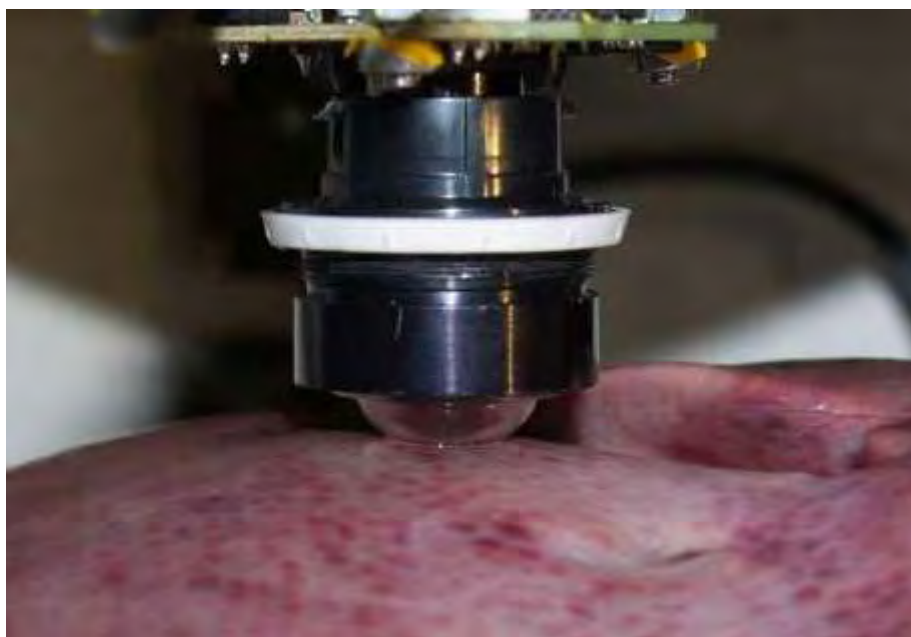


δεν έχει εισχωρήσει καθόλου μέσα στο δείγμα, η ένδειξη είναι μηδενική. Αντίθετα, όταν ο διεισδυτής έχει ανυψωθεί και βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το «πόδι» τότε η ένδειξη είναι η μέγιστη δυνατή και ίση με εκατό. Κατά την εκτέλεση της σκληρομέτρησης, λοιπόν, όσο βαθύτερη είναι η διείσδυση, τόσο «μαλακότερο» είναι το υλικό, με αποτέλεσμα να λαμβάνεται η χαμηλότερη ένδειξη στην οθόνη του οργάνου. Στη φωτογραφία που ακολουθεί απεικονίζεται η συσκευή σκληρομέτρησης Shore, που βρίσκει εφαρμογή, όπως προαναφέρθηκε, σε πλαστικά και λαστιχένια υλικά, στα οποία θα γίνει εκτενέστερη αναφορά σε επόμενα κεφάλαια.



**Εικόνα 1.1.6** Πρόκειται για σκληρόμετρο Shore, που εφαρμόζεται στις κλίμακες A, B, C, D, DO και O. Τα check-LINE HP durometers Series είναι σχεδιασμένα να μετρούν την σκληρότητα ή τη σταθερότητα σε μια μεγάλη ποικιλία εξαρτημάτων και δειγμάτων. Αυτή η μονάδα είναι σχεδιασμένη σύμφωνα με τα πρότυπα ASTM και DIN. Επιπλέον, το σκληρόμετρο παρέχει ένα αναλογικό δείκτη που βαθμονομείται για μια κλίμακα 0 έως 100 μονάδων. Η ελάχιστη τιμή είναι το 0, ενώ η μέγιστη το 100. Το σκληρόμετρο της εικόνας χαρακτηρίζεται ως φορητό και αναλογικό, ενώ ο τρόπος λειτουργίας του, όσον αφορά τη μέτρηση της σκληρότητας ενός υλικού, απεικονίζεται σε προηγούμενη εικόνα. Για την εύρεση της εικόνας αρκεί η είσοδος στη σελίδα <http://www.buydurometers.com/>.

Η σκληρομέτρηση αποτελεί μία πειραματική μεθοδολογία που προτείνεται για τον υπολογισμό μηχανικών ιδιοτήτων ελαστομερών υλικών. Σε αυτή την κατηγορία των υλικών «σωμάτων» ανήκουν για παράδειγμα τα ελαστικά των αυτοκινήτων. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας και να υπολογίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες σε μία άλλη κατηγορία δοκιμίων που είναι τα έμβιο-υλικά. Στην εικόνα που ακολουθεί, ένα δείγμα αποτελούμενο από ένα ωμό χοιρινό σκυώτι υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση.



**Εικόνα 1.1.7** Σκληρομέτρηση δοκιμίου με σκοπό τη διάγνωση των μηχανικών ιδιοτήτων σε μαλακούς βιολογικούς ιστούς. Ο ανιχνευτής σκληρομέτρησης είναι κατασκευασμένος ώστε να βοηθάει στη διάγνωση πιθανής παθολογίας των μαλακών ιστών σε χειρουργικές επεμβάσεις. Ο ανιχνευτής αποτελείται από μία video camera, ένα φακό που έχει τη δυνατότητα να εστιάζει, μία φωτεινή πηγή και ένα διεισδυτή με μορφή ημισφαιρίου κατασκευασμένο από διάφανη σιλικόνη. Η ενσωματωμένη camera επιτρέπει τον καθορισμό του εμβαδού της περιοχής επαφής ( $A=\pi a^2$ ) μεταξύ της κεφαλής του ανιχνευτή και του μαλακού βιολογικού ιστού. Για την υλοποίηση των πειραμάτων επιλέχθηκε σαν ένα παράδειγμα μαλακού βιολογικού ιστού ένα χοιρινό συκώτι, όπως μπορούμε να δούμε στην εικόνα. Για τις σκληρομετρήσεις επιλέχθηκαν πολλά διαφορετικά είδη διεισδυτών, τα οποία μπορούμε να διαχωρίσουμε σε δύο κατηγορίες: (α) το τμήμα της στερεής σφαίρας και (β) το ημισφαιρικό κέλυφος. Τα αποτελέσματα των σκληρομετρήσεων χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε μαλακούς ιστούς θεωρώντας ότι το δείγμα είναι ασυμπίεστο. Η ανεπτυγμένη αυτή μεθοδολογία χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό του μέτρου ελαστικότητας σε ένα ωμό και σε ένα βρασμένο χοιρινό συκώτι. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δείχνουν ότι ο ανιχνευτής διαθέτει μεγάλη ευαισθησία ώστε να μπορεί να διαχωρίζει ένα υγιή από έναν ιστό που νοσεί. Η εικόνα προέρχεται από το abstract των Goryacheva et al. “Determination of the Soft Tissue Mechanical Properties Based on the Indentation Test”, 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.

Η σκληρομέτρηση λοιπόν, αποτελεί μία πειραματική μέθοδο που εμφανίζει σημαντικά πλεονεκτήματα. Σε ορισμένες περιπτώσεις αποτελεί τον μοναδικό τρόπο για να μετρηθούν υλικά, όπως είναι για παράδειγμα τα ζελατινοειδή (υλικά τύπου Gel), ιδιαίτερα σε μικρές κλίμακες. Τέτοιου τύπου υλικά είναι και τα ανευρύσματα των αρτηριών.

## 1.2 Σκληρόμετρα Shore

Σκληρόμετρο είναι ένα μέτρο, το οποίο προσδιορίζει την σκληρότητα ενός υλικού. Σκληρότητα, όπως προαναφέρθηκε, μπορεί να οριστεί ως η αντίσταση ενός υλικού σε μόνιμη οδόντωση. Η κλίμακα σκληρόμετρο ορίστηκε από τον Albert F. Shore, ο οποίος ανέπτυξε μια συσκευή μέτρησης που ονομάζεται σκληρόμετρο τη δεκαετία του 1920. Ο όρος σκληρόμετρο χρησιμοποιείται συχνά για να παραπέμπει στη μέτρηση καθώς και στο ίδιο το όργανο. Το σκληρόμετρο χρησιμοποιείται συνήθως ως μέτρο της σκληρότητας σε υλικά όπως είναι τα πολυμερή, τα ελαστομερή και το καουτσούκ. Σκληρότητα Shore, χρησιμοποιώντας είτε τη μέθοδο Shore A είτε τη Shore D κλίμακα, είναι η προτιμώμενη μέθοδος για λάστιχα, ελαστομερή και χρησιμοποιείται επίσης ευρέως για «μαλακότερα» πλαστικά όπως είναι τα φυσικά νιτρίλια, τα φθοριούχα πολυμερή και τα βινύλια.

Ειδικότερα, η δοκιμή A έχει χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της σκληρότητας μιας μεγάλης ποικιλία υλικών από καουτσούκ και μαλακά πλαστικά. Αρχικά, υπήρχαν μόνο 4 διαφορετικές κλίμακες Shore για την πραγματοποίηση της δοκιμής σε λάστιχα. Ωστόσο, σήμερα υπάρχουν 12 πίνακες που επιτρέπουν τον έλεγχο ενός ακόμη μεγαλύτερου φάσματος υλικών. Οι συσκευές Shore αναφέρονται συνήθως ως Durometers. Με την εξαίρεση των συσκευών κλίμακας M, όλα τα σκληρόμετρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως μια φορητή μονάδα ή ως σταθερές συσκευές λειτουργίας. Στις εικόνες που ακολουθούν, παριστάνονται ορισμένες συσκευές σκληρομέτρησης τύπου Shore. Τα σκληρόμετρα Shore μπορεί να είναι είτε αναλογικά ή ψηφιακά, είτε φορητά ή σταθερές συσκευές που χαρακτηρίζονται ως «περίπτερα».



**Εικόνα 1.2.1** Στην παραπάνω φωτογραφία διακρίνονται τρία φορητά, αναλογικά, σκληρόμετρα Shore κλίμακας A, διαφορετικού σχήματος. Το σκληρόμετρο στο αριστερό τμήμα της εικόνας ονομάζεται Shore™ Pencil, είναι μικρό σε μέγεθος και για το λόγο αυτό η μετακίνησή του σε οποιοδήποτε περιβάλλον για να πραγματοποιηθεί κάποια μέτρηση θεωρείται ιδιαίτερα εύκολη. Η μεσαία συσκευή χαρακτηρίζεται ως Shore™ Round, εξαιτίας της κυκλικής οθόνης του οργάνου, ενώ το σκληρόμετρο στα δεξιά της εικόνας ονομάζεται Kori™ Quadrant. Οι παραπάνω συσκευές χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της σκληρότητας υλικών που ανήκουν στον τύπο Shore A. Πρόκειται, δηλαδή, για μαλακά ελαστικά ή ελαστομερή καθώς και άλλα παρόμοια υλικά όπως είναι το δέρμα. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα <http://www.ussupplyinc.com/products/rbmaint.asp>.



**Εικόνα 1.2.2** Όργανο ένδειξης των μετρήσεων σε κάθε δοκιμή σκληρομέτρησης. Τα σκληρόμετρα Shore έχουν σχεδιαστεί ειδικά για ελαστικά και ελαστομερή υλικά. Η τιμή της σκληρότητας προκύπτει με τον προσδιορισμό του βάθους εισχώρησης του διεισδυτή μέσα στο υπό δοκιμή υλικό. Το σκληρόμετρο Shore είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μέσο σε όλο τον κόσμο, για την αξιολόγηση της σκληρότητας των κυτταρικών, μαλακών και σκληρών καουτσούκ αλλά και των πλαστικών υλικών. Οι συσκευές Shore είναι αρκετά μικρές ώστε να μεταφέρονται στην τσέπη και είναι αρκετά ανθεκτικές ώστε να μπορούν να δώσουν αποτελέσματα της δοκιμής και σε εχθρικό περιβάλλον. Το σκληρόμετρο έχει σχεδιαστεί για να ικανοποιεί τις ανάγκες των βιομηχανιών και ακολουθεί το πρότυπο ASTM D 2240. Το αναλογικό σκληρόμετρο μπορεί να είναι φορητό, για να μπορεί να εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε τσέπη ή για την καλύτερη επαναληψιμότητα και ακρίβεια των μετρήσεων μπορεί να είναι τοποθετημένο σε ένα «περίπτερο» λειτουργίας. Σχεδιασμένο για να ικανοποιήσει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών,

το σκληρόμετρο Shore είναι διαθέσιμο σε 12 κλίμακες. Όσον αφορά τη συσκευή που απεικονίζεται στη φωτογραφία χαρακτηρίζεται ως αναλογική, οι τιμές στην οθόνη του οργάνου κυμαίνονται από 0 έως 100 και αντιστοιχεί σε μετρήσεις υλικών της κλίμακας M. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.instron.co.th/wa/acc>.



**Εικόνα 1.2.3** Οθόνη σκληρόμετρου Shore, που αντιστοιχεί στην κλίμακα C. Υλικά μετρούμενα με συσκευή τύπου C είναι συνήθως ελαστομερή και πλαστικά υλικά που διαθέτουν μέτρια σκληρότητα. Οι τιμές στην οθόνη του οργάνου κυμαίνονται μεταξύ 0 και 100. Η ένδειξη S=0 εκφράζει μηδενική σκληρότητα του υλικού, ενώ για την τιμή S=100 παρατηρείται μέγιστη σκληρότητα του μετρούμενου υλικού. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική σελίδα <http://www.smart-e.com.cn/viewproduct.asp?id=102>.





**Εικόνα 1.2.4** Ψηφιακό, φορητό σκληρόμετρο Shore, που χρησιμοποιείται για μετρήσεις υλικών της κλίμακας A. Τέτοιου είδους υλικά είναι λάστιχα μαλακά βουλκανισμένα ή φυσικά νιτρίλια, ελαστομερή υλικά καθώς και υλικά, τα οποία παρουσιάζουν ελαστικότητα υπό την επίδραση πίεσης με το νύχι του χεριού. Η ηλεκτρονική διεύθυνση της εικόνας είναι <http://starmeter.en.made-in-china.com/product>.

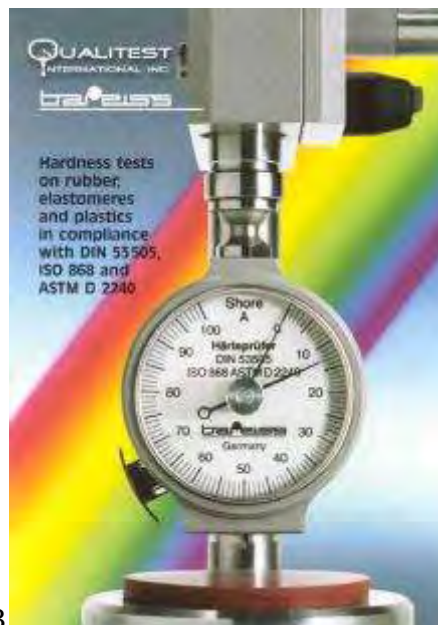


**Εικόνα 1.2.5** Συμπαγές, ψηφιακό, φορητό σκληρόμετρο Shore, με κωδικό HD Digital, το οποίο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση σκληρότητας των υλικών στις κλίμακες Shore A, C και D. Με την κλίμακα Shore A γίνεται μέτρηση υλικών από καουτσούκ, ελαστομερών, νεοπρένιο, σιλικόνη, βινύλιο, μαλακά πλαστικά, τσόχα, δέρμα και άλλα παρόμοια υλικά. Η κλίμακα Shore C χρησιμοποιείται για τη μέτρηση υλικών που είναι συνήθως αφρώδη όπως είναι για παράδειγμα το σφουγγάρι. Η κλίμακα Shore D εφαρμόζεται σε πλαστικά υλικά, plexiglas, formica και σε άλλα τέτοιου είδους υλικά. Στο σκληρόμετρο χειρός, που απεικονίζεται, παρατηρείται η ψηφιακή οθόνη που δείχνει την εκάστοτε τιμή

σκληρότητας του δείγματος. Επιπλέον, για την εύκολη και ασφαλή μεταφορά του, διαθέτει μία σκληρή θήκη. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.keron-sohn.com/en/shop/subcategory-78.html>.



A



B

**Εικόνα 1.2.6** Σκληρόμετρο Shore, σε πλάγια όψη (εικόνα A) και σε κατατομή (εικόνα B), που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της σκληρότητας πλαστικών και ελαστομερών υλικών, σύμφωνα με τις κλίμακες A, B, C, D, DO, O και OO. Χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό σκληρότητας σε όλα τα φυσικά και συνθετικά προϊόντα από καουτσούκ, ακρυλικό γυαλί, οξικών, ρετσίνι, πολυεστέρα, thermoplastics, PVC, Plexiglas, neoprene και κ.λπ. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.calce.umd.edu/general/Facilities/Hardness\\_ad\\_.htm](http://www.calce.umd.edu/general/Facilities/Hardness_ad_.htm).



**Εικόνα 1.2.7** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore A, που διαθέτει μοχλό δοκιμής για τον έλεγχο της σκληρότητας, ενώ η πλάκα βάσης της συσκευής είναι κατασκευασμένη από γυαλί, όπως φαίνεται στην εικόνα. Η συσκευή χρησιμοποιείται για τη μέτρηση πλαστικών, ελαστομερών και άλλων υλικών, που ανήκουν στην κλίμακα Shore A. Όπως και το σκληρόμετρο της εικόνας που ακολουθεί, έτσι κι αυτό είναι ευέλικτο όσον αφορά τη ρύθμιση του ύψους, δίνοντας τη δυνατότητα να τοποθετηθεί δοκίμιο μέγιστου ύψους 63 mm. Επιπλέον, διαθέτει μήκος διαδρομής 15 mm και ρυθμιζόμενη πλάκα βάσης για τη διόρθωση των ανομοιογενών αντικειμένων της δοκιμής. Επιπλέον, η γυάλινη πλάκα που διαθέτει παρέχει καλύτερη ακρίβεια ως προς τα αποτελέσματα της δοκιμής. Η εικόνα μπορεί να εντοπιστεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.kern-sohn.com/en/shop/subcategory-78.html>.

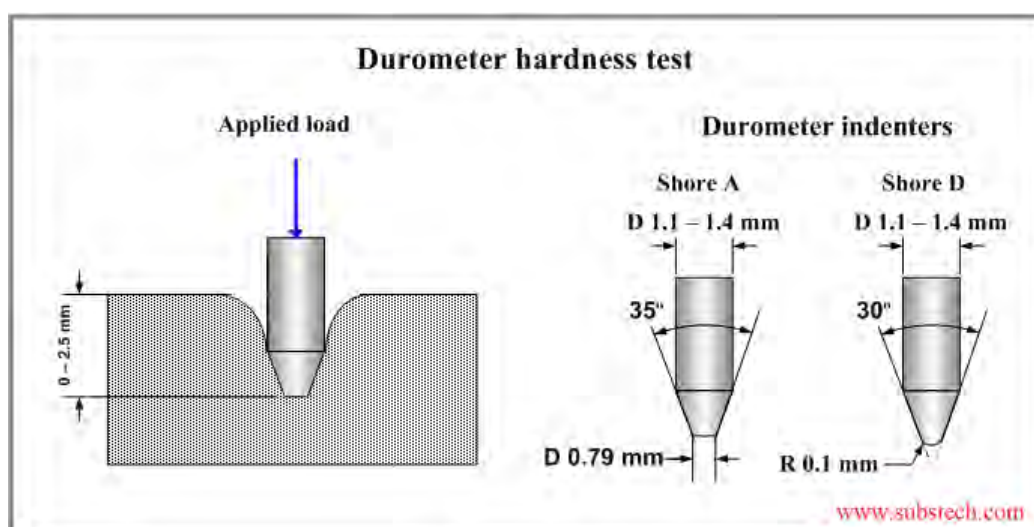




**Εικόνα 1.2.8** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore κλίμακας A. Χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της σκληρότητας δοκιμίων από καουτσούκ, ελαστομερών υλικών καθώς και άλλων υλικών όπως είναι το δέρμα. Η συσκευή μέτρησης είναι ευέλικτη όσον αφορά τη ρύθμιση του ύψους, δίνοντας τη δυνατότητα να τοποθετηθεί δοκίμιο μέγιστου ύψους 63 mm. Επιπλέον, διαθέτει μήκος διαδρομής 15 mm και ρυθμιζόμενη πλάκα βάσης για τη διόρθωση των ανομοιογενών αντικειμένων της δοκιμής. Η εικόνα μπορεί να εντοπιστεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.kern-sohn.com/en/shop/subcategory-78.html>.

Όπως προαναφέρθηκε, υπάρχουν διάφορες κλίμακες σκληρόμετρων, που χρησιμοποιούνται για υλικά με ποικίλες ιδιότητες. Οι δύο πιο κοινές κλίμακες, χρησιμοποιώντας ελαφρώς διαφορετικά συστήματα μέτρησης, είναι ο τύπος D 2240 ASTM A και D τύπου κλίμακες. Η κλίμακα A εφαρμόζεται σε μαλακότερα πλαστικά υλικά, ενώ η κλίμακα D δεν ενδείκνυται για αυτά. Ωστόσο, υπάρχουν συνολικά 12 κλίμακες, ανάλογα με τη σκοπούμενη χρήση, A, B, C, D, DO, E, O, OO, OOO, OOO- S,T και M. Κάθε κλίμακα οδηγεί σε μία τιμή μεταξύ 0 και 100, με τις υψηλότερες τιμές να δείχνουν ένα σκληρότερο υλικό. Κάθε συσκευή Shore, ανάλογα με την κλίμακα που χρησιμοποιείται, διαθέτει διαφορετικό διεισδυτή, όσον αφορά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αιχμής του καθώς και το μέγεθος της δύναμης που μπορεί να επιβάλλει στο δείγμα. Για την καλύτερη κατανόηση της χρήσης των διεισδυτών κατά τη σκληρομέτρηση, παρατίθεται παρακάτω

ορισμένες εικόνες που αναφέρονται διεξοδικά στα χαρακτηριστικά των διαφόρων τύπων διεισδυτών.



**Εικόνα 1.2.9** Αρχικά, παρατίθενται οι δύο τύποι διεισδυτών που έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερο στο παρελθόν. Στην εικόνα αριστερά, γίνεται σχηματική αναπαράσταση της σκληρομέτρησης, με το διεισδυτή να εισχωρεί στο υλικό δοκίμιο σε μέγιστο βάθος 2.5 χιλιοστών με την επιβολή της δύναμης του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη εικόνα δεξιά, διακρίνονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διεισδυτών τύπου A και D. Ο διεισδυτής τύπου A αποτελείται από μία επίπεδη αιχμή, ενώ ο διεισδυτής τύπου D από μία κωνική «κορυφή». Ο διεισδυτής κλίμακας D εφαρμόζεται σε σκληρότερα πλαστικά, σε σχέση με το διεισδυτή τύπου A. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=shore\\_durometer\\_hardness\\_test](http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=shore_durometer_hardness_test).

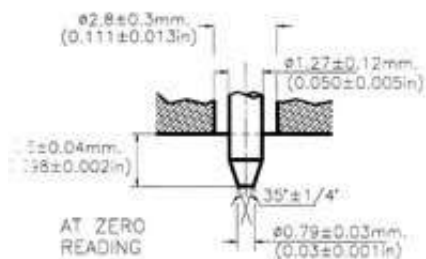


Figure 1a Type A and C Indentor

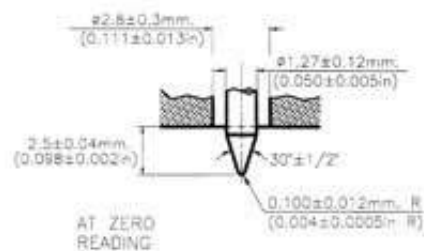


Figure 1b Type B and D Indentor

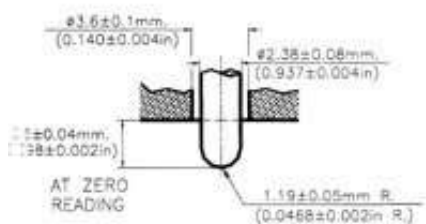


Figure 1c O, DO, and OO Indentor

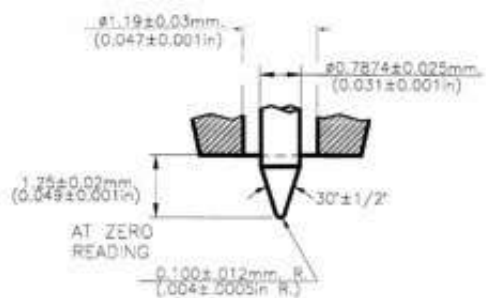
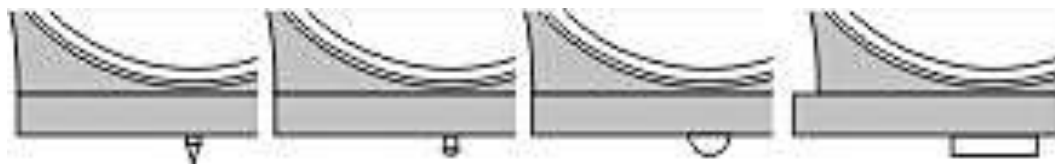


Figure 1d Type M Indentor

**Εικόνα 1.2.10** Στην εικόνα παριστάνονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διεισδυτών, που είναι ενσωματωμένοι στα σκληρόμετρα Shore. Υπάρχουν συνολικά 12 διαφορετικές κλίμακες Shore, A, B, C, D, DO, E, O, OO, OOO, OOO-S, T και M, που δημιουργούνται από τη χρήση 7 διαφορετικών σχημάτων διεισδυτών, οι οποίοι θα περιγραφούν αναλυτικά παρακάτω. Οι κλίμακες A και D χρησιμοποιούνται ευρύτατα και μάλιστα πολύ περισσότερο από τις υπόλοιπες. Αντιθέτως, η κλίμακα M δεν χρησιμοποιείται ιδιαίτερα συχνά. Ειδικότερα, η κλίμακα M χρησιμοποιεί ένα πολύ μικρό ελατήριο-δύναμη και αναπτύχθηκε για να επιτρέψει τον έλεγχο πολύ λεπτών κομματιών με «περίεργο» σχήμα. Τα δοκίμια αυτά δεν μπορούν να «δοκιμάζονται» με τις υπόλοιπες κλίμακες. Διαφορετικά, λοιπόν, υλικά ανταποκρίνονται σε κάθε κλίμακα, ενώ δεν υπάρχει συσχετισμός μεταξύ των διαφόρων κλιμάκων. Η ηλεκτρονική διεύθυνση από την οποία προέρχεται η εικόνα είναι [http://www.itranrubber.com/newsletter\\_archive2.php](http://www.itranrubber.com/newsletter_archive2.php).



**Εικόνα 1.2.11** Σχηματική απεικόνιση των διεισδυτών που χρησιμοποιούνται στις διάφορες κλίμακες Shore και Asker. Ο διεισδυτής με την κωνική αιχμή, στην εικόνα αριστερά, αντιστοιχεί στις κλίμακες B και D. Χρησιμοποιείται για δοκιμές σε σκληρά πλαστικά και ελαστικά. Στη δεύτερη εικόνα, διακρίνεται το επίπεδο σημείο αιχμής του διεισδυτή. Τέτοιου τύπου διεισδυτές χρησιμοποιούνται στις κλίμακες Shore A, C και αφορούν συνήθη λάστιχα και πλαστικά. Στην τρίτη εικόνα, ο διεισδυτής διαθέτει σφαιρικό σχήμα τύπου

Asker C και εφαρμόζεται σε μαλακά ελαστικά και σπογγώδη υλικά όπως είναι το σφουγγάρι. Στην τελευταία εικόνα (δεξιά), παριστάνεται ο διεισδυτής τύπου Asker F, του οποίου η αιχμή σχηματίζει επίπεδη επιφάνεια. Ο τύπος αυτός βρίσκει συνήθως εφαρμογή σε σπογγώδη και αφρώδη υλικά. Γενικότερα, όσον αφορά την κλίμακα Shore A εφαρμόζεται για τα περισσότερα λάστιχα, ενώ η κλίμακα Shore D χρησιμοποιείται για λάστιχα υψηλής σκληρότητας. Οι κλίμακες Shore DO, O, OO εφαρμόζονται σε υλικά με χαμηλή σκληρότητα, ενώ ο τύπος Shore M είναι για υλικά με μικρές σκληρότητες, τα οποία διαθέτουν ταυτόχρονα και μικρό πάχος. Η ηλεκτρονική διεύθυνση εύρεσης της εικόνας είναι <http://www.hoto-instruments.com/durometer/durometer-x.htm>.

Στις εικόνες που ακολουθούν περιγράφονται αναλυτικά οι 7 τύποι διεισδυτών που εφαρμόζονται στα σκληρόμετρα Shore. Η ηλεκτρονική διεύθυνση από την οποία προέρχονται οι παρακάτω εικόνες είναι <http://www.ccsi-inc.com/t-durometer-testing.htm>.



#### **Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου A:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 35° Κόλινος κώνος (με επίπεδη αιχμή και κυκλικές γωνίες στην κορυφή του διεισδυτή)
- ✚ **Διάμετρος:** 1.40 Ø mm (0.050 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 2.54 mm (0.100 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 και JISK 6301, και για τις δύο κλίμακες A και C
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα A συνήθως μαλακά λάστιχα και ελαστομερή, ενώ για την κλίμακα C λάστιχα και πλαστικά μέτριας σκληρότητας
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο A είναι 821 gr (8.05 Nt), ενώ για τον τύπο C είναι 4533 gr (44.45 Nt)



#### **Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου D:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 30° Κώνος
- ✚ **Διάμετρος:** 1.40 Ø mm (0.050 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 2.54 mm (0.100 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 και για τις δύο κλίμακες B, D και DIN 53505 μόνο για τον τύπο D
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα B συνήθως λάστιχα μέτριας σκληρότητας, ενώ για την κλίμακα D λάστιχα και σκληρά πλαστικά
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο B είναι 821 gr (8.05 Nt), ενώ για τον τύπο D είναι 4533 gr (44.45 Nt)



#### **Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου E:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 2.5 mm (0.100 in) Σφαιρική ακτίνα
- ✚ **Διάμετρος:** 4.5 Ø mm (0.200 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 2.54 mm (0.100 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 για τον τύπο E
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα E συνήθως μαλακά λάστιχα, σφουγγάρια και αφρώδη υλικά

✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο E είναι 821 gr (8.05 Nt)



**Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου M:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 30° Κώνος
- ✚ **Διάμετρος:** 0.79 Ø mm (0.031 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 1.25 mm (0.050 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 για τον τύπο M
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα M συνήθως πολύ λεπτά υλικά, με ελάχιστο πάχος 1.25 mm (0.050 inch)
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο M είναι 78 gr (0.0044 Nt)



**Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου O:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 1.20 mm (0.0470 inch) Σφαιρική ακτίνα
- ✚ **Διάμετρος:** 2.40 Ø mm (0.0940 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 2.54 mm (0.100 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 και για τους τρεις τύπους DO, O και OO
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα DO συνήθως υλικά υψηλής πυκνότητας, για την κλίμακα O μαλακά λάστιχα και υλικά μέτριας πυκνότητας όπως είναι για παράδειγμα το τεχνητό μετάξι, ενώ για τον τύπο OO υλικά χαμηλής πυκνότητας καθώς και σπογγώδη λάστιχα και πλαστικά
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο OO είναι 113 gr (1.111 Nt), για τον τύπο O είναι 821 gr (8.05 A) και για τον τύπο DO είναι 4533 gr (44.45 Nt)



**Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου OOO:**










- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 0.635 mm (0.250 inch) Σφαιρική ακτίνα
- ✚ **Διάμετρος:** 10.7/ 11.6 Ø mm (0.420/ 0.455 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 2.54 mm (0.100 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 για τον τύπο OOO
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα OOO συνήθως πλαστικά αφρώδη υλικά, ανοικτά ή κλειστά κύτταρα
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο OOO είναι 113 gr (1.111 Nt)



**Αναλυτική περιγραφή διεισδυτή τύπου OOO-S:**

- ✚ **Διαμόρφωση και σχήμα:** 10.7 mm (0.420 inch) Ακτίνα
- ✚ **Διάμετρος:** 12.0 Ø mm (0.470 inch)
- ✚ **Επεκτασιμότητα:** 5.0 mm (0.200 inch)
- ✚ **Πρότυπα που ακολουθεί:** ASTM D 2240 για τον τύπο OOO-S
- ✚ **Υλικά δοκίμια:** για την κλίμακα OOO-S συνήθως πλαστικά αφρώδη υλικά, ανοικτά ή κλειστά κύτταρα
- ✚ **Δύναμη ελατηρίου:** για τον τύπο OOO-S είναι 197 gr (1.932 Nt)



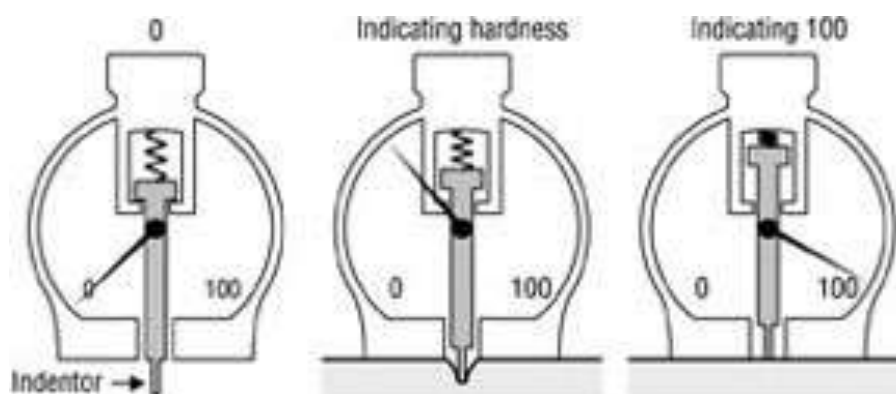
Type	Application	Indenter	Spring Force
<b>A</b>	Soft rubber, plastics and elastomers.	Flat cone point, 35°	 822 g 1.81 lb
<b>B</b>	Harder elastomers and plastics. Paper and fibrous materials. Use above 93 A scale.	Sharp cone point, 30°	 822 g 1.81 lb
<b>C</b>	Medium hard elastomers and plastics. Also useful to avoid surface marks.	Flat cone point, 35°	 4536 g 10.0 lb
<b>D</b>	Hard rubber and plastics such as thermo plastics, flooring and bowling balls.	Sharp cone point, 30°	 4536 g 10.0 lb
<b>DO</b>	Dense granular material and textile windings.	3/32" Spherical	 4536 g 10.0 lb
<b>O</b>	Very soft elastomers, textile windings and soft granular materials. Use below 20 A scale.	3/32" Spherical	 822 g 1.81 lb
<b>OO</b>	Light foams, sponge rubber gels and animal tissue.	3/32" Spherical	 113 g 0.25 lb
<b>OOO</b>	Ultra soft gels and sponge rubber.	1/2" Spherical	 113 g 0.25 lb
<b>M</b>	Materials as thin as .050"	Sharp cone point, 30°	 -

**Εικόνα 1.2.12** Συνοπτική περιγραφή, με τη μορφή πίνακα, των διάφορων τύπων διεισδυτών που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της σκληρότητας σε μαλακά κυρίως υλικά. Ανάλογα με την κλίμακα Shore, κάθε διεισδυτής, όπως φαίνεται παραπάνω, έχει ιδιαίτερα γεωμετρικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αιχμή του, ενώ ταυτόχρονα η μέγιστη δύναμη που μπορεί να επιβάλλει ο διεισδυτής στο δοκίμιο, διαμέσου του βαθμονομημένου ελατηρίου, ποικίλλει σε κάθε περίπτωση. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τον πίνακα, ανάλογα με το είδος του δοκιμίου, μαλακό ή σκληρό ελαστικό, ελαστομερές ή πλαστικό, δέρμα ή αφρώδες υλικό, επιλέγεται σε κάθε περίπτωση το κατάλληλο για τη μέτρηση σκληρόμετρο Shore. Ο πίνακας μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.pfstar.com/Durometer-Shore-OO-with-NIST-Certificate\\_p\\_28299.html#](http://www.pfstar.com/Durometer-Shore-OO-with-NIST-Certificate_p_28299.html#).

Όλες οι συσκευές σκληρομέτρησης Shore, εκτός των μονάδων κλίμακας M, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως φορητές συσκευές. Αντίθετα, οι σταθερές συσκευές, που κατασκευάστηκαν για τη μέτρηση της κλίμακας M, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή και σε άλλες κλίμακες Shore, συνιστώνται για καλύτερη ακρίβεια και είναι απαραίτητες για τον έλεγχο της κλίμακας M, λόγω της ευαισθησίας που χαρακτηρίζει τα υλικά δοκίμια που μετρώνται με αυτή την κλίμακα. Ορισμένες σταθερές συσκευές Shore διαθέτουν επιπλέον βάρη, ώστε να εξασφαλιστεί ότι η δύναμη στο επίπεδο «πόδι» είναι σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή. Κανονικά, σε κάθε δείγμα πραγματοποιούνται πολλαπλές δοκιμές, σε διαφορετικά σημεία της επιφάνειας του δοκιμίου, αλλά τελικά χρησιμοποιείται το μέσο αποτέλεσμα των τιμών που προέκυψαν κατά την πειραματική διαδικασία. Η δοκιμή Shore ορίζεται βασιζόμενη σε

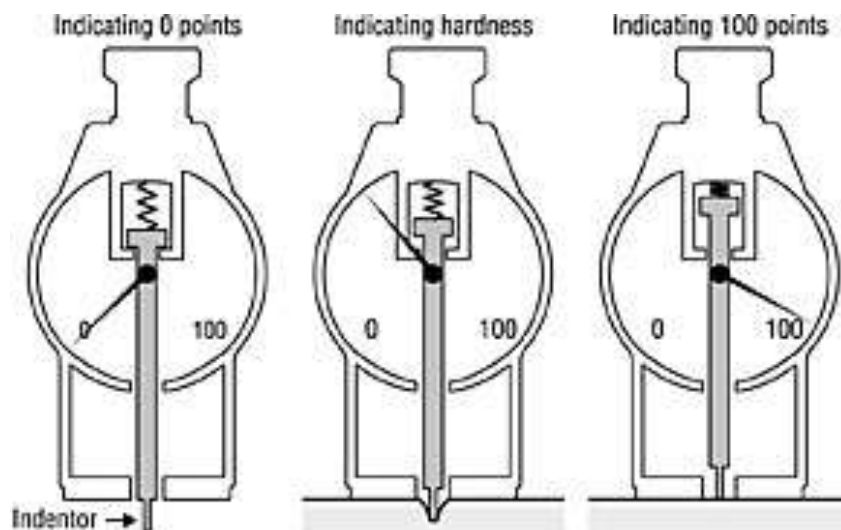
ορισμένα πρότυπα. Αυτά είναι τα εξής: ASTM D 2240, DIN 53505, ISO 7619, JISK 6301 και Asker C-SRIS-0101.

Η βασική δοκιμή απαιτεί να εφαρμοστεί η δύναμη στο υλικό για απαιτούμενο χρονικό διάστημα, ενώ το υπό δοκιμή υλικό θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 6.4 χιλιοστά. Η τελική τιμή της σκληρότητας εξαρτάται από το βάθος του διεισδυτή μέσα στο δείγμα, με την προϋπόθεση ότι η δύναμη έχει εφαρμοστεί για χρονικό διάστημα 15 δευτερολέπτων πάνω στο υλικό<sup>1</sup>. Στην περίπτωση που ο διεισδυτής εισχωρήσει 2.5 χιλιοστά μέσα στο υλικό, στο σκληρόμετρο αναγράφεται η τιμή 0 για την εν λόγω κλίμακα. Σε αντίθετη περίπτωση, που δεν παρατηρείται διείσδυση το σκληρόμετρο δείχνει την τιμή 100. Έτσι λοιπόν, η τιμή της σκληρότητας μπορεί να ποικίλλει από 0 έως 100. Η μέγιστη διείσδυση σε κάθε κλίμακα είναι 2.50- 2.54 χιλιοστά και αντιστοιχεί στην ελάχιστη σκληρότητα Shore που είναι ίση με 0, ενώ η μέγιστη τιμή σκληρότητας 100 αντιστοιχεί στην ελάχιστη ουσιαστικά διείσδυση. Στα σχήματα που παρατίθενται παρακάτω γίνεται εκτενής περιγραφή της διαδικασίας σκληρομέτρησης, με σκοπό την κατανόηση της δοκιμής.

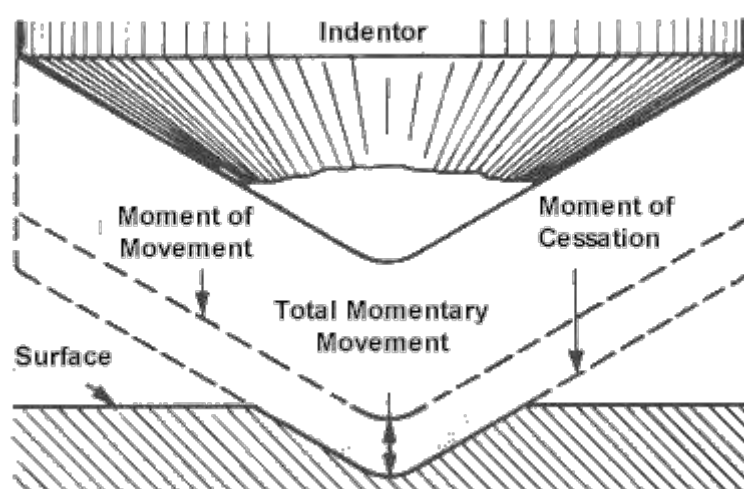


**Εικόνα 1.2.13** Απεικόνιση της οθόνης αναλογικού σκληρόμετρου Shore. Η τιμή της σκληρότητας για κάθε υλικό προσδιορίζεται μετρώντας το βάθος του διεισδυτή μέσα στο δείγμα. Οι τιμές βασίζονται σε μια κλίμακα 100 σημείων (ακρίβεια  $\pm 0.75$  σημείο). Ωστόσο, καθώς ο χρόνος παρέρχεται μια ανάγνωση λαμβάνεται λίγα δευτερόλεπτα μετά την επαφή του διεισδυτή με το δείγμα. Οι τιμές σκληρότητας κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0 και 100. Σε περίπτωση που η τιμή της σκληρομέτρησης είναι μικρότερη του 10, τότε τα αποτελέσματα της δοκιμής είναι ανακριβή και δεν αναφέρονται. Στην εικόνα αριστερά παριστάνεται η σκληρομέτρηση ενός μαλακού υλικού, η ένδειξη του οργάνου είναι μηδενική  $S=0$ , ενώ το βάθος του διεισδυτή είναι το μέγιστο δυνατό και ίσο με 2.5 mm. Η τιμή αυτή του βάθους εκφράζει τη μηδενική αντίσταση του υλικού κατά τη διάρκεια εισχώρησης του διεισδυτή μέσα σε αυτό. Στη μεσαία εικόνα παριστάνεται η δοκιμή σκληρομέτρησης σε ένα σκληρότερο υλικό, όπου το ελατήριο δείχνει να έχει συρρικνωθεί σε σχέση με την προηγούμενη εικόνα, ενώ η μέτρηση φαίνεται να είναι περίπου  $S=40$ . Στην εικόνα δεξιά, ο διεισδυτής δεν έχει εισχωρήσει καθόλου μέσα στο υλικό  $h=0$ , το όργανο καταγράφει τη μέγιστη δυνατή τιμή  $S=100$  και ταυτόχρονα παρατηρείται η μέγιστη συρρίκνωση στο εσωτερικό ελατήριο του οργάνου. Έτσι, στην δεξιά εικόνα το υλικό μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύ σκληρό και για τη μέτρηση του,

χρησιμοποιείται κλίμακα Shore B και Shore D, που εφαρμόζονται για σκληρά ελαστικά. Η ηλεκτρονική διεύθυνση από την οποία προέρχεται η εικόνα είναι <http://www.ccsi-inc.com/t-durometer-testing.htm>.



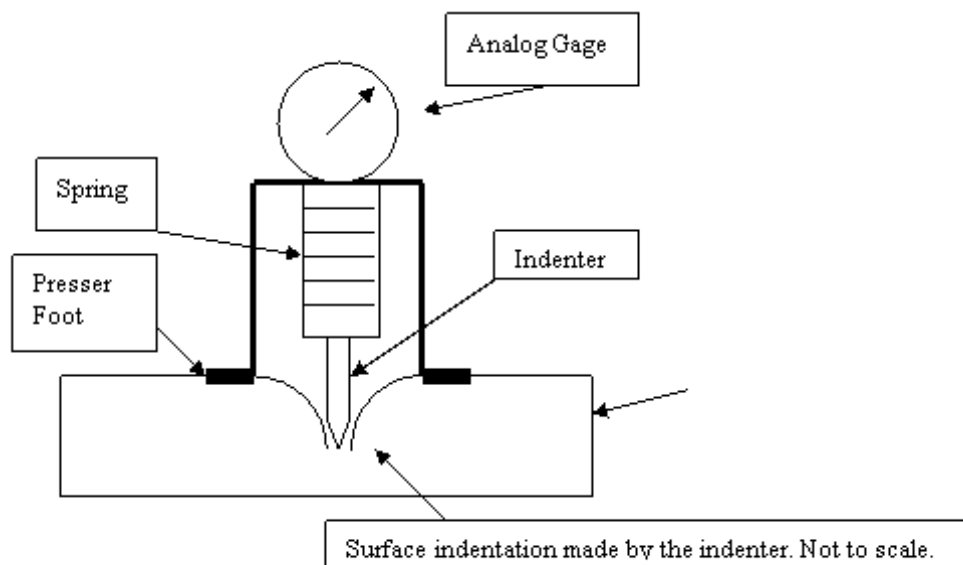
**Εικόνα 1.2.14** Εικόνα φορητού αναλογικού σκληρομέτρου πάνω σε ελαστικό δοκίμιο. Η εικόνα σχετίζεται απόλυτα με την προηγούμενη, με τη μόνη διαφορά ότι αφορά διαφορετικό τύπο οργάνου. Παρόλα αυτά όμως, οποιαδήποτε κλίμακα Shore και αν χρησιμοποιηθεί, ανάλογα με το δείγμα, όλες οι συσκευές Shore ανεξαρτήτως προσδιορίζουν τη σκληρότητα του υλικού με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, η εικόνα αριστερά απεικονίζει τη μέτρηση ενός υλικού που δεν επιφέρει καμία αντίσταση στη διείσδυση, το μεσαίο υλικό εμφανίζει μέτρια αντίσταση, ενώ το υλικό δεξιά ανήκει στα σκληρά ελαστικά ή πλαστικά υλικά. Το παραπάνω σχήμα μπορεί να βρεθεί στην σελίδα <http://www.buydurometers.com/>.



**Εικόνα 1.2.15** Σταδιακή εισχώρηση του διεισδυτή στην επιφάνεια του υλικού. Ο διεισδυτής που απεικονίζεται είναι τύπου B, D και M. Πρόκειται για κωνικό διεισδυτή με κυκλική αιχμή. Στην περίπτωση που το μετρούμενο υλικό χαρακτηρίζεται από μεγάλη σκληρότητα, δεν παρατηρείται καμία εισχώρηση

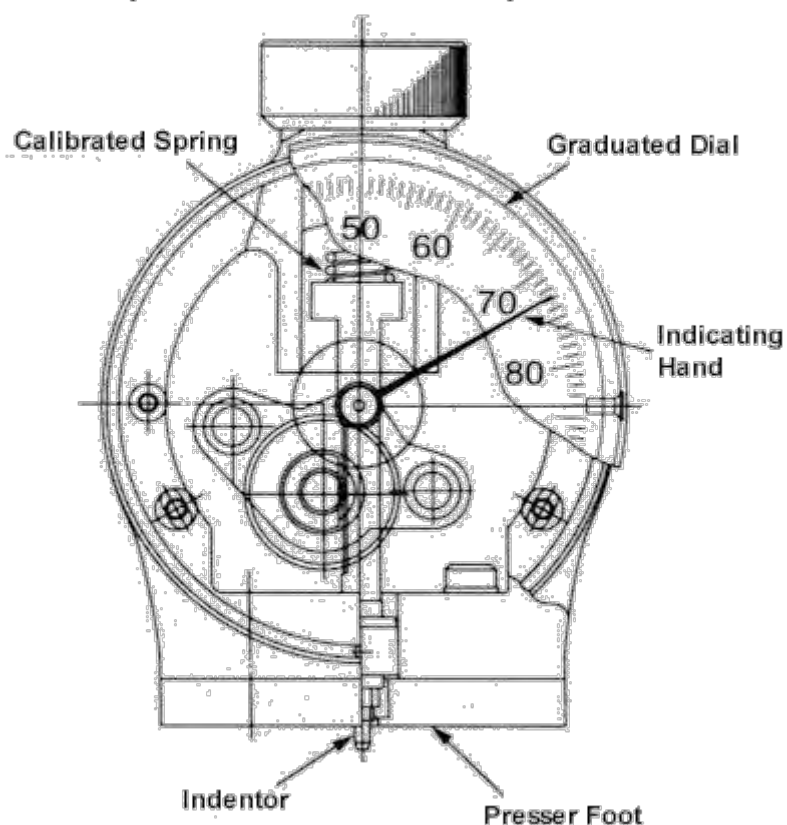


μέσα στο υλικό. Σε αντίθετη περίπτωση, μεγάλο τμήμα του διεισδυτή εισχωρεί τόσο στην επιφάνεια αλλά και σε τμήμα του υποστρώματος του υλικού. Η ηλεκτρονική διεύθυνση από την οποία προέρχεται η εικόνα είναι <http://www.ccsi-inc.com/t-durometer-testing.htm>.

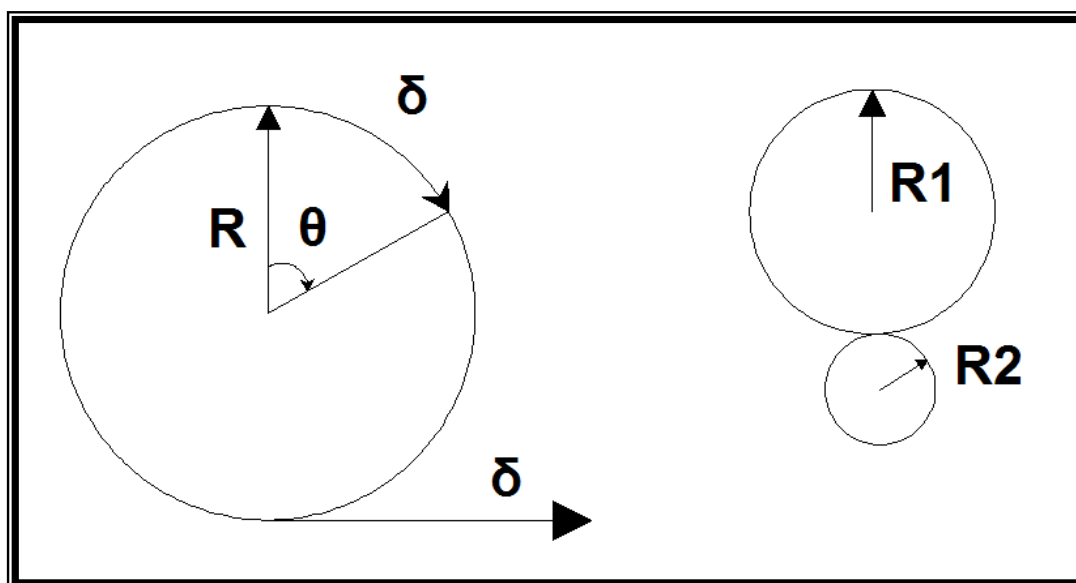


**Εικόνα 1.2.16** Σχηματική απεικόνιση της λειτουργίας ενός σκληρόμετρου Shore. Η συσκευή αποτελείται από μία αναλογική οθόνη, στην οποία φαίνεται, σε κάθε περίπτωση, η τιμή των μετρήσεων. Κάτω από την οθόνη βρίσκεται, ενσωματωμένο στο εσωτερικό του οργάνου, ένα ελατήριο μέσω του οποίου μεταφέρεται η δύναμη στο διεισδυτή. Στην προέκταση του ελατηρίου είναι τοποθετημένος ο διεισδυτής που καλείται κάθε φορά να εισχωρήσει μέσα στην επιφάνεια του υπό δοκιμή υλικού, για να προκύψει η σκληρότητα του δείγματος. Επιπλέον, η συσκευή αποτελείται και από ένα επίπεδο «πόδι», έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η παραλληλία μεταξύ του «ποδιού» (ουσιαστικά του οργάνου) και της επιφάνειας του υλικού. Το σχήμα μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.mcknightguitars.com/glue-hardness.html>.

### Important Durometer Components



**Εικόνα 1.2.17** Σχηματική απεικόνιση σημαντικών συστατικών ενός αναλογικού σκληρόμετρου. Ειδικότερα, το αναλογικό σκληρόμετρο Shore αποτελείται από ένα εσωτερικό βαθμονομημένο ελατήριο, μέσω του οποίου επιβάλλεται η δύναμη στο υλικό. Επιπλέον, αποτελείται από την οθόνη ένδειξης των μετρήσεων, ένα επίπεδο «πόδι» και το διεισδυτή. Ανάλογα με την κλίμακα Shore χρησιμοποιείται και διαφορετικός τύπος διεισδυτή. Παρατηρώντας το εσωτερικό τμήμα του οργάνου ένδειξης των μετρήσεων, φαίνεται ότι το σύστημα των μικρών τροχαλιών μεγεθύνει την μικρή κατακόρυφη μετακίνηση του στελέχους του διεισδυτή, ώστε αυτό να μεταφραστεί σε μία μεγάλη στροφή του δείκτη, που δίνει τελικά τη μέτρηση κατά Shore. Η ηλεκτρονική διεύθυνση από την οποία προέρχεται η εικόνα είναι <http://www.ccsi-inc.com/t-durometer-testing.htm>.



**Σχήμα 1.2.1** Στο παραπάνω σχήμα παρατηρείται η μετακίνηση  $\delta$  ενός κύκλου ακτίνας  $R$ , ενώ στη συνέχεια, μέσω της σχέσης που ακολουθεί, η ακτινική μετακίνηση  $\delta$  μεταφράζεται σε στροφή  $\theta$ . Οι εφαπτόμενοι κύκλοι, στα δεξιά του σχήματος, με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ , παριστάνουν το σύστημα των μικρών τροχαλιών στο εσωτερικό τμήμα της οθόνης του σκληρόμετρου Shore.

Οι τύποι που ακολουθούν εκφράζουν τη σχέση μεταξύ των στροφών  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  και των ακτίνων  $R_1$  και  $R_2$  στις εφαπτόμενες τροχαλίες. Η γενική σχέση που συνδέει τη μετακίνηση  $\delta$  με τη στροφή  $\theta$  είναι  $\theta = \frac{\delta}{2\pi R}$ . Για τις τροχαλίες του σχήματος, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής  $\theta_1 = \frac{\delta}{2\pi R_1}$  και  $\theta_2 = \frac{\delta}{2\pi R_2}$  για τους κύκλους με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$  αντίστοιχα. Έτσι, διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει τελικά ότι  $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{R_2}{R_1}$ . Έτσι λοιπόν, ο λόγος των στροφών των κύκλων είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των ακτίνων τους!

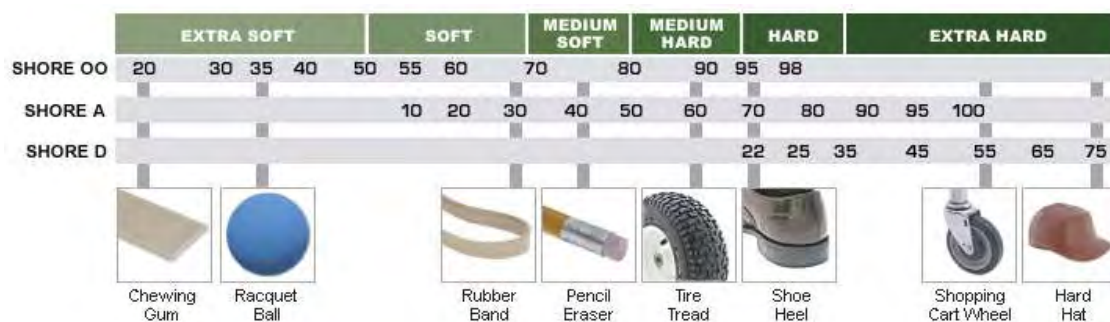
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή τη δοκιμή είναι ένα χρήσιμο μέτρο όσον αφορά την αντοχή των πολυμερών. Ωστόσο, η δοκιμή σκληρομέτρησης δεν χρησιμεύει για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων όπως είναι για παράδειγμα η αντοχή στις γρατσουνιές, η τριβή καθώς και η φθορά. Παρόλα αυτά όμως, η σκληρότητα Shore συχνά χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας των ελαστομερών υλικών. Ολοκληρώνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι η δοκιμή σκληρομέτρησης αναφέρεται στο μέτρο ελαστικότητας των ελαστομερών υλικών και εξαιτίας αυτού πολλές θεωρητικές προσπάθειες οδήγησαν στο παρελθόν να καθιερωθεί μία σχέση μεταξύ σκληρότητας και μέτρου ελαστικότητας. Έτσι λοιπόν, γίνεται μια προσπάθεια να καθοριστεί μία σχέση μεταξύ του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και της σκληρότητας Shore  $S$ . Στις εικόνες που ακολουθούν δίνονται με τη μορφή πινάκων ενδεικτικές τιμές σκληρομέτρησης διαφόρων ελαστικών, ελαστομερών, πλαστικών και άλλων παρόμοιων υλικών. Στο τέλος παρατίθενται ένας

συγκεντρωτικός πίνακας που εκφράζει την αντιστοιχία του υπό δοκιμή υλικού με την κλίμακα Shore και ουσιαστικά με τον τύπο διεισδυτή που απαιτείται σε κάθε περίπτωση, ανάλογα δηλαδή με το μετρούμενο δείγμα, για να προκύψουν ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα.

**Πίνακας 1.2.1** Πίνακας που απεικονίζει το μέγεθος σκληρότητας διαφόρων υλικών, κάνοντας χρήση του σκληρόμετρου Shore σε τρεις κλίμακες A, D και OO, ανάλογα με το υλικό δοκίμιο που επιλέγεται σε κάθε περίπτωση. Στον πίνακα παρατηρείται ότι η τσιχλα, για παράδειγμα, διαθέτει μικρή τιμή σκληρότητας S=20 και για την εύρεση αυτού του μεγέθους χρησιμοποιείται κλίμακα OO, όπως συνηθίζεται για υλικά χαμηλής πυκνότητας. Αντίθετα, το λάστιχο Εβονίτη έχει τη μέγιστη δυνατή σκληρότητα που μπορεί να αναγραφεί σε μία συσκευή Shore S=100, χρησιμοποιώντας την κλίμακα A για τη μέτρηση, που εφαρμόζεται κυρίως για μαλακά πλαστικά και ελαστομερή υλικά. Ο πίνακας μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://en.wikipedia.org/wiki/Shore\\_durometer](http://en.wikipedia.org/wiki/Shore_durometer).

Υλικό	Σκληρότητα κατά Shore	Κλίμακα Shore
Κάθισμα ποδηλάτων	15-30	OO
Τσιχλα	20	OO
Λάστιχο πόρτας	55	A
Πέλμα ελαστικού του αυτοκινήτου	70	A
Καουτσούκ Εβονίτη	100	A
Στερεά ελαστικά φορτηγών και λεωφορείων	50	D
Σκληρό καπέλο	75	D

<sup>1</sup> Η χρονική αυτή διάρκεια επαρκεί ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο της χαλάρωσης, με αποτέλεσμα η μέτρηση να περιέχει μόνο την υπερελαστική συμπεριφορά των υλικών. Στην παρούσα εργασία θα προταθεί μία ειδική μεθοδολογία, που θα λαμβάνει υπόψη τα φαινόμενα του ερπυσμού ή της χαλάρωσης.



**Εικόνα 1.2.18** Στον πίνακα φαίνονται οι τιμές σκληρότητας, όπως αυτές προέκυψαν με τη χρήση των σκληρόμετρων Shore, για διάφορα υλικά. Στο αριστερό τμήμα του πίνακα παρουσιάζονται υλικά τα οποία χαρακτηρίζονται ως ιδιαίτερα μαλακά ελαστομερή, όπως για παράδειγμα μία τσίχλα, ενώ στο δεξιό τμήμα του πίνακα τοποθετούνται υλικά με μέγιστη σκληρότητα. Όπως παρατηρείται για την μέτρηση των υλικών ξεκινώντας από τα μαλακότερα προς τα σκληρότερα χρησιμοποιήθηκαν τρεις κλίμακες Shore OO, A και D. Η κλίμακα OO εφαρμόζεται σε υλικά που είναι ιδιαίτερα μαλακά έως και δείγματα με μέτρια σκληρότητα. Η κλίμακα A αντιστοιχεί σε υλικά μαλακά έως και αρκετά σκληρά, ενώ η κλίμακα D χρησιμοποιείται για τη μέτρηση αποκλειστικά σκληρών δοκιμίων. Έτσι λοιπόν, ανάλογα με το είδος και τα χαρακτηριστικά του δοκιμίου επιλέγεται για την υλοποίηση της σκληρομέτρησης και η ανάλογη κλίμακα Shore, έτσι ώστε η μέτρηση του δείγματος, σε κάθε περίπτωση, να είναι αντιπροσωπευτική. Ο πίνακας μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.blurealmstudios.com/2009/02/25/understanding-shore-hardness/>.

**Πίνακας 1.2.2** Συνοπτική απεικόνιση των υλικών που εξετάζονται σε κάθε κλίμακα Shore. Σύμφωνα με τον πίνακα και με όσα έχουν γραφεί παραπάνω, ανάλογα με το είδος του δείγματος, που επιθυμείται να προσδιοριστεί η σκληρότητα του κατά Shore, επιλέγεται και ο κατάλληλος τύπος διεισδυτή. Όσον αφορά τους διεισδυτές εμφανίζουν διαφορές μεταξύ τους ως προς το σχήμα της αιχμής τους. Διεισδυτές με κωνική αιχμή έχουν τη δυνατότητα να μετρήσουν σκληρότερα υλικά σε σχέση με αυτούς που διαθέτουν επίπεδη ή σφαιρική «κορυφή». Ο πίνακας βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.materials.co.uk/rubber.htm>.

Υλικό	Μέσο	Παραδείγματα
Μαλακό ελαστικό, οπογγώδη ελαστικά και πλαστικά, φελλός, τεχνητό μετάξι, orlon, nylon	Shore O και OO	Pad εκτυπωτές, φρούτα, ισοί, αυτοκίνητα διαγωγής
Μαλακά ή συνήθης σκληρότητας ελαστικό, ελαστομερή υλικά, τσόχες, εύκαμπτο πολυουρεθάνιο, neoprene	Shore A, Shore "A" Micro (M), DIDC, IRHD Micro (M)	Γενικά είδη από καουτσούκ, ελαστικά, οδοστρωτήρες, τσόχες πιάνο, στεγανωτικά, σφραγίδες, O-Rings
Μεσαίας σκληρότητας ελαστικό, πολυουρεθάνη, πλαστικά	Shore C	Automotive Αντισταθμιστικά, σκληρά ελαστικά
Σκληρού τύπου ελαστικό, άκαμπτη πολυουρεθάνη, thermoplastics, εποξική ρητίνη, Plexiglas	Shore D	Γλάστρες, γενικά τα πλαστικά μέρη, δάπεδα βινυλίου, τακάκια φρένων

### 1.3 Ελαστομερή υλικά

**Π**ολυμερές ονομάζεται ένα μεγάλο μόριο, το οποίο αποτελείται από αλυσίδες ή δακτυλίους που συνδέονται μεταξύ τους με μονομερείς μονάδες. Τα πολυμερή συνήθως έχουν υψηλό σημείο τήξης και βρασμού. Πολυμερή που χαρακτηρίζονται από υψηλή ελαστικότητα ονομάζονται ελαστομερή.

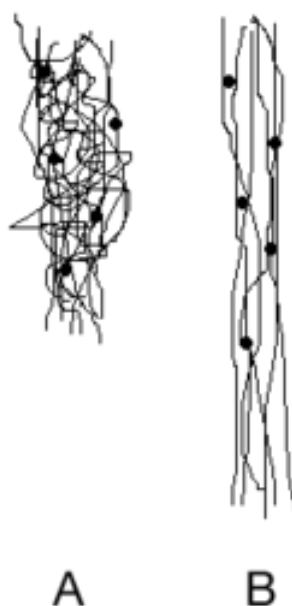
**Με τον όρο ελαστομερές ονομάζεται ένα μακρομοριακό υλικό που έχει την ιδιότητα της βισκοελαστικότητας, δηλαδή επηρεάζεται από τα φαινόμενα ερπυσμού ή χαλάρωσης.** Επιπλέον, έχει τη δυνατότητα να δεχτεί μεγάλες παραμορφώσεις και σαν αποτέλεσμα αυτής της ακραίας ευελιξίας, ένα ελαστομερές μπορεί να επεκταθεί από 5% έως 700% ανάλογα με το είδος του υλικού. Γενικά, τα ελαστομερή διαθέτουν χαμηλό μέτρο του Young και υψηλή ελαστική παραμόρφωση σε σύγκριση με άλλα υλικά. Ουσιαστικά, το ελαστομερές είναι ένα φυσικό ή συνθετικό καουτσούκ, το οποίο έχει τη δυνατότητα να υποβληθεί σε παραμόρφωση υπό την επίδραση κάποιας δύναμης και στη συνέχεια να επανακτήσει την αρχική του μορφή με την αφαίρεση της δύναμης.

Όσον αφορά την εσωτερική δομή, είναι γνωστό ότι κάθε ένα από τα μονομερή που συνδέονται για να σχηματίσουν το πολυμερές αποτελείται συνήθως από άνθρακα, υδρογόνο, οξυγόνο και πυρίτιο. Σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος τα ελαστομερή είναι σχετικά μαλακά ( $E=3 \text{ MPa}$ ) και παραμορφώσιμα. Κάθε ελαστικό υλικό αποτελείται από μακριά, ελαφρά, με σταυροειδής δεσμούς μόρια, που έχουν τη μορφή αλυσίδων και έχουν την ικανότητα να επιμηκύνονται σε μεγάλο βαθμό καθώς και είναι σε θέση να ανακτούν την αρχική τους μορφή. Υπό κανονικές συνθήκες τα μεγάλα αυτά μόρια, που συνθέτουν ένα ελαστομερές υλικό, είναι ακανόνιστα τυλιγμένα. Με την εφαρμογή μίας εξωτερικής δύναμης, όμως, το μόριο μπορεί να ισιώσει προς την κατεύθυνση στην οποία τραβιέται. Μετά την απελευθέρωση, τα μόρια αυθόρμητα μπορούν να επιστρέψουν στην αρχική, τυχαία και συμπαγή τους διάταξη. Οι πρωτογενείς χρήσεις των ελαστομερών είναι για σφραγίδες, κόλλες και μορφοποιημένα ελαστικά μέρη. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούν ορισμένα ελαστομερή υλικά, που είναι τα ακόλουθα:

- ✓ Φυσικό καουτσούκ
- ✓ Βουτίλιο
- ✓ Νιτρίλιο
- ✓ Neoprene
- ✓ Αιθυλένιο και προπυλένιο
- ✓ Hypalon
- ✓ Σιλικόνη

Στην εικόνα που ακολουθεί, παριστάνεται η εσωτερική δομή των πολυμερών, που ουσιαστικά συμπίπτει με εκείνη των ελαστομερών. Ουσιαστικά, απεικονίζεται η ικανότητα των ελαστομερών υλικών να

επιστρέφουν στην αρχική τους κατάσταση, μετά την αφαίρεση επιβολής κάποιας εξωτερικής δύναμης.



**Εικόνα 1.3.1** Απεικόνιση της μικροδομής του πολυμερούς, το οποίο αποτελείται από αλυσίδες ή δακτυλίους που συνδέονται μεταξύ τους με μονομερείς μονάδες, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στην εικόνα (Α) παριστάνεται ένα μη τεντωμένο πολυμερές, ενώ στην εικόνα (Β) πρόκειται για το ίδιο πολυμερές, στο οποίο εφαρμόζεται κάποια εξωτερική δύναμη. Με την απομάκρυνση της δύναμης το πολυμερές μπορεί να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση, η οποία διακρίνεται στην εικόνα (Α). Οι τελείες στα δύο σχήματα παριστάνουν τα σημεία των συνδέσεων. Η εικόνα μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.answers.com/topic/elastomer>.

Η επίδραση της θερμοκρασίας είναι σημαντική για την ελαστικότητα ενός πολυμερούς. Ελαστομερή που έχουν ψυχθεί διαθέτουν λιγότερο κινητές αλυσίδες και κατά συνέπεια μικρότερη ελαστικότητα. Χαρακτηριστικό του ελαστομερούς είναι ότι μπορεί να ενισχυθεί με θερμική επεξεργασία κατά την παρουσία χημικών παραγόντων. Το αποτέλεσμα αυτής της επεξεργασίας είναι ο Βουλκανισμός, που οδηγεί σε αύξηση της διασύνδεσης των μορίων του ελαστομερούς. Τα Βουλκανισμένα ελαστομερή συμπεριφέρονται ελαστικά για μικρές παραμορφώσεις.

Στις εικόνες που ακολουθούν διακρίνονται οι διάφορες εφαρμογές των ελαστομερών υλικών. Τα ελαστομερή χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη βιομηχανία και ειδικότερα στις κατασκευές, όπως για παράδειγμα σε έργα οδοποιίας, που βρίσκουν εφαρμογή ως ασφαλτικά κεραμίδια και ασφαλτόπανα. Επιπρόσθετα, εφαρμόζονται στις αυτοκινητοβιομηχανίες, αποτελώντας το κύριο συστατικό υλικό των ελαστικών στα αυτοκίνητα.





**Εικόνα 1.3.2** Δίχρωμο ελαστομερές (SBS) ασφαλτικό κεραμίδι χρώματος μαύρο και κόκκινο. Το ασφαλτικό αυτό κεραμίδι μπορεί να βρεθεί και σε συνδυασμό χρωμάτων μαύρο και γκρι. Υπάρχει η δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης «μπαζών» και άλλων υλικών, πράγμα το οποίο συνεισφέρει αποτελεσματικά στην προσπάθεια για ανακύκλωση. Άλλωστε, το ελαστομερές είναι ένα σύνθετο υλικό και τα σωματίδια των αδρανών υλικών, που το αποτελούν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία υφασμάτων. Εικόνα προερχόμενη από την ηλεκτρονική σελίδα [http://www.patramanis.eu/katepal\\_juzzy.php](http://www.patramanis.eu/katepal_juzzy.php).



**Εικόνα 1.3.3** Τα αυτοκόλλητα ασφαλτόπανα ή ασφαλτικές μεμβράνες είναι συνήθως (SBS) ελαστομερούς βάσης. Ο τύπος που χρησιμοποιείται για την εξωτερική στεγανοποίηση των τοιχίων υπογείων έχει σαν επικάλυψη ένα ισχυρό αντιριζικό φιλμ από HDPE (High Density Polyethylene), έτσι ώστε να υπάρχει προστασία από τυχόν ριζικά συστήματα. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική σελίδα [http://monosimacon.blogspot.com/2009/11/blog-post\\_09.html](http://monosimacon.blogspot.com/2009/11/blog-post_09.html).



**Εικόνα 1.3.4** Λάστιχο αυτοκινήτου κατασκευασμένο από θερμοπλαστικό ελαστομερές υλικό, επιλεγμένο έτσι ώστε να αντέχει σε υψηλές θερμοκρασίες και να έχει καλή δράση επαναφοράς. Μια αυτοκινητοβιομηχανία ελαστικών κατασκευάζει ελαστικό πέλμα, που συνήθως διαθέτει σκληρότητα μεταξύ των τιμών 50 A και 70 A, ανάλογα με την εφαρμογή. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.siriocenter.gr/products>.



**Εικόνα 1.3.5** Ελαστικό αυτοκινήτου κατασκευασμένο από ελαστομερές υλικό. Παρατηρώντας τον πίνακα σκληρότητας, που παρατίθεται σε προηγούμενο κεφάλαιο, το ελαστικό του αυτοκινήτου ανήκει στην κατηγορία των υλικών που παρουσιάζουν μέτρια σκληρότητα. Για το λόγο αυτό, η σκληρότητά του μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας την κλίμακα Shore A και Shore C. Οι κλίμακες αυτές αφορούν κυρίως ελαστικά και πλαστικά μέτριας σκληρότητας, ενώ ο

διεισδυτής του οργάνου που επιλέγεται για την μέτρηση ενός τέτοιου δείγματος χαρακτηρίζεται από ένα επίπεδο σημείο αιχμής. Η μέτρηση ενός λάστιχου κάνοντας χρήση διαφορετικού τύπου διεισδυτή, σε σχέση με αυτούς που προαναφέρθηκαν, όπως για παράδειγμα είναι ο τύπος Shore OO, που διαθέτει σφαιρική αιχμή και αφορά υλικά χαμηλής πυκνότητας, θα δώσει πολύ μεγάλες τιμές σκληρότητας του ελαστικού της τάξης των 90 OO έως 95 OO. Η ηλεκτρονική διεύθυνση που μπορεί να βρεθεί η φωτογραφία του ελαστικού είναι

[http://www.vogelmanufacturing.com/store/index.php?main\\_page=product\\_info&products\\_id=354](http://www.vogelmanufacturing.com/store/index.php?main_page=product_info&products_id=354).



**Εικόνα 1.3.6** Ελαστομερή ελατήρια σκληρότητας 90 Shore A, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε κοπτικά και διαμορφωτικά καλούπια καθώς και οπουδήποτε απαιτείται ασφαλής συσπείρωση ή εκτόνωση. Εικόνα προερχόμενη από την ηλεκτρονική σελίδα [http://www.europarts.gr/product2\\_gr.html](http://www.europarts.gr/product2_gr.html).

Τα ελαστομερή, όπως προαναφέρθηκε, είναι πολυμερή υλικά με μέτρο ελαστικότητας (γραμμικό) μεταξύ 1 και 500 MPa και χαρακτηρίζονται από μεγάλες τροπές κάτω από ένταση. Ιδιαίτερης τεχνολογικής σημασίας είναι ελαστικά που κατασκευάζονται από λατέξ και μπορεί να περιέχουν μεγάλο εύρος από πρόσθετα (κάρβουνο, πυρίτιο, λάδια, καολίνη κλπ). Οι ελαστικές ιδιότητες αυτών των υλικών επιτυγχάνονται από την διασύνδεση των μορίων τους, για παράδειγμα με βουλκανισμό από θείο, σε υψηλές θερμοκρασίες (πλέον των 150 °C) και κάτω από πίεση. Εφαρμογές αυτών των υλικών περιλαμβάνουν ελαστικά τροχοφόρων, ελατήρια, έδρανα, μεμβράνες, λεπίδες, σωληνώσεις, ιμάντες μεταφοράς, σφραγίσματα, σωλήνες κλπ, καθώς και χρησιμοποιούνται ευρέως σε αυτοκίνητα, αεροπλάνα, σφραγιστικά συστήματα, κτήρια, γέφυρες, σιδηρόδρομοι, καλώδια και ιατρικά όργανα. Σημαντικές μηχανικές ιδιότητες των ελαστομερών είναι ότι (α) παραμορφώνονται με σχεδόν ασυμπίεστο τρόπο (ουσιαστικά ο συντελεστής Poisson τείνει στην τιμή 0.5) και (β) είναι ισότροπα. Τα ελαστικά είναι ισότροπα και ασυμπίεστα υλικά. Η μηχανική συμπεριφορά τέτοιων υλικών, για παράδειγμα όταν αυτά υποβάλλονται σε δοκιμή διεύθυνσης, περιλαμβάνει μεγάλες γεωμετρικές αλλαγές του αρχικού σχήματος των δειγμάτων και έντονη μη γραμμική συμπεριφορά μεταξύ δύναμης και παραμόρφωσης με την επιβολή φόρτισης. Τέτοια συμπεριφορά μπορεί

να χαρακτηριστεί ως υπερελαστική, σύμφωνα με τους Treloar (1975), Holzapfel (2000) και πολλοί άλλοι. Τα ελαστομερή δοκίμια χρησιμοποιούνται συχνά για τη μελέτη μαλακών ιστών, Fung (1993). Η ακαμψία των ιστών συσχετίζεται με την ηλικία τους καθώς και με παθολογικά φαινόμενα, Anderson (1953). Για παράδειγμα, ορισμένοι καρκινικοί ιστοί έχει βρεθεί ότι είναι 3-7 φορές πιο άκαμπτοι συγκρινόμενοι με τους υγιείς ιστούς, Krouskop et al. (1998). Οι μηχανικές δοκιμές μαλακών ιστών αποτελούν μία φοβερή πρόκληση για έναν πειραματιστή, Miller (2005). Μεγάλος αριθμός μαλακών ιστών συχνά υποβάλλεται σε δοκιμή θλίψης. Τέτοιου είδους μέθοδοι συνθέτουν την αποκαλούμενη ελαστογραφία. Πρόκειται για μία τεχνική η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα σε κλινικές, έτσι ώστε να διερευνηθούν οι μηχανικές ιδιότητες των μαλακών ιστών.

Η θλιπτική διείδυση σε επιφάνειες μαλακών ιστών εφαρμόζεται συχνά για να λάβουμε την απεικόνιση μίας λεπτής «φέτας» ιστού χρησιμοποιώντας ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων σε κατάλληλα πειραματικά αποτελέσματα, Srinivasan et al. (2004), Hayes et al. (1972) και Kauer et al. (2002). Παρόλα αυτά όμως αποτελεί μερική και όχι γενική λύση του προβλήματος. Τα hydrogels αποκρίνονται ελαστικά σε μέτριες παραμορφώσεις και ακολουθούν την ελαστική θεωρία των ελαστικών του Treloar (1975) και σύμφωνα με την ανασκόπηση του Peppas et al. (2000).

Επιπρόσθετα, η μηχανική συμπεριφορά των έμβιο-φίλμς εξαρτάται από τη σύσταση και την πυκνότητα της βιομάζας. Η αδρανής βιομάζα συσχετίζεται με υψηλή ελαστική σταθερά γύρω στα 240 Pa, ενώ η ενεργή βιομάζα συσχετίζεται με τη χαμηλότερη ελαστική σταθερά γύρω στα 10 Pa, Stoodley et al. (1999).

Η έμβιο-λειτουργικότητα των κυττάρων συσχετίζεται με τις μηχανικές τους ιδιότητες. Για παράδειγμα σύμφωνα με τους Cross et al. (2008), σε αντιλογία με τους Krouskop et al. (1998), έχει βρεθεί ότι η ακαμψία των μεταστατικών καρκινικών κυττάρων είναι 78% χαμηλότερη συγκρινόμενη με τα υγιή κύτταρα. Οι ιδιότητες των κυττάρων μπορούν να υπολογισθούν τοπικά εφαρμόζοντας ένα ατομικό μικροσκόπιο (AFM), που αποτελεί το μικρότερο εργαλείο σε δοκιμή διείδυσης, Mathur et al. (2001). Οι AFM έρευνες μπορούν να φανούν χρήσιμες για να μελετηθεί η παθολογία των κυττάρων, Costa (2003). Έτσι λοιπόν, οποιοσδήποτε παράγοντας επηρεάζει την μικροδομή των κυττάρων μπορεί να αλλάζει τις μηχανικές τους ιδιότητες. Για παράδειγμα οι Lekka et al. (1999) μελέτησαν την ανθρώπινη κύστη των επιθήλιων κυττάρων εφαρμόζοντας τη μέθοδο AFM και προέκυψε τελικά ότι τα φυσιολογικά κύτταρα διαθέτουν μέτρο ελαστικότητας μία τάξη μεγέθους υψηλότερη από τα αντίστοιχα καρκινικά. Οι Kuznetsova et al. (2007) έδωσε μία καλή ανασκόπηση των αποτελεσμάτων σχετικά με τα αποτελέσματα των μετρήσεων του μέτρου ελαστικότητας για διάφορους τύπους ζώντων θηλαστικών κυττάρων σύμφωνα με τη μέθοδο AFM, όπου το εύρος των μετρήσεων κυμαίνεται από 0.1 kPa έως 400 kPa. Οι μετρήσεις σύμφωνα με το πρότυπο AFM είναι βασισμένες στη διείδυση των κυττάρων, τα οποία είναι σταθερά τοποθετημένα πάνω σε ένα υπόστρωμα. Η μέθοδος

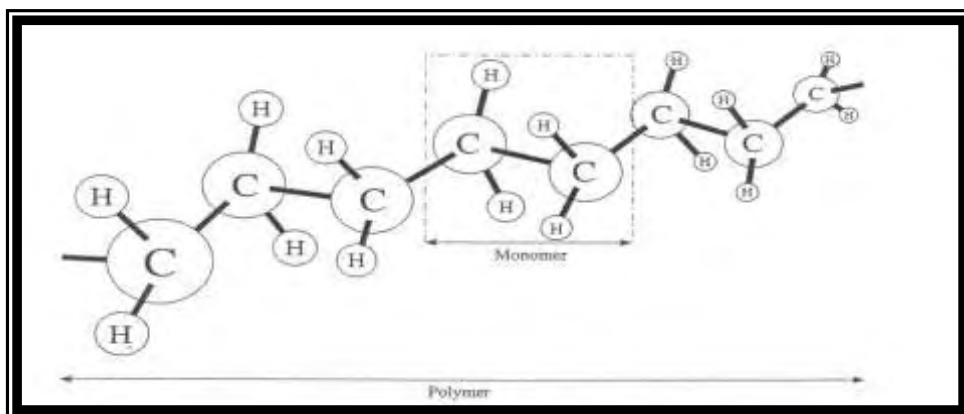
AFM είναι ακόμη αποτελεσματική για τη μελέτη των μηχανικών ιδιοτήτων των κυττάρων κατά τη διάρκεια πρόσφυσης των κυττάρων.

Προς το παρόν, ο έλεγχος σε σκληρότητα των ελαστομερών βασίζεται στο πείραμα Shore που χρησιμοποιεί το durometer (ένας σκληρυμένος διεισδυτής συνδεδεμένος με ένα καλά ρυθμισμένο ελατήριο ακριβείας, ένα δείκτη βάθους και ένα επίπεδο υποπόδιο). Η κατά Shore σκληρότητα είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 100, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, που δεν έχει καμία προφανή συσχέτιση με κάποια θεμελιώδη μηχανική ιδιότητα του υλικού (π.χ. μέτρο ελαστικότητας, μονοαξονική απόκριση τάσης-τροπής κλπ). Οι μέθοδοι πειραματισμού Shore καθορίζονται από διάφορους κανονισμούς, π.χ. ASTM D 2240, DIN 53505 κλπ. Τα ελαστομερή έχουν αριθμούς σκληρότητας Shore μεταξύ 30 και 90. Είναι καλά τεκμηριωμένο ότι οι μηχανικές ιδιότητες των ελαστομερών προσομοιώνεται επαρκώς από την υπερελαστικότητα (Green and Adkins, 1970; Ogden, 1984). Σύμφωνα με την υπερελαστικότητα, η μηχανική παραμόρφωση των ελαστομερών περιγράφεται από μια επιλογή μοντέλων τα οποία είναι ακριβή μέχρι κάποιο όριο εκτατότητας, με τα απλούστερα μοντέλα να αντιστοιχούν σε χαμηλά επίπεδα εκτατότητας. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι υπερελαστικά μοντέλα εξυπηρετούν καλά την περιγραφή συγκεκριμένων βιο-υλικών, συμπεριλαμβανομένου και του DNA (Fung, 1993). Αυτό δεν εκπλήσσει ιδιαίτερα, διότι τα οργανικά μόρια των βιο-υλικών είναι κυρίως μακρές αλυσίδες από άτομα κάρβουνου και υδρογόνου συνδεδεμένα με δεσμούς υδρογόνου (Treloar, 1975).

### **1.3.1 Δομή, σύσταση και μηχανικές ιδιότητες των ελαστομερών υλικών**

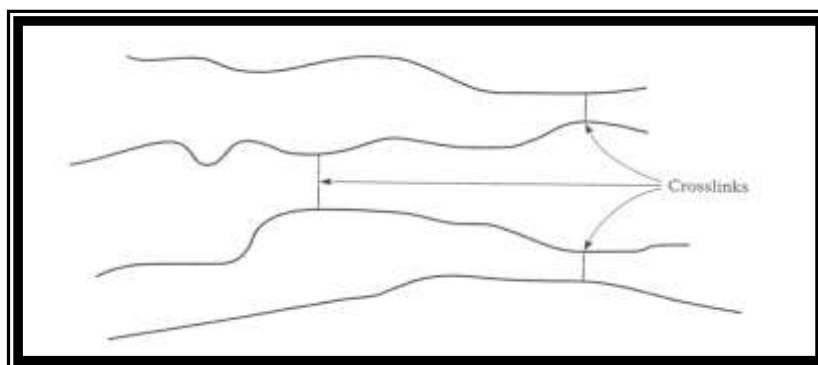
Τα υλικά αυτά έχουν την ιδιαιτερότητα ότι μπορούν να εμφανίσουν μεγάλη αντοχή σε συνδυασμό με μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς να χάνουν την ελαστικότητά τους. Η ικανότητά τους αυτή βασίζεται στην μοριακή τους σύσταση και δομή. Η μοριακή τους δομή αποτελείται από ενώσεις άνθρακα, που ενώνονται με μορφή αλυσίδας, η οποία μπορεί να περιέχει χιλιάδες άτομα. Από αυτές τις μακριές αλυσίδες ατόμων έχουν πάρει και το όνομα πολυμερή (πολλά μέρη). Τα πολυμερή χτίζονται από μικρότερες μονάδες που ονομάζονται μονομερή. Η ικανότητα των αλυσίδων αυτών να περιστρέφονται μεταξύ τους, σε συνδυασμό με το μεγάλο μοριακό τους βάρος χαρίζει σ' αυτά τα υλικά μεγάλη ικανότητα παραμόρφωσης. Στα πραγματικά πολυμερή δεν αντιδρούν όλες οι αλυσίδες σε μια επιβαλλόμενη τάση. Ορισμένες από αυτές είναι συνδεδεμένες μόνο στο ένα τους άκρο και δεν συνεισφέρουν τίποτα στην ελαστικότητα. Αυτές ονομάζονται τερματικά τμήματα (terminal sections), σε αντίθεση στα κυρίως τμήματα (principal sections) που είναι ενωμένα και στα δυο τους άκρα, Strong (1996).





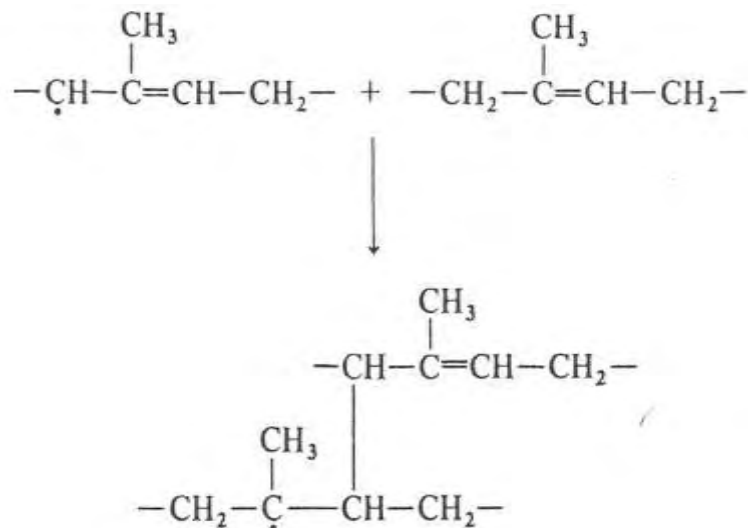
**Εικόνα 1.3.1.1** Τρισδιάστατη απεικόνιση των μονομερών του Αιθυλενίου, τα οποία σχηματίζουν μια αλυσίδα (Πολυαιθυλένιο).

Οι αλυσίδες αυτές με την σειρά τους συγκρατούνται μεταξύ τους μέσω δεσμών που ονομάζονται cross-links. Τα cross-links δημιουργούνται μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται curing ή βουλκανισμός (vulcanization).

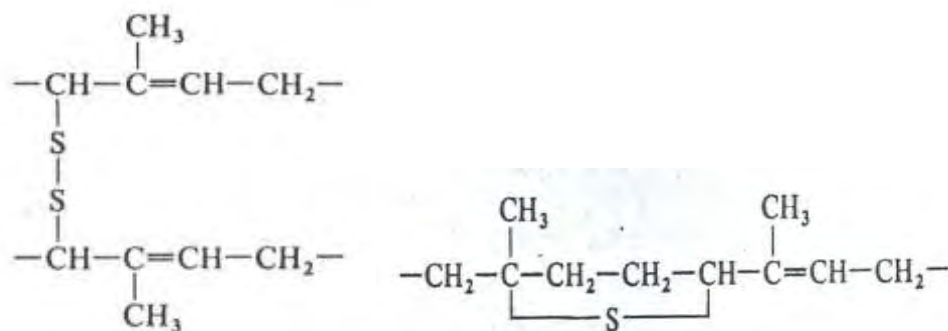


**Εικόνα 1.3.1.2** Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται οι δεσμοί cross-links μεταξύ των αλυσίδων.

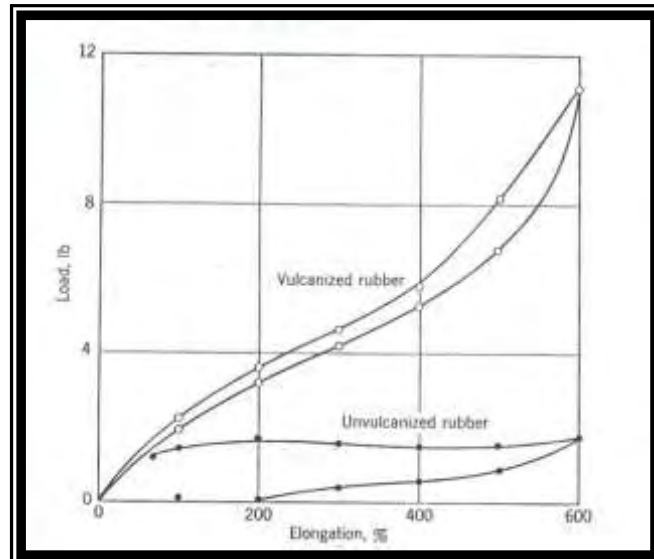
Ο βουλκανισμός σαν διαδικασία πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Goodyear, ο οποίος πραγματοποίησε πειράματα στα οποία θέρμανε το ελαστικό μαζί με μικρές ποσότητες θειούχων (sulfur). Από τότε έχει διαπιστωθεί ότι ούτε η θερμότητα, ούτε τα θειούχα είναι απαραίτητα για τον βουλκανισμό. Για παράδειγμα, η ακτινοβολία επιδρά στον βουλκανισμό (Charlesby, 1960). Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ενώσεων που μπορεί να βουλκανίσει ένα ελαστικό. Οι ενώσεις αυτές χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες, τους οξειδωτικούς παράγοντες (σελήνιο, οργανικά υπεροξειδία του υδρογόνου, νιτρικές ενώσεις) και δημιουργούς ελεύθερης ρίζας (ενώσεις αζώτου, διάφοροι επιταχυντές). Από χημική άποψη ο βουλκανισμός χωρίζεται σε δυο κύριες κατηγορίες, βουλκανισμός με θειούχα και βουλκανισμός χωρίς θειούχα. Στο μη-θειούχο βουλκανισμό μια ελεύθερη ρίζα αποσπά ένα άτομο υδρογόνου ενός μονομερούς και στην συνέχεια επιτίθενται σ' ένα διπλό δεσμό στην αλυσίδα του πολυμερούς δημιουργώντας έτσι τα cross-links.



Ο θειούχος βουλκανισμός μπορεί να συμβεί με διάφορους τρόπους. Παρακάτω περιγράφονται ορισμένοι τρόποι δημιουργίας των cross-links.



Τονίζεται εδώ ότι η διαδικασία του βουλκανισμού επιφέρει δραστικές αλλαγές στις ιδιότητες του υλικού. Στην πραγματικότητα, μετά το πέρας της διαδικασίας αυτής το υλικό αποκτά όλες τις γνωστές του ιδιότητες σε ικανοποιητικό βαθμό, έτσι ώστε να γίνει ελκυστικό και χρήσιμο για διάφορες εφαρμογές. **Έτσι από την σκοπιά των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού ο βουλκανισμός μπορεί να οριστεί ως η διαδικασία η οποία μειώνει την ροή (flow), δηλαδή τις μεγάλης κλίμακας ανεξέλεγκτες παραμορφώσεις του πολυμερούς, αυξάνει την εφελκυστική του αντοχή και το μέτρο ελαστικότητας καθώς και προσδίδει σ' αυτά πλήρως ελαστική συμπεριφορά μετά την αποφόρτιση.** Η βελτίωση των επιδόσεων του υλικού για ένα κύκλο φόρτισης-αποφόρτισης δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.

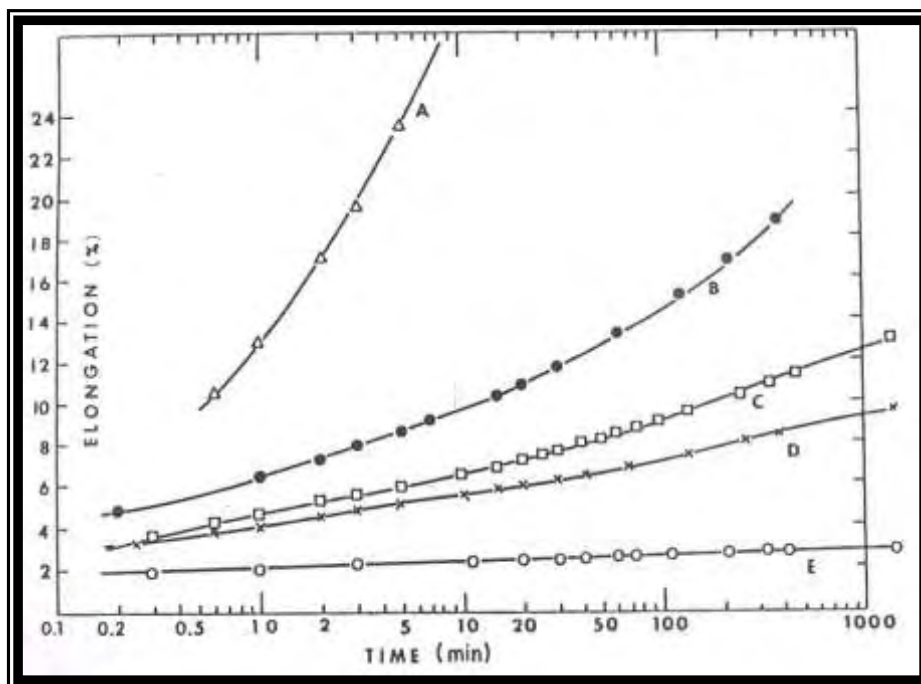


**Εικόνα 1.3.1.3** Τυπικές (σιγμοειδείς) καμπύλες τάσεως-παραμόρφωσης για βουλκανισμένο και μη βουλκανισμένο ελαστικό, για φόρτιση με επιμήκυνση έως 600% και αποφόρτιση, Billmeyer (1962).

Η συνεισφορά των δεσμών cross-link είναι μεγάλη και στο φαινόμενο του ερπυσμού, καθώς επηρεάζουν όχι μόνο την παραμόρφωση λόγω ερπυσμού αλλά και το ρυθμό ανάπτυξης του ερπυσμού. **Γενικά όσο αυξάνει το πλήθος των δεσμών αυτών τόσο τείνει ο ερπυσμός να εξαλειφθεί.**

Όπως θα δειχθεί αργότερα, είναι σημαντικό στοιχείο το πώς ακριβώς αλλάζει καμπυλότητα η σιγμοειδής καμπύλη απόκρισης μονοαξονικού εφελκυσμού. Η αύξηση των δεσμών μεταξύ των μακρομορίων ενισχύει την επιρροή της δεύτερης αναλλοίωτης τροπών.



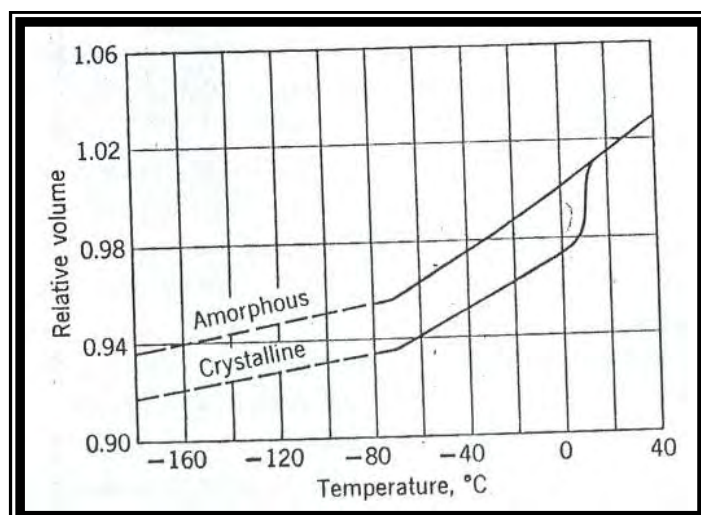


**Εικόνα 1.3.1.4** Επίδραση του ερπυσμού στο ελαστικό SBR στους 24 °C σε συσχετισμό με τον αριθμό των θεσμών cross-link. A-Uncrosslinked, B-lightly crosslinked, C-moderately crosslinked, D-moderately crosslinked, E-highly crosslinked, Nielsen (1974).

Μια επιπλέον κατεργασία ενίσχυσης των υλικών αυτών, αφού έχει γίνει ο βουλκανισμός, είναι η εισαγωγή στο μείγμα (stock) του υλικού ορισμένων παραγόντων που ονομάζονται βελτιωτικά πρόσθετα (reinforcing fillers). Ο πιο συνηθισμένος τέτοιος παράγοντας είναι το κάρβουνο (carbon black). Η δομή αυτών των παραγόντων είναι σφαιρική και τείνει να δημιουργεί ενώσεις μορφής αλυσίδας. Το υλικό που προκύπτει έχει ακόμα πιο βελτιωμένες ιδιότητες όσον αφορά, την εφελκυστική αντοχή (η αύξηση μπορεί να φτάσει το 40%), την ακαμψία (stiffness), την αντίσταση σε απόσχιση (tear resistance) και την αντίσταση στο γδάρισμα (abrasion resistance). Η παραπάνω διαδικασία βελτίωσης ονομάζεται «οπλισμός» (reinforcement) και βοηθά στην αύξηση της «ζωής» ενός ελαστικού υλικού που χρησιμοποιείται π.χ. σε μεταφορικούς ιμάντες και στο πέλμα των πάσης φύσεως ελαστικών τροχών. Σημειώνουμε ότι το ποσοστό βελτίωσης των παραπάνω μηχανικών ιδιοτήτων εξαρτάται από την αυξομείωση τριών παραγόντων: από το μέγεθος των σωματιδίων κάρβουνου, το pH τους και την δομή αυτών.

Μια άλλη σημαντική παράμετρος είναι η θερμοκρασία στην οποία ένα ελαστικό αποκτά την ευθραυστότητα ενός γυαλιού (glass transition temperature)  $T_g$ . Αυτό που συμβαίνει στην θερμοκρασία αυτή και γενικά για θερμοκρασίες  $T < T_g$  είναι ότι ο ρυθμός εξάπλωσης του όγκου του υλικού μειώνεται (όπως διακρίνεται στο σχήμα που ακολουθεί), οπότε μειώνεται και ο ελεύθερος χώρος μεταξύ των πολυμερών. Τότε αυτά αδυνατούν να αποκτήσουν σχετική μετακίνηση και άρα το υλικό δεν μπορεί πια να δεχτεί μεγάλες παραμορφώσεις και γίνεται εύθραυστο

(χαρακτηριστικό μετάβασης από εντροπική σε ενθαλπική ελαστικότητα). Στην κατάσταση αυτή η όποια παραμορφωσιμότητα είναι αποτέλεσμα όχι μεγάλης κλίμακας μοριακής μετακίνησης αλλά μετακίνησης ατόμων ενάντια στους τοπικούς περιορισμούς. Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι για τα συμπιεστά ελαστικά υλικά πρέπει να χρησιμοποιούνται πάντα σε θερμοκρασίες  $T > T_g$ .



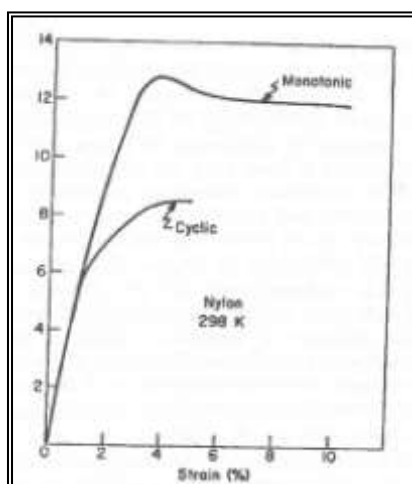
**Εικόνα 1.3.1.5** Η μεταβολή του όγκου φυσικού ελαστικού (natural rubber) σε σχέση με την θερμοκρασία (ισχύει ότι  $T_g = -70^\circ\text{C}$ ), Billmeyer (1962).

### 1.3.2 Χρήσιμες εφαρμογές της ανάλυσης

Στην παρούσα εργασία ερευνάται η σφαιρική και κωνική διείδυση ενός ασυμπίεστου ελαστομερούς υλικού. Εκπονήθηκε ένα εκτεταμένο πειραματικό πρόγραμμα με σφαιρικούς αλλά και κωνικούς διεισδυτές με κυκλική αιχμή. Τα πειράματα αυτά, δεικνύουν ότι η απόκριση σε διείδυση είναι πιο άκαμπτη από αυτήν που προβλέπει η γραμμική ελαστικότητα. Προτείνονται πειραματικές διατάξεις και μεθοδολογία εκτίμησης ελαστικών ιδιοτήτων ασυμπίεστων ελαστομερών υλικών. Εφαρμογές της προτεινόμενης μεθοδολογίας περιλαμβάνουν μελέτη ελαστικών σε διάφορες συνθήκες θερμοκρασίας, ακτινοβολίας, στάθμης κόπωσης, βαθμού βουλκανισμού, κτλ. Τα αποτελέσματα είναι χρήσιμα στον έλεγχο ιδιοτήτων στερεών τροφίμων και στη διάγνωση μη υγιών ιστών σε ανθρώπους και άλλων έμβιων όντων.

Το πείραμα της διείδυσης έχει άμεση εφαρμογή στον τομέα του ποιοτικού ελέγχου των υλικών αυτών. Το μοντέλο που προτείνεται μπορεί να αποτελέσει την βάση μιας μετρητικής μηχανής που θα προσδιορίζει το αρχικό μέτρο ελαστικότητας, το οποίο μπορεί να συνδεθεί με πολλές άλλες χημικές και φυσικές ιδιότητες των ελαστομερών. Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στους παραγωγούς ελαστικών ως ένα επιπλέον εργαλείο στον γρήγορο προσδιορισμό των ιδιοτήτων του παραγόμενου υλικού.

Άλλες εφαρμογές των υλικών αυτών είναι τα ελαστικά των οχημάτων, μεταφορικοί ιμάντες, καλώδια κτλ. Ένα κοινό πρόβλημα όλων των παραπάνω εφαρμογών είναι ότι το υλικό βρίσκεται κάτω από ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Αυτό το είδος της φόρτισης μπορεί να οδηγήσει σε κόπωση του υλικού μέσω ενός φαινομένου που ονομάζεται softening και επηρεάζει τον καταστατικό νόμο του υλικού (όπως απεικονίζεται παρακάτω). Πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι αν η ανακυκλιζόμενη φόρτιση δεν ξεπερνά μια ορισμένη τάση το φαινόμενο αυτό δεν θα συμβεί (άπειροι κύκλοι φόρτισης).



**Εικόνα 1.3.2.1** Μεταβολή του καταστατικού νόμου  $\sigma_{xx}$  MPa του Νάιλον λόγω ανακυκλιζόμενης φόρτισης – φαινόμενο softening, Rabinowitz and Beardmore (1974).

Σε προβλήματα τέτοιου είδους, εάν η ανακυκλιζόμενη φόρτιση δρα ως διείσδυση κάποιας μορφής, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την παρούσα ανάλυση στον προσδιορισμό της τάσης που θα εξασφάλιζε αντοχή σε κόπωση. Μια προφανής εφαρμογή θα ήταν η διερεύνηση του συσχετισμού μεταξύ του φαινομένου αυτού και της διαφοροποίησης της απόκρισης του υλικού στο πείραμα της διείσδυσης πριν και μετά την κόπωση σαν συνάρτηση του αριθμού των κύκλων φόρτισης.

Όσον αφορά τα ελαστικά των αυτοκινήτων, χρήσιμα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν από το πείραμα του κωνικού διεισδυτή. Εάν θεωρήσουμε ότι ένα οποιοδήποτε μικροαντικείμενο (π.χ. ένα χαλίκι) μπορεί να θεωρηθεί τοπικά σαν ένας κώνος ή σφαίρα μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα καινούριο κριτήριο σχεδιασμού των ελαστικών τροχοφόρων συστημάτων.

Μια άλλη εφαρμογή των αποτελεσμάτων είναι ο τομέας της έμβιο-μηχανικής (bio-engineering). Το ανθρώπινο σώμα αποτελείται και αυτό κυρίως από δεσμούς άνθρακα και υδρογόνου και συμπεριφέρεται σε καλή προσέγγιση υπερελαστικά (Fung, 1993). Η μηχανική της επαφής με τα δάκτυλα έχει πολλά να διδάξει στην Ρομποτική. Καρκινογόνοι ιστοί είναι 3-5 φορές πιο άκαμπτοι από τους υγιείς ιστούς. Μεγαλύτερη

ακαμψία έχουν και οι ιστοί σε άτομα που πάσχουν από διαβήτη. Μαλακοί ιστοί, όπως αυτοί του εγκεφάλου, του συκωτιού, των νεφρών κ.α. μπορούν να περιγραφούν από το μοντέλο Mooney-Rivlin με ίσες σταθερές. Το πείραμα της διείδυσης μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να αποτελέσει διαγνωστικό εργαλείο στις ανωτέρω περιπτώσεις (ελαστογραφία).

Το πείραμα της διείδυσης εμφανίζει μεγάλη χρησιμότητα και σε υλικά που χαρακτηρίζονται ως βιομεμβράνες ή biofilms. Η βιομεμβράνη (biofilm) αποτελεί μορφή μικροβιακής διαβίωσης και συνίσταται από μια πολύπλοκη συσσώρευση μικροοργανισμών. Οι βιομεμβράνες χαρακτηρίζονται συχνά από ικανότητα να προσφύονται σε επιφάνειες, να διαθέτουν δομική ετερογένεια, γενετική ποικιλία, πολύπλοκες ενδοκοινωνιακές αλληλεπιδράσεις και μια εξωκυτταρική μήτρα πολυμερών ουσιών, που λέγεται γλυκοκάλυκας (glycocalyx).

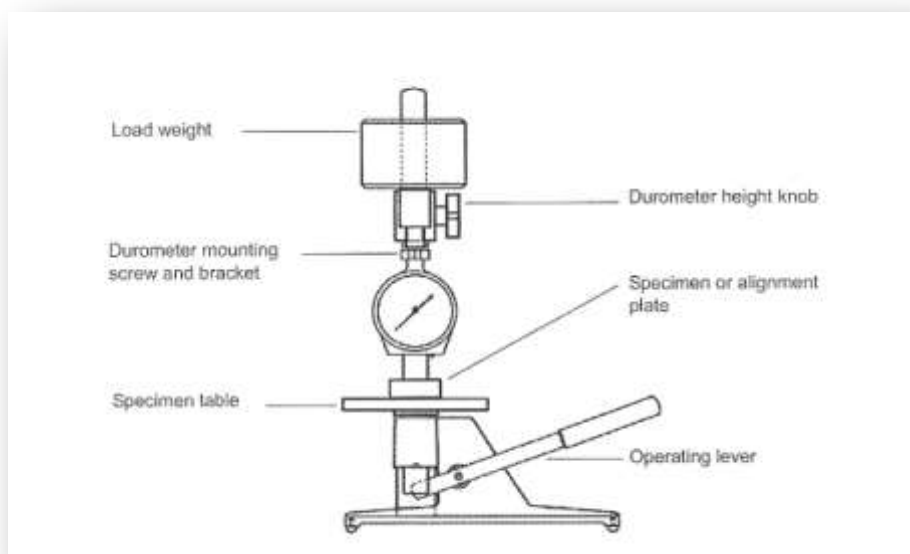
Ο σχηματισμός των βιομεμβρανών αρχίζει με την προσκόλληση των ελεύθερα αιωρούμενων μικροοργανισμών σε μια επιφάνεια. Αυτές οι πρώτες αποικίες προσκολλώνται στην επιφάνεια αρχικά μέσω ασθενών και αναστρέψιμων δυνάμεων van der Waals . Αν οι άποικοι δεν αποσπαστούν αμέσως από την επιφάνεια, στην οποία έχουν προσκολληθεί, τότε μπορούν να προσφύθουν μόνιμα στην επιφάνεια χρησιμοποιώντας μόρια κυτταρικής συγκόλλησης, όπως είναι οι βακτηριδιακές τρίχες (pili). Οι πρώτοι άποικοι διευκολύνουν την άφιξη και άλλων κυττάρων παρέχοντας ποικιλότερες περιοχές πρόσφυσης και αρχίζοντας τη δόμηση της μήτρας που εξασφαλίζει τη συνοχή της βιομεμβράνης. Μερικά είδη μικροοργανισμών δεν είναι ικανά να προσκολληθούν σε μια επιφάνεια μόνα τους . Είναι όμως ικανά να προσκολληθούν στη μήτρα της βιομεμβράνης ή άμεσα σε προηγούμενους αποίκους. Από τη στιγμή που έχει αρχίσει η δημιουργία της αποικίας η βιομεμβράνη αυξάνεται μέσω ενός συνδυασμού κυτταρικής διαίρεσης και συσσώρευσης των μικροοργανισμών.

Οι βιομεμβράνες συνήθως ανευρίσκονται σε συμπαγή υποστρώματα ή εκτίθενται σε μερικά υδατικά διαλύματα, αν και μπορούν να σχηματιστούν ως επιπλέοντα κουβάρια σε υδατικές επιφάνειες. Εφόσον εξασφαλιστούν επαρκείς πηγές τροφοδοσίας για ανάπτυξη, οι βιομεμβράνες αναπτύσσονται ταχέως και γίνονται μακροσκοπικά ορατά. Οι βιομεμβράνες μπορεί να περιέχουν πολλούς διαφορετικούς τύπους μικροοργανισμών, π.χ. βακτηρίδια, αρχαιοβακτηρίδια, πρωτόζωα, και άλγες. Κάθε ομάδα μικροοργανισμών εκτελεί εξειδικευμένες μεταβολικές λειτουργίες.

## 1.4 Σκληρομέτρηση με συσκευή Shore κλίμακας O

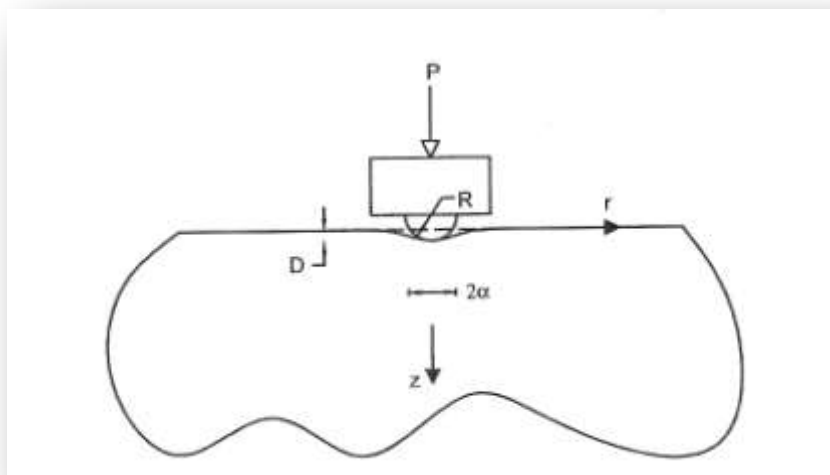
Για τον υπολογισμό της σκληρότητας μαλακών δοκιμίων χρησιμοποιείται ευρύτατα το σκληρόμετρο Shore. Για την μέτρηση των διαφόρων δειγμάτων υπάρχουν συνολικά 12 κλίμακες Shore, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, με 7 διαφορετικούς τύπους διεισδυτών. Ανάλογα με το είδος του υλικού, που είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί η σκληρότητα του, χρησιμοποιείται και η κατάλληλη για το πείραμα κλίμακα Shore.

Για την μέτρηση της σκληρότητας μαλακών ελαστικών, αλλά και υλικών με μέτρια πυκνότητα επιλέγεται σκληρόμετρο Shore κλίμακας O. Υλικά τα οποία μπορούν να μετρηθούν με το όργανο τύπου O είναι ακόμη το τεχνητό μετάξι, το orlon και το nylon. Η σκληρομέτρηση κατά Shore ακολουθεί το πρότυπο ASTM D 2240. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να επιβάλλει ο διεισδυτής, μέσω του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου, αντιστοιχεί σε 821 γραμμάρια. Ο διεισδυτής, που είναι ενσωματωμένος στη συσκευή τύπου O, διαθέτει σφαιρική αιχμή με ακτίνα 0.0468 inch. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι κλίμακες Shore DO, O, OO διαθέτουν διεισδυτές με την ίδια αιχμή ως προς το σχήμα, αλλά και το μέγεθος της ακτίνας. Με τη χρήση του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις σκληρότητας για το υλικό S/ N 120974 Blue XO, για το ελαστικό πάχους 11 χιλιοστών και το ελαστικό G&T, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζονται τα διάφορα συστατικά του σκληρόμετρου Leverloader Model LR κλίμακας O, που επιλέχθηκε για τον προσδιορισμό της σκληρότητας μαλακών ελαστικών.



**Εικόνα 1.4.1** Στην παραπάνω εικόνα φαίνονται τα κυριότερα μέρη που συνθέτουν την συσκευή Leverloader Model LR κλίμακας O. Το σκληρόμετρο

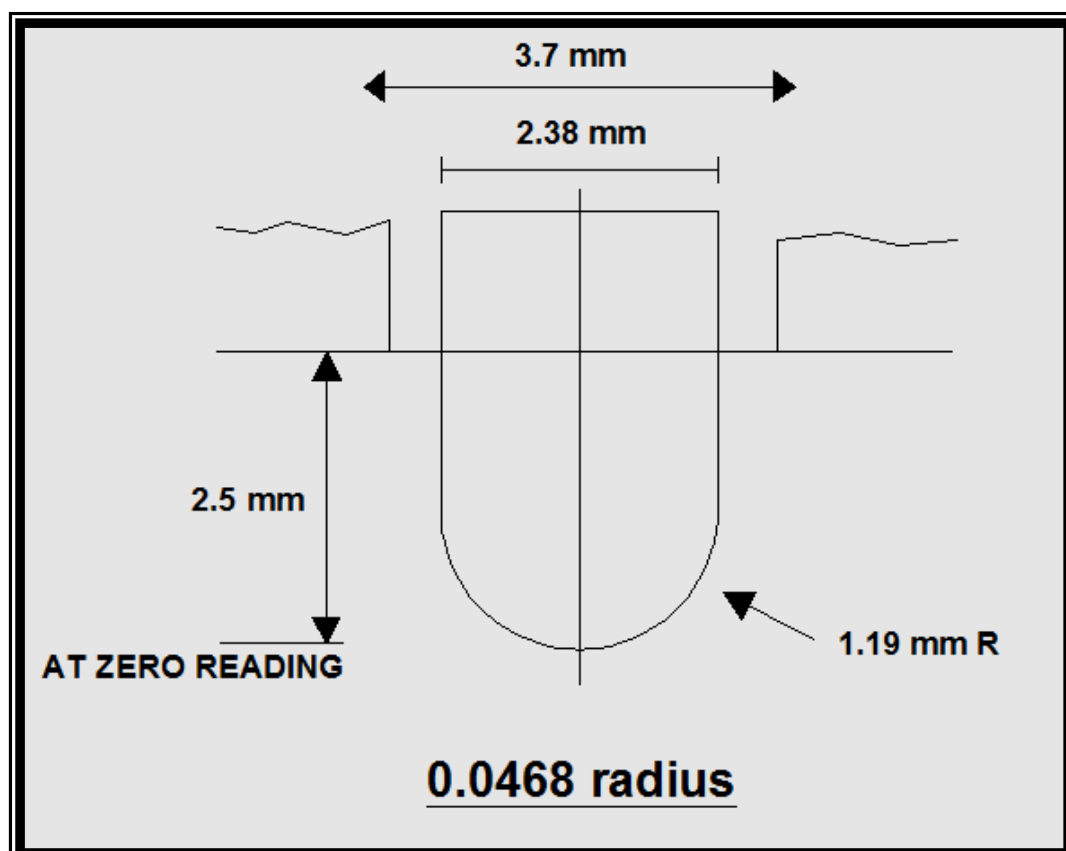
αποτελείται από ένα επιπλέον βάρος στο ανώτερο τμήμα του. Το επιπρόσθετο αυτό φορτίο τοποθετείται σε περίπτωση που το υπό δοκιμή υλικό είναι αρκετά σκληρό και για την υλοποίηση της μέτρησης απαιτείται επιπλέον φορτίο. Κατεβαίνοντας, διακρίνεται το κουμπί που καθορίζει την ακριβή θέση του διεισδυτή του οργάνου ανάλογα με το ύψος του επιθυμητού δείγματος, ο κοχλίας ή διαφορετικά το «στήριγμα» του σκληρόμετρου, η κυκλική αναλογική οθόνη, το «τραπέζι» του δείγματος καθώς και ο μοχλός λειτουργίας του οργάνου στο κατώτερο τμήμα. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [www.shoreinstruments.com](http://www.shoreinstruments.com).



**Εικόνα 1.4.2** Σχηματική απεικόνιση του προβλήματος διείσδυσης με τη χρήση σφαιρικού διεισδυτή. Διακρίνεται ο ελαστικός ημίσφαιρος που αποκαλείται εναλλακτικά και δείγμα. Για την υλοποίηση της σκληρομέτρησης ο σφαιρικός διεισδυτής τύπου Shore O εισχωρεί με σταθερή ταχύτητα στο υπό δοκιμή υλικό, μετρώντας την ικανότητα του δείγματος να αντισταθεί στη διείσδυση. Στο σχήμα με  $P$  συμβολίζεται το κατακόρυφο φορτίο που επιβάλλεται και το οποίο προκαλεί τη διείσδυση στο «σώμα», με  $R$  παριστάνεται η ακτίνα του άκαμπτου κυκλικού διεισδυτή, με  $D$  το βάθος διείσδυσης μέσα στο υλικό, με  $a$  η ακτίνα επαφής μεταξύ του αιχμηρού σώματος και του δείγματος πάντοτε σε περίπτωση επαφής καθώς και με  $(r,z)$  οι αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες. Το παραπάνω σχήμα προέρχεται από τη δημοσίευση των Α.Ε. Giannakopoulos και Α. Triantafyllou (2007).

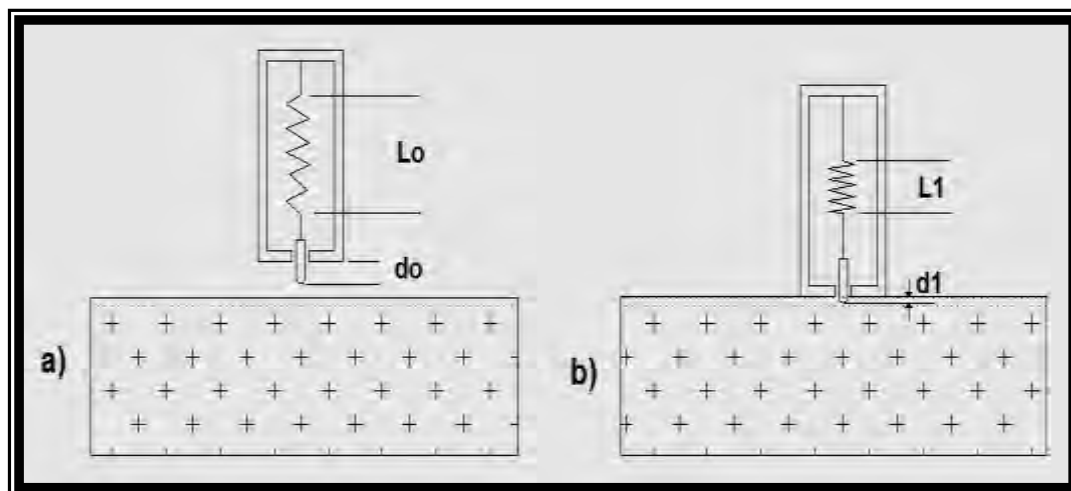
## 1.5 Σκληρομέτρηση ελαστικού με κωδικό S/ N Blue XO με συσκευή Shore O εφαρμόζοντας στο δείγμα τη μέγιστη δύναμη του οργάνου και τη μεθοδολογία του Hertz

Για την σκληρομέτρηση χρησιμοποιήθηκε αναλογικό σκληρόμετρο Shore με διεισδυτή τύπου O και επιλέχθηκε ελαστομερές υλικό με κωδικό S/ N 120974 Blue XO Durometer, του οποίου οι ιδιότητες είναι γνωστές από την εταιρία Shore, με στόχο την επαλήθευσή τους για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Ειδικότερα, το σκληρόμετρο που επιλέχθηκε για την πραγματοποίηση των πειραμάτων αποτελείται από ένα σφαιρικό διεισδυτή τύπου O, με ακτίνα διεισδυτή ίση με 1.19 χιλιοστά, που είναι κατάλληλος να εισχωρεί σε επιφάνειες ελαστομερών, όπως είναι τα μαλακά λάστιχα καθώς και υλικά με μέτρια πυκνότητα, όπως είναι για παράδειγμα το τεχνητό μετάξι. Ακολουθούν σχήματα, στα οποία αρχικά διακρίνεται με ακρίβεια η γεωμετρία του διεισδυτή κλίμακας O, ενώ στη συνέχεια απεικονίζεται ο μηχανισμός λειτουργίας του σκληρόμετρου Shore.



**Σχήμα 1.5.1** Στην εικόνα διακρίνεται η γεωμετρία, υπό κλίμακα, του διεισδυτή τύπου O που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του πειράματος, ο οποίος εφαρμόζεται κυρίως σε μαλακά λάστιχα και σε υλικά που έχουν μέτρια πυκνότητα ανάλογη με εκείνη τεχνητών υφασμάτων όπως είναι το τεχνητό

μετάξι (rayon), το orlon και το nylon. Ο διεισδυτής είναι σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240, ενώ η μέγιστη δύναμη με την οποία μπορεί να εισχωρήσει στο εκάστοτε υλικό ισούται με 821 gr, η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη ένδειξη του σκληρόμετρου Shore, δηλαδή  $S = 100$ .



**Σχήμα 1.5.2** Σχηματική απεικόνιση του μηχανισμού λειτουργίας του σκληρόμετρου Shore. Αρχικά παριστάνεται το σκληρόμετρο πριν τη διείδυση στο υλικό, όπου το ελατήριο παραμένει απαραμόρφωτο (εικόνα a), ενώ στη συνέχεια ο διεισδυτής του σκληρόμετρου έχει εισχωρήσει μέσα στην επιφάνεια του δείγματος (εικόνα b). Ειδικότερα, το μήκος  $L_0$  συμβολίζει το ελεύθερο μήκος του βαθμονομημένου ελατηρίου, το  $d_0$  παριστάνει την απόσταση μεταξύ της αιχμής του διεισδυτή και της χαμηλότερης επιφάνειας του επίπεδου «ποδιού» και σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240  $d_0 = 2.5 \text{ mm}$  για σκληρόμετρο Shore κλίμακας O, ενώ το  $d_1$  συμβολίζει το βάθος  $h$  σε κατάσταση πλήρους φορτίσεως.

Κατά τη διάρκεια υλοποίησης του πειράματος, με τη βοήθεια της κυκλικής οθόνης του οργάνου (η συσκευή που χρησιμοποιήθηκε χαρακτηρίζεται ως αναλογική), μετρήθηκε ο συντελεστής Shore. Το πλήθος των μετρήσεων πραγματοποιήθηκε σε πέντε σημεία πάνω στην επιφάνεια του δείγματος και οι τιμές της σκληρότητας  $S$  που προέκυψαν για το υπό δοκιμή υλικό είναι οι ακόλουθες:

- ✓  $S = 65.0$
- ✓  $S = 65.4$
- ✓  $S = 66.0$
- ✓  $S = 66.0$
- ✓  $S = 66.0$

Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν εμφανίζουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους, εκφράζοντας με τον τρόπο αυτό την αξιοπιστία της πειραματικής διαδικασίας. Η μέση τιμή της σκληρότητας κατά Shore ισούται με  $S_m = \frac{65.0 + 65.4 + 66.0 + 66.0 + 66.0}{5} = 65.68$ . Γενικά, η σκληρότητα κατά



Shore μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τη σχέση  $S = \frac{2.5 - h(mm)}{0.025}$ , όπου

γνωρίζοντας την τιμή του S, προερχόμενη από τις μετρήσεις, και αντικαθιστώντας τη σκληρότητα στην παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το βάθος διείσδυσης h, μετρούμενο σε χιλιοστά. **Στην περίπτωση που η τιμή του S γίνει ίση με τη μέγιστη ένδειξη της οθόνης του σκληρόμετρου, δηλαδή S = 100, τότε το μετρούμενο υλικό μπορεί να χαρακτηριστεί ως τέλεια άκαμπτο!**

### 1.5.1 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού S/ N Blue XO

Χρησιμοποιώντας λοιπόν, τις μετρήσεις της σκληρότητας κατά Shore, όπως αυτές προέκυψαν από τη διαδικασία της σκληρομέτρησης, τη μέγιστη τιμή της δύναμης του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου  $P_{\max}$  που ισούται με 821 gr και την τιμή της ακτίνας του διεισδυτή  $r = 1.19$  mm, που είναι γνωστά από τη γεωμετρία του διεισδυτή κλίμακας O, είναι επιθυμητό να βρεθεί το μέτρο διάτμησης G καθώς και το μέτρο ελαστικότητας E.

Αρχικά, γίνεται μετατροπή της δύναμης σε μονάδες Newton όπου  $P_{\max} = 821 \text{ gr} = 0.821 \text{ kg} = 0.821 \cdot 9.81 \approx 8.05 \text{ N}$ . Επιπλέον, η μέση τιμή του  $S_m = 65.68$  είναι γνωστή, αφού υπολογίστηκε προηγουμένως.

Αντικαθιστώντας την τιμή του  $S_m$  στη σχέση  $S = \frac{2.5 - h(mm)}{0.025}$  προκύπτει η

τιμή του βάθους  $h \approx 0.858 \text{ mm}$ . Θεωρητικά για το βάθος ισχύει η σχέση  $h = \alpha \varepsilon$ . Επίσης, ισχύει η σχέση  $\varepsilon = \frac{\alpha}{r}$ , έτσι κάνοντας αντικατάσταση στην

προηγούμενη προκύπτει ότι  $h = \frac{a^2}{r} \Rightarrow a = \sqrt{hr} = 1.01 \text{ mm}$ . **Η ακτίνα**

**επαφής a σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζεται από τη σχέση του Hertz και είναι αρκετά κοντά στην τιμή του  $r = 1.19 \text{ mm}$ !**

Για τη μέγιστη δύναμη  $P_{\max}$  εφαρμόζεται η σχέση του Hertz  $P = \frac{16}{3} a^2 \varepsilon G$ .

Επιλύοντας ως προς το μέτρο διάτμησης G η σχέση μετατρέπεται ως εξής  $G = \frac{3P_{\max} r}{16a^3} = 1.74 \text{ N/mm}^2$ , ενώ το μέτρο ελαστικότητας γνωρίζουμε

ότι προκύπτει από τη σχέση  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , όπου ο λόγος Poisson ισούται

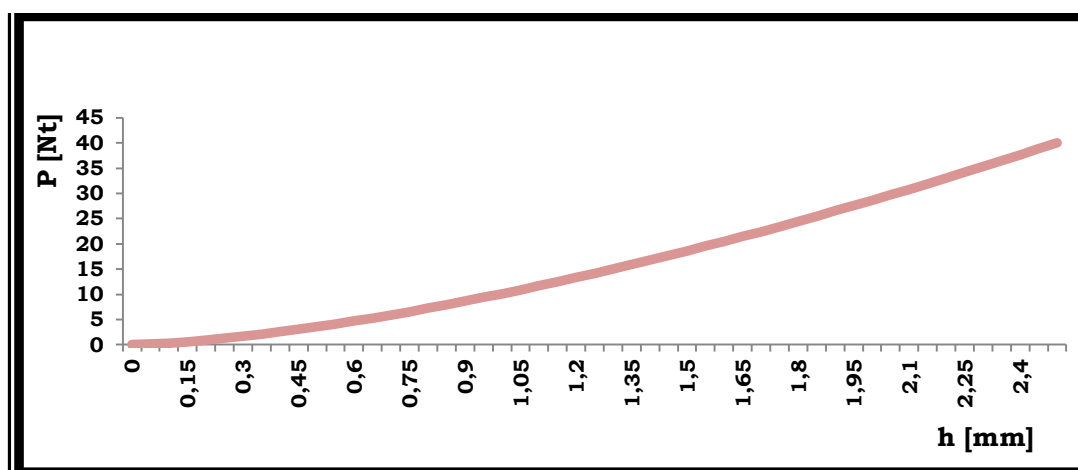
με  $\nu = \frac{1}{2}$  για ασυμπίεστο υλικό. Με αντικατάσταση των παραπάνω συμπεραίνεται ότι  $E = 2G(1+\nu) = 5.22 \text{ N/mm}^2$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας τη μέγιστη τιμή της δύναμης λαμβάνεται η μέγιστη τιμή του μέτρου ελαστικότητας που θα μπορούσε να έχει το μετρούμενο υλικό!

Θεωρώντας γνωστή λοιπόν, την τιμή του μέτρου διάτμησης, όπως αυτή προέκυψε παραπάνω για το ελαστομερές υλικό S/ N 120974 Blue XO Durometer, λαμβάνεται το διάγραμμα δύναμης P και βάθους

διείσδυσης  $h$ . Για την εύρεση του διαγράμματος που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τιμές:

- ✓ ακτίνα διεισδυτή  $r = 1.19 \text{ mm}$
- ✓ μέτρο διάτμησης  $G = 1.74 \text{ N/mm}^2$
- ✓ μέγιστη δύναμη ελατηρίου  $P = 8.05 \text{ N}$
- ✓ βάθος διείσδυσης  $h = 0.858 \text{ mm}$

Με αντικατάσταση των σχέσεων λαμβάνεται ο τύπος  $P = \frac{16}{3} h^{3/2} r^{1/2} G$ . Το μέγεθος  $h$  κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $h = 0-2.5 \text{ mm}$  για τις τιμές της σκληρότητας  $S = 100$  και  $0$  αντίστοιχα, όπως προκύπτει κάνοντας χρήση της σχέσης  $S = \frac{2.5 - h(\text{mm})}{0.025}$ .

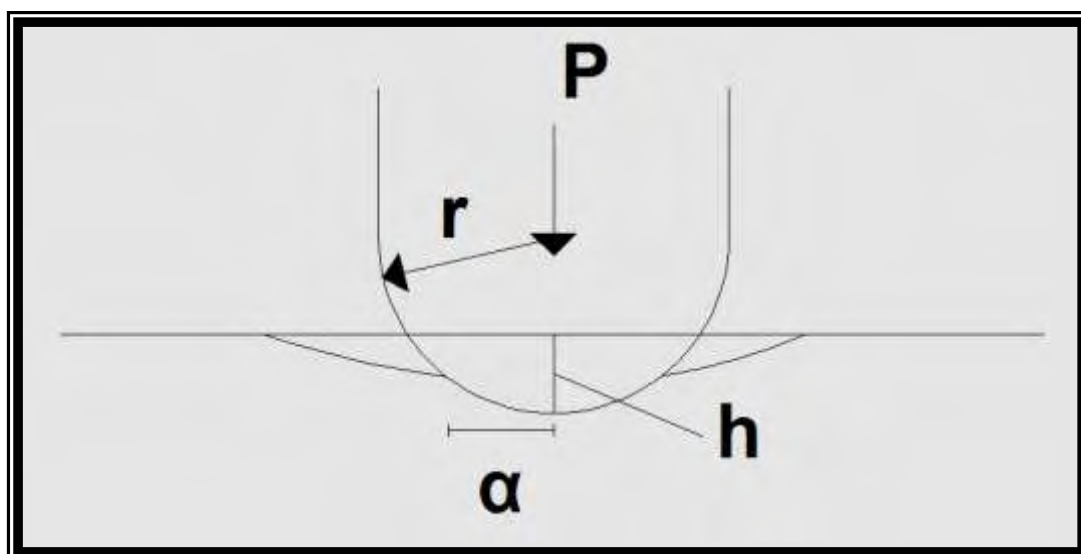


**Γράφημα 1.5.1.1** Στο διάγραμμα φαίνεται η σχέση των μεγεθών  $P$  και  $h$ . Πρόκειται για μη γραμμική γεωμετρία του διεισδυτή που εφαρμόζεται σε σκληρόμετρα Shore κλίμακας  $O$ . Η μη γραμμικότητα του διεισδυτή του οργάνου τύπου  $O$  φαίνεται και από την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου για την εν λόγω κλίμακα σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240, όπως θα δειχθεί σε επόμενα κεφάλαια. Η μέγιστη τιμή του βάθους διείσδυσης σε αυτή την περίπτωση ισοδυναμεί με  $h = 2.5 \text{ mm}$  και αντιστοιχεί στην τιμή της δύναμης  $P = 40 \text{ N}$ .

## 1.6 Σκληρομέτρηση ελαστικών δοκιμίων με συσκευή Shore O εφαρμόζοντας στο δείγμα τη μέγιστη δύναμη του οργάνου και τη μεθοδολογία του Hertz

Για τη σκληρομέτρηση με συσκευή Shore κλίμακας O επιλέχθηκε υλικό ελαστομερές και συγκεκριμένα υλικό που βρίσκει εφαρμογή στα ελαστικά των αυτοκινήτων. Το πάχος του δοκιμίου H ισούται με 11 χιλιοστά και είναι επαρκές για τη σκληρομέτρηση κάνοντας χρήση συσκευών τέτοιου τύπου, με την προϋπόθεση ότι το ελάχιστο πάχος του υλικού, για το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η σκληρότητα με συσκευή Shore τύπου O είναι 6.4 χιλιοστά.

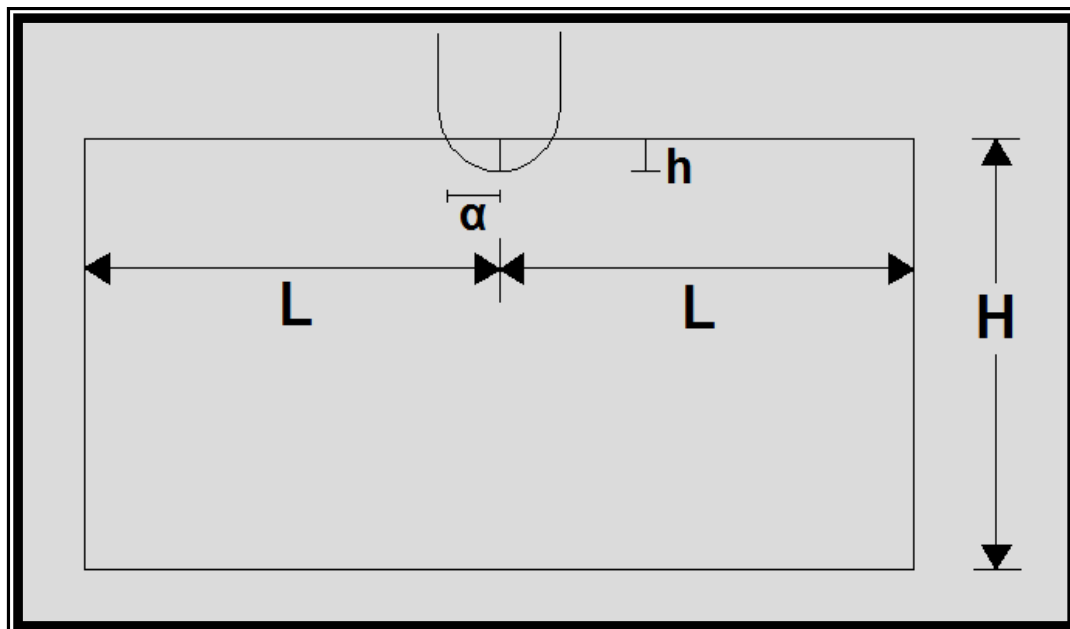
Για την αποφυγή της επιρροής του συνόρου του δοκιμίου στα αποτελέσματα πρέπει να ισχύει η σχέση  $\frac{\alpha}{H} \leq \frac{1}{10}$  (1.1), όπου με  $\alpha$  συμβολίζεται η ακτίνα επαφής του σφαιρικού διεισδυτή με το υλικό, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 1.6.1** Στο σχέδιο παριστάνεται ο σφαιρικός διεισδυτής ακτίνας  $r$  του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O, ο οποίος εισχωρεί σε μαλακό υλικό, με δύναμη εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου ίση με  $P$ , προκαλώντας έτσι στην επιφάνεια του δείγματος βάθος διεισδυσης ίσο με  $h$  και ακτίνα επαφής ίση με  $\alpha$ .

Για να εφαρμοστεί το πρόβλημα της κλασσικής διείσδυσης (contact) πρέπει ακόμη να ισχύει η ανισότητα  $\alpha < r$  (1.2), διαφορετικά εμφανίζεται το φαινόμενο της διάτρησης (penetration), όπου καταστρέφεται ουσιαστικά η επιφάνεια του δοκιμίου και το δείγμα δεν ενδείκνυται για περαιτέρω πειράματα. Επιπλέον, όπως παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα για την αποφυγή του φαινομένου της διάτρησης

πρέπει να ισχύει και ο περιορισμός (1.3)  $(3-7)\alpha < H$ , όπου με  $H$  συμβολίζεται το πάχος του υλικού μέσα στο οποίο εισάγεται ο διεισδυτής.



**Σχήμα 1.6.2** Στο σχήμα παρατηρείται η γεωμετρία του υλικού που υποβάλλεται στη δοκιμή σκληρομέτρησης. Για να αποφευχθεί το φαινόμενο της διάτρησης, πρέπει η τιμή της ακτίνας επαφής  $\alpha$  σε σχέση με το πάχος  $H$  του υλικού να υπακούει στους περιορισμούς που προαναφέρθηκαν. Το φαινόμενο της διάτρησης δεν είναι επιθυμητό, εφόσον καταστρέφεται η επιφάνεια του υπό δοκιμή υλικού και τα αποτελέσματα που λαμβάνονται είναι αναξιόπιστα.

Στο πείραμα που πραγματοποιήθηκε μετρήθηκε η σκληρότητα κατά Shore σε διαφορετικά σημεία της επιφάνειας του δείγματος και προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

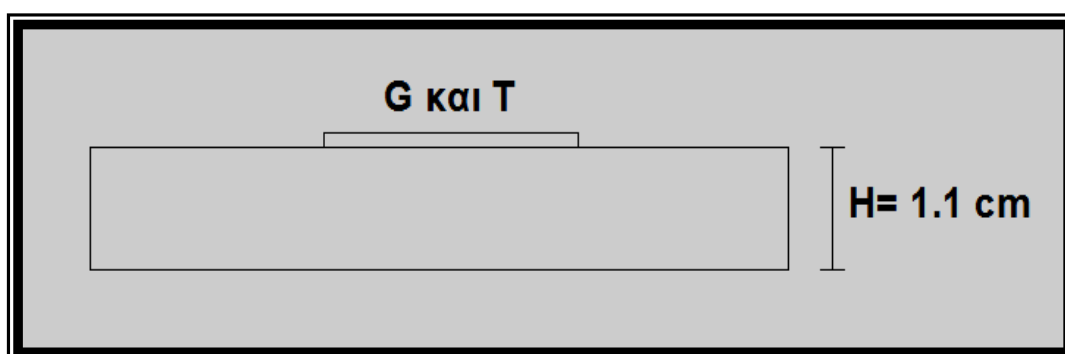
- ✓  $S = 79.0$
- ✓  $S = 79.5$
- ✓  $S = 79.5$
- ✓  $S = 79.5$

Το πλήθος των μετρήσεων επιλέχθηκε ίσο με τέσσερα. Για την ακρίβεια των πειραματικών αποτελεσμάτων το πλήθος των μετρήσεων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με τρία. Παρατηρείται, και σε αυτή την περίπτωση, ότι οι τιμές δεν εμφανίζουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους, εκφράζοντας έτσι την αξιοπιστία της πειραματικής διαδικασίας. Η μέση τιμή της σκληρότητας Shore ισούται με

$$S_m = \frac{79.0 + 79.5 + 79.5 + 79.5}{4} = 79.375.$$

Στη συνέχεια, πάνω στο προηγούμενο ελαστομερές επικάθεται υλικό δοκίμιο, που έχει τις ιδιότητες του ελαστικού και ονομάζεται G&T. Το δοκίμιο G&T, για το οποίο γνωρίζουμε τις μηχανικές ιδιότητες,

κατασκευάστηκε από τους Giannakopoulos και Triantafyllou (2007). Παρατηρώντας την εικόνα φαίνεται το πολύ λεπτό, πυκνό «στρώμα» του υλικού. Έτσι, εξαιτίας του ανεπαρκούς πάχους του δοκιμίου η τιμή της σκληρότητας λαμβάνεται με διαφορετικό τρόπο, σε σχέση με το προηγούμενο υλικό. Στην περίπτωση αυτή, το λεπτό δοκίμιο τοποθετείται πάνω σε ένα υλικό επαρκούς πάχους, με γνωστές ιδιότητες, όπως απεικονίζεται παρακάτω. Ο τρόπος αυτός, αποτελεί μία μέθοδο για να ληφθεί η σκληρότητα του υλικού G&T. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο εμπόριο υπάρχουν συσκευές που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση πολύ λεπτών δοκιμίων, όπως είναι το σκληρόμετρο shore κλίμακας M που θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια.



**Σχήμα 1.6.3** Στο σχέδιο απεικονίζεται το ελαστομερές υλικό πάχους 11 χιλιοστών, που χρησιμοποιείται ως υπόστρωμα, έχοντας επαρκές πάχος και γνωστές ιδιότητες, πάνω στο οποίο επικάθεται στη συνέχεια ένα ακόμη υλικό ονομαζόμενο G&T, που εμφανίζει παρόμοιες ιδιότητες. Έπειτα από μετρήσεις της σκληρότητας κατά Shore, συμπεραίνεται ότι τα δύο δοκίμια είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό και χαρακτηρίζονται ως ελαστικά.

Το δοκίμιο G&T υποβλήθηκε σε πείραμα σκληρομέτρησης και προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα όσον αφορά τη σκληρότητα:

- ✓ S = 78.0
- ✓ S = 78.0
- ✓ S = 77.5
- ✓ S = 77.0

Και σε αυτή την περίπτωση πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις σε τέσσερα διαφορετικά σημεία της επιφάνειας του δοκιμίου, ενώ για ακόμη μία φορά οι τιμές των πειραμάτων δεν εμφανίζουν αποκλίσεις μεταξύ τους. Η μέση τιμή της σκληρότητας κατά Shore ισούται με  $S_m = \frac{78.0 + 78.0 + 77.5 + 77.0}{4} = 77.625$ . **Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλες οι διεισδύσεις επανήλθαν πλήρως και δεν παρατηρήθηκε καμία μόνιμη παραμόρφωση!**

### 1.6.1 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστικών δοκιμίων

Γνωρίζοντας λοιπόν, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του διεισδυτή τύπου O, που χρησιμοποιήθηκε για τη σκληρομέτρηση, προκύπτει ότι η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο δοκίμιο ισούται με  $P_{\max} = 821 \text{ gr} = 0.821 \text{ kg}$  καθώς και η ακτίνα του κυκλικού διεισδυτή είναι ίση με  $r = 1.19 \text{ mm}$ . Για την εύρεση του βάθους διείδουσης χρησιμοποιείται ο τύπος που συνδέει τη σκληρότητα  $S$  με τη βύθιση  $h$  και δίνεται από τη σχέση  $S = \frac{2.5 - h(\text{mm})}{0.025}$ , όπου το  $S$  είναι αδιάστατος αριθμός που

κυμαίνεται μεταξύ του μηδέν (0) και του εκατό (100). Η τιμή μηδέν αντιστοιχεί στην ελάχιστη σκληρότητα, που μπορεί να καταγράψει η αναλογική οθόνη του οργάνου, ενώ η σκληρότητα 100 ισούται με τη μέγιστη τιμή που μπορεί να εμφανιστεί.

Στην περίπτωση που παρατηρείται ελάχιστη διείδουση, δηλαδή όταν  $h = 0$  προκύπτει τιμή  $S = 100$ , η σκληρότητα κατά Shore εμφανίζει τη μέγιστη τιμή της. Αντίθετα, στην περίπτωση που η σκληρότητα κατά Shore είναι ελάχιστη, δηλαδή  $S = 0$ , προκύπτει ότι το βάθος διείδουσης  $h \approx 2.5 \text{ mm}$ . Έτσι λοιπόν, επιλύοντας την ανωτέρω εξίσωση και γνωρίζοντας το  $S$  από τη μέτρηση, μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή του βάθους διείδουσης  $h$ . Με τη διαδικασία αυτή προκύπτει ένα σημείο της καμπύλης φορτίσεως. Στη συνέχεια, παρατίθενται οι σχέσεις του Hertz με στόχο την εύρεση ορισμένων μεγεθών. Τα μεγέθη αυτά, αποτελούν τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού και μπορούν να χαρακτηρίσουν με σχετική ακρίβεια το δείγμα.

Το βάθος διείδουσης σύμφωνα με τον Hertz δίνεται από τη σχέση  $h = \alpha \varepsilon$ , όπου με  $\alpha$  συμβολίζεται η ακτίνα επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του υλικού, ενώ η τιμή του  $\varepsilon$  δίνεται από τον τύπο  $\varepsilon = \frac{\alpha}{r}$  και είναι, όπως προκύπτει από τον τύπο, αδιάστατο μέγεθος. Η δύναμη  $P$  που επιβάλλεται στο διεισδυτή, διαμέσου του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου, δίνεται από τη σχέση  $P = \frac{16}{3} a^2 \varepsilon G$ , όπου με  $G$  παριστάνεται το

μέτρο διατμήσεως. Το μέτρο διατμήσεως ισούται με  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , όπου με

$E$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας και με  $\nu$  ο λόγος του Poisson, που είναι ίσος με  $\nu = 1/2$  στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού.

Έτσι, κάνοντας χρήση των τιμών  $S$ , όπως αυτές προέκυψαν σε κάθε πείραμα, της μέγιστης τιμής  $P_{\max} = 821 \text{ gr}$  και της ακτίνας  $r = 1.19 \text{ mm}$  του διεισδυτή (δεδομένα που προκύπτουν από τη γεωμετρία του διεισδυτή), επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο διάτμησης  $G$  καθώς και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  για τα ελαστομερή υλικά.

Αρχικά, για το πρώτο υλικό, είναι γνωστό το πάχος του ελαστομερούς ίσο με  $H = 11 \text{ mm}$ . Για να αποφευχθεί η επιρροή του συνόρου, κατά τη διάρκεια του πειράματος, πρέπει να ισχύει η σχέση

$\frac{\alpha}{H} \leq \frac{1}{10}$ , όπου αντικαθιστώντας την τιμή του  $H$  προκύπτει η μέγιστη τιμή  $\alpha_{\max}=1.1 \text{ mm}$ . Σε περίπτωση που παρατηρηθεί υπέρβαση αυτής της τιμής υπάρχει επιρροή του συνόρου. Η μέγιστη δύναμη ισούται με  $P_{\max} = 821 \text{ gr} = 0.821 \text{ kg} = 0.821 \cdot 9.81 \approx 8.05 \text{ Nt}$ . Υπολογίστηκε προηγουμένως η μέση τιμή του  $S_m=79.375$ . Αντικαθιστώντας λοιπόν, την τιμή του  $S_m$  στη σχέση  $S = \frac{2.5-h(mm)}{0.025}$  προκύπτει η τιμή του βάθους  $h \approx 0.516 \text{ mm}$ . Θεωρητικά για το βάθος ισχύει η σχέση  $h = \alpha \varepsilon$ . Επίσης, ισχύει η σχέση  $\varepsilon = \frac{\alpha}{r}$ , έτσι κάνοντας αντικατάσταση στην προηγούμενη προκύπτει ότι  $h = \frac{a^2}{r} \Rightarrow a = \sqrt{hr} = 0.784 \text{ mm} < \alpha_{\max} = 1.1 \text{ mm} < r = 1.19 \text{ mm}$ . Επομένως δεν υπάρχει επιρροή του συνόρου!

Για τη μέγιστη δύναμη  $P_{\max}$  ισχύει η σχέση του Hertz  $P = \frac{16}{3} a^2 \varepsilon G$ .

Επιλύοντας ως προς το μέτρο διάτμησης  $G$  προκύπτει  $G = \frac{3P_{\max}r}{16a^3} = 3.73$

$\text{Nt/mm}^2$ . Το μέτρο ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , ενώ

ο λόγος Poisson ισούται με  $\nu = \frac{1}{2}$  για ασυμπίεστο υλικό. Με αντικατάσταση των παραπάνω συμπεραίνεται ότι  $E = 2G(1+\nu) = 11.19 \text{ Nt/mm}^2$ .

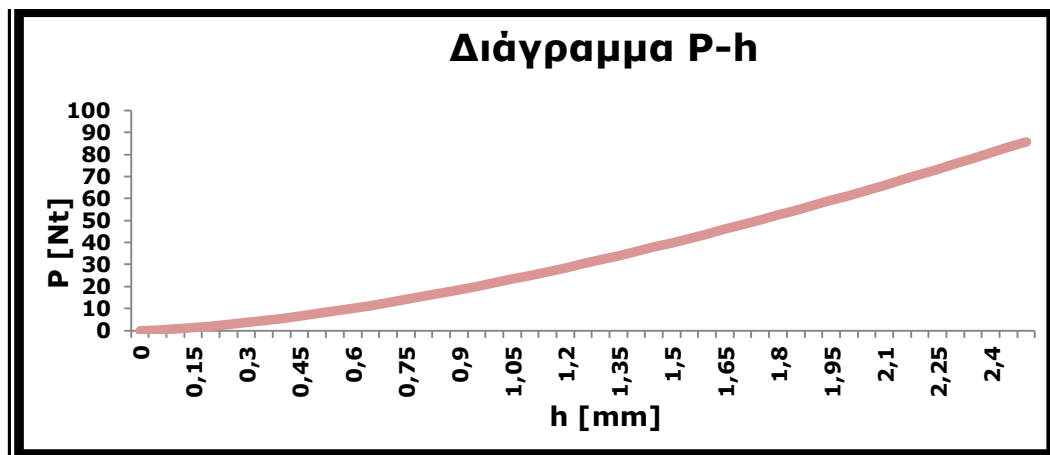
Η τιμή του  $E$ , που προκύπτει, αντιστοιχεί στη μέγιστη δύναμη  $P$  και είναι μεγαλύτερη της κανονικής τιμής εξαιτίας της οριακά μικρής διαφοράς των τιμών  $a$  και  $r$ . Για να ληφθεί καλύτερη τιμή του  $E$  πρέπει το  $a$  να είναι αρκετά μικρότερο του  $r$ .

Θεωρώντας γνωστή λοιπόν, την τιμή του μέτρου διάτμησης, όπως αυτή προέκυψε παραπάνω για το συγκεκριμένο ελαστομερές, λαμβάνεται το διάγραμμα δύναμης ελατηρίου  $P$  και βάθους διείδυσης  $h$ . Για την εύρεση του διαγράμματος χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τιμές:

- ✓ ακτίνα διείδυτη  $r = 1.19 \text{ mm}$
- ✓ μέτρο διάτμησης  $G = 3.73 \text{ N/mm}^2$
- ✓ μέγιστη δύναμη ελατηρίου  $P = 8.05 \text{ N}$
- ✓ βάθος διείδυσης  $h = 0.516 \text{ mm}$

Με αντικατάσταση των σχέσεων λαμβάνεται ο τύπος  $P = \frac{16}{3} h^{3/2} r^{1/2} G$ . Το μέγεθος  $h$  κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $h = 0-2.5 \text{ mm}$  για τις τιμές  $S$  ίσες με 100 και 0 αντίστοιχα, κάνοντας χρήση της σχέσης  $S = \frac{2.5-h(mm)}{0.025}$ .

.



**Γράφημα 1.6.1.1** Στο διάγραμμα απεικονίζεται η σχέση των μεγεθών  $P$ ,  $h$ . Πρόκειται για μη γραμμική γεωμετρία του διεισδυτή. Η μη γραμμικότητα του διεισδυτή του οργάνου τύπου Ο φαίνεται και από την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου για την εν λόγω κλίμακα σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240, όπως θα δειχθεί σε επόμενα κεφάλαια. Η μέγιστη τιμή του βάθους διείσδυσης είναι ίση με  $h = 2.5 \text{ mm}$  και αντιστοιχεί στην τιμή της δύναμης  $P = 86 \text{ N}$ .

Όπως προαναφέρθηκε, η παραπάνω καμπύλη προέρχεται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ελαστομερούς υλικού πάχους 11 χιλιοστών. Παρόλα αυτά όμως, η ίδια καμπύλη αντιστοιχεί και για το ελαστικό G&T, για το οποίο τα αποτελέσματα είναι παρόμοια.



## 1.7 Διόρθωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων εφαρμόζοντας τη σχέση της δύναμης $P$ σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240 (Boyce et al.)

Για τον προσδιορισμό της επιβαλλόμενης δύναμης του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O, που εφαρμόζεται διαμέσου του βαθμονομημένου ελατηρίου στο διεισδυτή του οργάνου και που αποσκοπεί στον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας ενός μαλακού υλικού, το οποίο υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση, χρησιμοποιείται η εξίσωση που εμπεριέχεται στο πρότυπο ASTM D 2240 και αναφέρεται και στη δημοσίευση της Boyce et al. (2003). Όπως θα δειχθεί παρακάτω, η εφαρμογή της εν λόγω εξίσωσης δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα, σε σχέση με αυτά που λαμβάνονται κάνοντας χρήση της μέγιστης δυνατής δύναμης του ελατηρίου του οργάνου που δίνεται στις προδιαγραφές του και μάλιστα πολύ κοντά στα πραγματικά.

Έτσι λοιπόν, κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων σκληρότητας  $S$ , όπως αυτές προέκυψαν σε κάθε πείραμα και θεωρώντας δεδομένη την ακτίνα του διεισδυτή που χρησιμοποιήθηκε, δηλαδή  $r=1.19$  mm, είναι επιθυμητό να βρεθεί το μέτρο διάτμησης  $G$  καθώς και το μέτρο ελαστικότητας  $E$ . Το μέγεθος της δύναμης του εσωτερικού ελατηρίου της συσκευής κλίμακας O δίνεται από την εξίσωση  $P=0.55+3(2.5-h)$  σύμφωνα με το πρότυπο ASTM D 2240.

Εφαρμόζοντας λοιπόν, την εξίσωση που συμπεριλαμβάνεται στη δημοσίευση της Boyce et al.  $P=0.55+3(2.5-h)$  για σκληρόμετρα Shore κλίμακας O και γνωρίζοντας το βάθος διείσδυσης  $h \approx 0.516$  mm για το ελαστικό πάχους 11 χιλιοστών από τη σχέση  $S = \frac{2.5-h(mm)}{0.025}$ , προκύπτει με αντικατάσταση στην εξίσωση η τιμή της δύναμης  $P=6.5$  N. Έτσι, κάνοντας εφαρμογή των σχέσεων  $G = \frac{3P_{\max}r}{16\alpha^3}$  και  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  το μέτρο διάτμησης  $G$  ισούται με  $G=3$  N/ mm<sup>2</sup> και το μέτρο ελαστικότητας  $E=9$  N/ mm<sup>2</sup>. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του μέτρου ελαστικότητας είναι αρκετά ικανοποιητική. **Η μέθοδος αυτή δίνει καλύτερα αποτελέσματα, συγκριτικά με την προηγούμενη, στην οποία η τιμή της δύναμης που εφαρμόζεται λαμβάνεται ίση με τη μέγιστη δυνατή δύναμη που μπορεί να επιβάλλει το εσωτερικό ελατήριο του οργάνου στο διεισδυτή και κατ' επέκταση στο υπό δοκιμή υλικό.**

Αντίστοιχα, πραγματοποιείται παρόμοια διαδικασία για τον υπολογισμό της δύναμης  $P$  με στόχο την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού G&T. Πρόκειται για ένα ακόμη ελαστομερές υλικό, που κατασκευάστηκε από τους Giannakopoulos, Triantafyllou (2007), για το οποίο βρέθηκε η μέση τιμή του συντελεστή Shore  $S_m=77.625$ . Κάνοντας χρήση του τύπου  $S = \frac{2.5-h(mm)}{0.025}$  για σκληρόμετρο

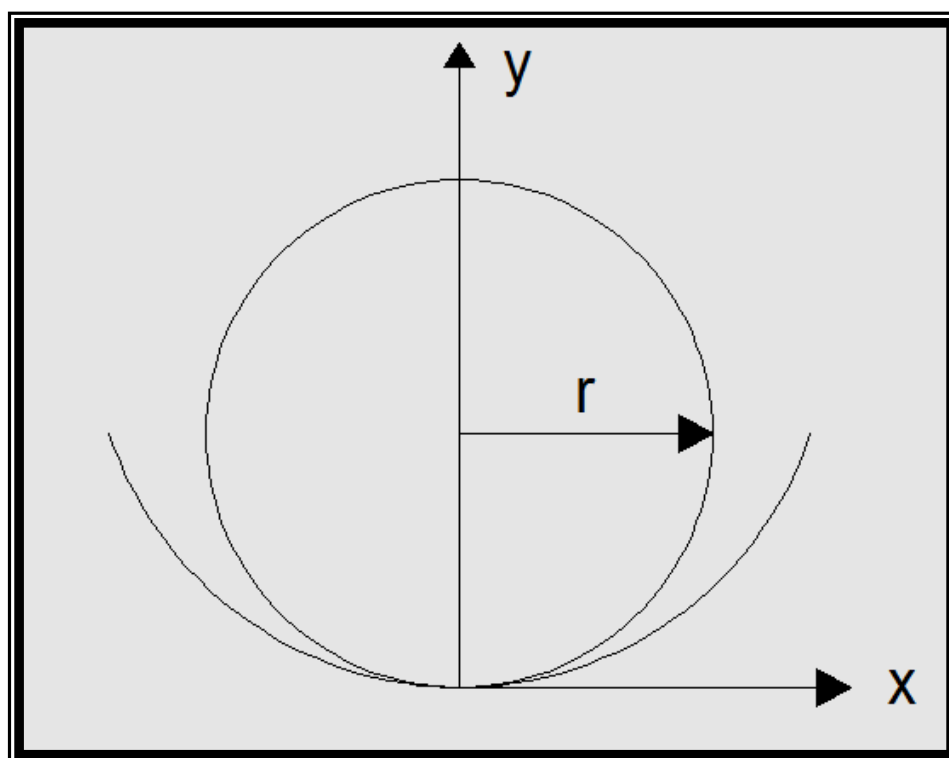
κλίμακας O, προκύπτει η τιμή του βάθους διείσδυσης  $h=0.559$  mm. Έτσι λοιπόν, αντικαθιστώντας την τιμή του  $h$  στην εξίσωση του ελατηρίου που αναφέρθηκε προηγουμένως λαμβάνεται η τιμή της δύναμης ίση με  $P=6.373$  N. Το μέτρο διάτμησης προκύπτει ίσο με  $G=2.95$  N/ mm<sup>2</sup> και το μέτρο ελαστικότητας  $E=8.85$  N/ mm<sup>2</sup>. Και σε αυτή την περίπτωση η προσέγγιση είναι ικανοποιητική. Επιπλέον, παρατηρείται ότι τα δύο υλικά έχουν μικρή διαφορά ως προς το μέτρο ελαστικότητας εφόσον και τα δύο είναι ελαστικά!

Η εξίσωση για τον υπολογισμό της δύναμης του ελατηρίου σκληρόμετρου Shore κλίμακας O ( $P=0.55+3(2.5-h)$ ) εφαρμόζεται και στο υλικό S/ N 120974 Blue XO Durometer με στόχο την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού. Έτσι, γνωρίζοντας το βάθος διείσδυσης  $h\approx 0.858$  mm, από προηγούμενες παραγράφους, προκύπτει η δύναμη  $P=5.476$  N. Επιπρόσθετα, κάνοντας εφαρμογή των σχέσεων που προαναφέρθηκαν, το μέτρο διάτμησης  $G$  ισούται με  $G=1.186$  N/ mm<sup>2</sup> και το μέτρο ελαστικότητας  $E=3.558$  N/ mm<sup>2</sup>. **Γενικά, παρατηρείται ότι κάνοντας χρήση της εξίσωσης της δύναμης που περιλαμβάνεται στο πρότυπο ASTM D 2240 για σκληρόμετρα τύπου O προσεγγίζεται καλύτερα η πραγματική λύση για τα μέτρα ελαστικότητας E των υλικών που περιγράφηκαν προηγουμένως.**

## 1.8 Απόκλιση μεταξύ της εξίσωσης καμπύλης του Hertz και της εξίσωσης κύκλου

Η εξίσωση του κύκλου δίνεται από τη σχέση  $x^2 + y^2 = r^2$ . Με την τοποθέτηση της αρχής των αξόνων στο κέντρο του κύκλου η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται ως εξής  $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ . Επιπλέον, η παραβολή του Hertz στην επιφάνεια επαφής δίνεται από την εξίσωση  $y = \frac{1}{2r}x^2$ . Για την τιμή  $x = r$  από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει  $y = r$ , ενώ αντικαθιστώντας  $x = r$  στην εξίσωση της παραβολής λαμβάνεται  $y = r/2$ .

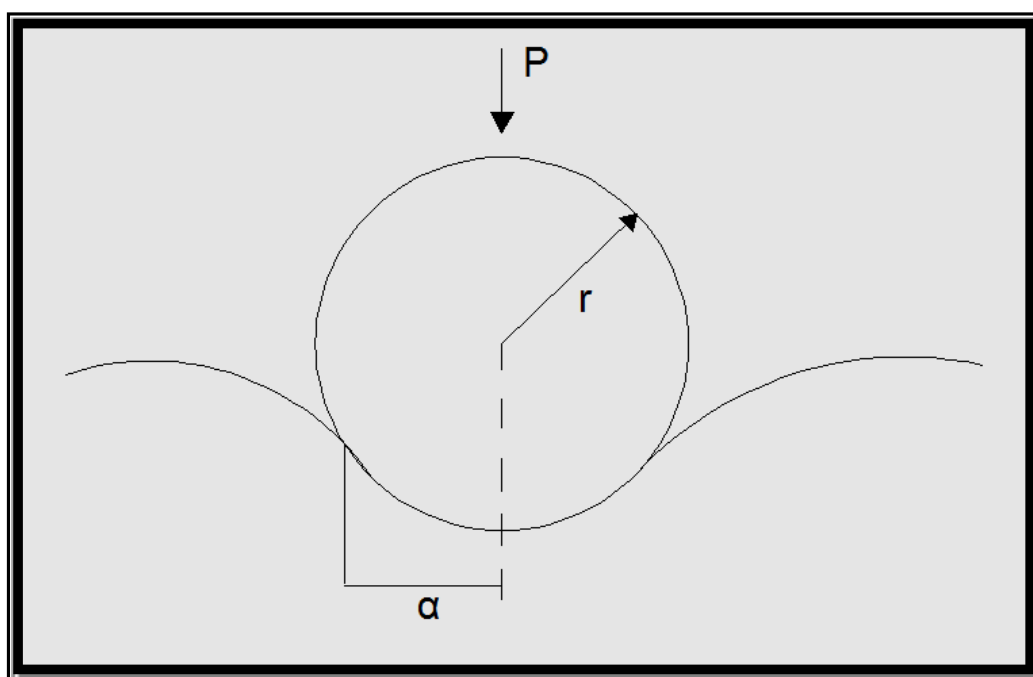
Έτσι, συμπεραίνεται ότι η παραδοχή της παραβολής στο σημείο επαφής κατά τη σκληρομέτρηση δεν είναι ικανοποιητική για τιμές του  $a \approx r$ . Επομένως, απαιτείται γεωμετρική διόρθωση!



**Σχήμα 1.8.1** Απεικόνιση του άκαμπτου διεισδυτή ακτίνας  $r$ . Ο διεισδυτής είναι σφαιρικός, ενώ στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται και η καμπύλη που εκφράζει τη μορφή της επιφάνειας του δείγματος κατά τη διάρκεια της επαφής του υλικού με το διεισδυτή.

## 1.9 Προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστικών δειγμάτων εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting

Το πρόβλημα των δυνάμεων επαφής μεταξύ ενός άκαμπτου διεισδυτή και ενός ελαστικού ημίκωρου μελετήθηκε το 1966 και από τον T. C. T. Ting. Έτσι λοιπόν, με την προϋπόθεση ότι το υλικό είναι «τέλεια» ελαστικό, για ένα σφαιρικό διεισδυτή ακτίνας  $r$  και ακτίνας επαφής  $a$  μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος, στον οποίο εφαρμόζεται δύναμη ελατηρίου  $P$  ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις.



**Σχήμα 1.9.1** Απεικόνιση ενός άκαμπτου, σφαιρικού διεισδυτή, όπου διακρίνεται η ακτίνα του διεισδυτή  $r$ , η ακτίνα επαφής  $a$  και η δύναμη εφαρμογής  $P$ . Η επιφάνεια επαφής μεταξύ διεισδυτή και υλικού προσομοιάζεται με κύκλο, εξαιτίας του σφαιρικού διεισδυτή που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του πειράματος της σκληρομέτρησης, σύμφωνα με τη θεωρία του Ting.

$$c = \frac{1-\nu}{G} = \frac{1}{2G} \quad (1.4)$$

για την περίπτωση ασυμπίεστου υλικού ( $\nu = 1/2$ )

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3} \quad (1.5)$$

για την περίπτωση ασυμπίεστου υλικού ( $\nu = 1/2$ )

$$h = \frac{1}{2} \alpha \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \quad (1.6)$$

όπου με  $h$  συμβολίζεται το βάθος διείσδυσης

$$cP = (r^2 + \alpha^2) \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} - 2\alpha r, \text{ όπου με } P \text{ συμβολίζεται η δύναμη εφαρμογής}$$

Επιλύνοντας τον τύπο που εκφράζει το βάθος διείσδυσης  $h$  προκύπτουν τα εξής:

$$h = \frac{1}{2} \alpha \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \Rightarrow e^{\frac{2h}{\alpha}} = \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \quad (1.7)$$

όπου το  $\alpha$  λαμβάνει τιμές  $0 < \alpha < r$ .

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται με δοκιμές. Στην περίπτωση του ελαστομερούς υλικού που χρησιμοποιήθηκε στο πείραμα ισχύουν τα εξής:

- ✓ το πάχος του υλικού ισούται με  $H=1.10 \text{ cm}$
- ✓ κάνοντας χρήση του τύπου της σκληρότητας βρέθηκε  $h=0.516 \text{ mm}$
- ✓ και γνωρίζοντας τη γεωμετρία του διεισδυτή με ακτίνα  $r=1.19 \text{ mm}$
- ✓ βρέθηκε ότι η εξίσωση επαληθεύεται για  $\alpha = 0$  και για τιμές του  $\alpha$  μεταξύ της περιοχής  $0.70 < \alpha < 0.75$  και ειδικότερα για  $\alpha = 0.725$ . Η πρώτη λύση απορρίπτεται εξαιτίας του περιορισμού, ενώ η δεύτερη γίνεται αποδεκτή. Μετά από επίλυση σε πρόγραμμα excel φαίνεται ότι τα δύο σκέλη της εξίσωσης είναι περίπου ίσα, για το εύρος των τιμών που προαναφέρθηκε. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για τα υπόλοιπα υλικά, με τη βοήθεια του προγράμματος excel προέκυψε ότι η ακτίνα επαφής ισούται με  $\alpha = 0.75$  για το υλικό G&T και  $\alpha = 0.89$  για το υλικό S/ N 120974 Blue XO Durometer.

**Πίνακας 1.9.1** Πίνακας που απεικονίζει την τιμή της ακτίνας επαφής κατά τη σκληρομέτρηση, για την οποία ισχύει η ισότητα των μελών στη σχέση του Ting. Οι τιμές του πίνακα αφορούν το ελαστικό πάχους 11 χιλιοστών, όπου η ακτίνα επαφής  $\alpha$  σε όλες τις περιπτώσεις, για τον συγκεκριμένο διεισδυτή, λαμβάνει τιμές  $\alpha \leq 1.19 \text{ mm}$ .

$\frac{r+\alpha}{r-\alpha}$	$e^{\frac{2h}{\alpha}}$	$\alpha$
1	1	0
1,087719	9,2E+08	0,05
1,183486	30333,26	0,1

1,288462	972,6264	0,15
1,40404	174,1645	0,2
1,531915	62,05369	0,25
1,674157	31,18696	0,3
1,833333	19,07868	0,35
2,012658	13,19714	0,4
2,216216	9,907909	0,45
2,449275	7,877417	0,5
2,71875	6,529717	0,55
3,033898	5,584528	0,6
3,407407	4,892446	0,65
3,857143	4,367915	0,7
3,907216	4,322482	0,705
3,958333	4,278152	0,71
4,010526	4,234887	0,715
4,06383	4,192651	0,72
4,11828	4,151411	0,725
4,173913	4,111133	0,73
4,230769	4,071786	0,735
4,288889	4,033339	0,74
4,348315	3,995764	0,745
4,409091	3,959034	0,75

**Πίνακας 1.9.2** Πίνακας που απεικονίζει την τιμή της ακτίνας επαφής κατά τη σκληρομέτρηση, για την οποία ισχύει η ισότητα των μελών στη σχέση του Ting. Οι τιμές του πίνακα αφορούν το ελαστομερές υλικό G&T. Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με εκείνα του προηγούμενου υλικού με πάχος 1.1 cm. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, εφόσον πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο υλικό.

$\frac{r+a}{r-a}$	$\frac{2h}{e^{\alpha}}$	$\alpha$
2,449275	9,355833	0,5
2,71875	7,63488	0,55
3,033898	6,445185	0,6
3,407407	5,584528	0,65
3,857143	4,938901	0,7
3,907216	4,883273	0,705
3,958333	4,829041	0,71
4,010526	4,776158	0,715
4,06383	4,724576	0,72
4,11828	4,674251	0,725
4,173913	4,625141	0,73
4,230769	4,577204	0,735
4,288889	4,530403	0,74
4,348315	4,484698	0,745
4,409091	4,440055	0,75
4,471264	4,396438	0,755
4,534884	4,353816	0,76

**Πίνακας 1.9.3** Πίνακας που απεικονίζει την τιμή της ακτίνας επαφής κατά τη σκληρομέτρηση, για την οποία ισχύει η ισότητα των μελών στη σχέση του Tīng. Οι τιμές του πίνακα αφορούν το υλικό S/ N 120974 Blue XO Durometer. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή του  $\alpha$  για την οποία επαληθεύεται η σχέση είναι  $\alpha = 0.89$ , μεγαλύτερη σε σχέση με εκείνη των ελαστομερών υλικών.

$\frac{r+a}{r-a}$	$\frac{2h}{e^\alpha}$	$\alpha$
6	7,529462	0,85
6,104478	7,441091	0,855
6,212121	7,354768	0,86
6,323077	7,270427	0,865
6,4375	7,188006	0,87
6,555556	7,107445	0,875
6,677419	7,028688	0,88
6,803279	6,951678	0,885
6,933333	6,876363	0,89
7,067797	6,802692	0,895
7,206897	6,730616	0,9

Για τη δύναμη που εφαρμόζεται στο διεισδυτή, διαμέσου του ελατηρίου της συσκευής Shore, ισχύει η σχέση  $cP = (r^2 + \alpha^2) \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} - 2\alpha r$ . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις  $c = \frac{1-\nu}{G} = \frac{1}{2G}$  και

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3}$ , που ισχύουν για τα ασυμπίεστα υλικά προκύπτει ότι:

$$\frac{P}{2G} = (r^2 + \alpha^2) \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} - 2\alpha r \Rightarrow G = \frac{P}{2[(r^2 + \alpha^2) \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} - 2\alpha r]}. \quad \text{Αξίζει να}$$

σημειωθεί ότι η λογαριθμική συνάρτηση στην παραπάνω ισότητα αφορά το λογάριθμο με βάση την ποσότητα  $e$ , δηλαδή  $\ln$ , πράγμα το οποίο δεν διευκρινίζεται στη δημοσίευση του Tīng. Χρησιμοποιώντας τις τιμές των  $\alpha$  που προαναφέρθηκαν, για το εκάστοτε υλικό, προέκυψαν οι τιμές των μέτρων ελαστικότητας. Έτσι, με εκτίμηση του μέτρου διάτμησης αρχικά και με εφαρμογή της σχέσης του Tīng, βρέθηκαν στη συνέχεια τα μέτρα ελαστικότητας για τα τρία ασυμπίεστα υλικά που είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $E = 9.346 \text{ N/mm}^2$  για το ελαστομερές υλικό πάχους  $H = 1.1 \text{ cm}$
- ✓  $E = 8.474 \text{ N/mm}^2$  για το ελαστομερές υλικό G&T
- ✓  $E = 3.807 \text{ N/mm}^2$  για το υλικό S/ N 120974 Blue XO Durometer.

**Οι τιμές λοιπόν, που προέκυψαν είναι συγκρίσιμες με τις αντίστοιχες τιμές εφαρμόζοντας τη θεωρία του Hertz και τη σχέση που δίνεται από τον κανονισμό ASTM D 2240 (Boyce et al.) για τον προσδιορισμό της δύναμης του ελατηρίου!** Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας και για τα τρία υλικά ακολουθώντας και τις δύο μεθοδολογίες που περιγράφηκαν αναλυτικά προηγουμένως.

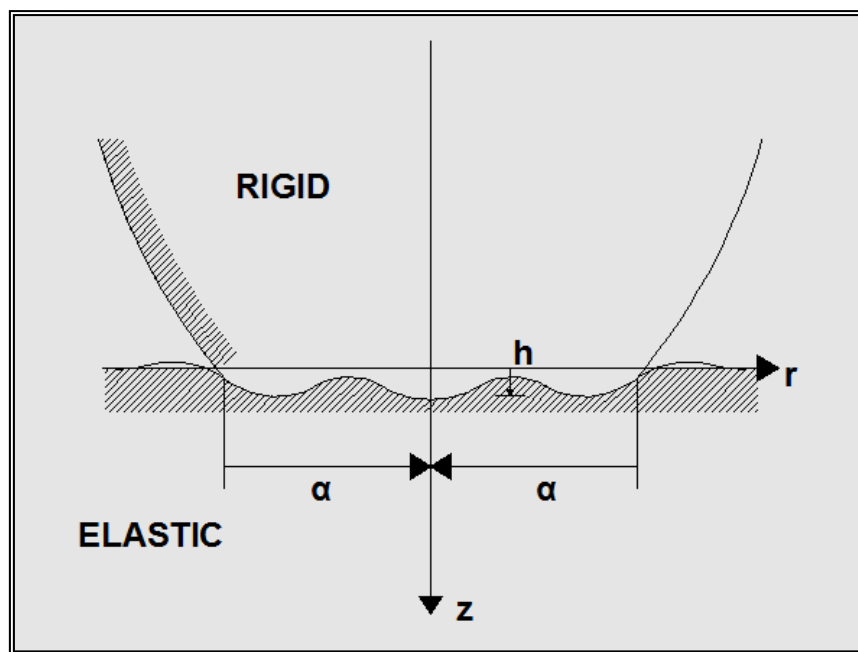
**Πίνακας 1.9.4** Συγκριτικός πίνακας, όπου απεικονίζονται οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας  $E$  σε  $[N/mm^2]$ , για τα τρία υλικά. Στις δύο πρώτες στήλες παριστάνονται οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας εφαρμόζοντας την εξίσωση της παραβολής για την επιφάνεια του υλικού κατά τη σκληρομέτρηση. Αρχικά, δίνονται οι οριακές τιμές του  $E$  κάνοντας χρήση της μέγιστης δύναμης που μπορεί να επιβάλλει ο διεισδυτής, ενώ στη συνέχεια με χρήση των τύπων της Boyce για τη δύναμη  $P$  του ελατηρίου δίνονται πιο αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα της σταθεράς  $E$ . Στην τρίτη στήλη, απεικονίζονται οι τιμές της σταθεράς  $E$ , προσομοιάζοντας την επιφάνεια επαφής μεταξύ διεισδυτή και δοκιμίου με την εξίσωση του κύκλου, εξαιτίας του σφαιρικού διεισδυτή που χρησιμοποιήθηκε. Στην τελευταία λοιπόν, περίπτωση τα αποτελέσματα είναι περισσότερο αντιπροσωπευτικά σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους συγκρίνοντάς τα με τις πραγματικές τιμές.

<b>Υλικό πειράματος</b>	<b>Εξίσωση παραβολής Hertz με χρήση της μέγιστης δύναμης <math>P_{max}</math></b>	<b>Εξίσωση παραβολής Hertz με <math>P</math> από τη σχέση της Boyce</b>	<b>Εξίσωση κύκλου με τους τύπους του Ting και δύναμη από τη σχέση της Boyce</b>
<b>Ελαστομερές υλικό πάχους 1.10 cm</b>	<b>11.19</b>	<b>9</b>	<b>9.346</b>
<b>Ελαστομερές υλικό G&amp;T</b>	<b>9.932</b>	<b>8.85</b>	<b>8.474</b>
<b>Υλικό S/ N 120974 Blue XO</b>	<b>5.22</b>	<b>3.558</b>	<b>3.807</b>



**Πίνακας 1.9.5** Συγκριτικός πίνακας με τις τιμές της ακτίνας επαφής  $a$  σε [mm], για τα τρία υλικά, με βάση τη θεωρία του Ting. Παρατηρείται ότι οι τιμές του  $a$  για τα δύο ελαστομερή υλικά είναι παρόμοιες. Χρησιμοποιώντας την τιμή του  $a$ , όπως προέκυψε, για κάθε υλικό και γνωρίζοντας, από προηγούμενη διαδικασία, την τιμή του βάθους  $h$  της σκληρομέτρησης, σε κάθε περίπτωση, μπορεί να βρεθεί το μέτρο ελαστικότητας  $E$  για κάθε υλικό, εφαρμόζοντας την δεύτερη σχέση του Ting, που αναφέρεται παραπάνω.

Υλικό πειράματος	Ακτίνα επαφής $a$ (θεωρία Ting)
Ελαστομερές υλικό πάχους 1.10 cm	0.725
Ελαστομερές υλικό G&T	0.75
Υλικό S/ N 120974 Blue XO	0.89



**Σχήμα 1.9.2** Απεικόνιση του άκαμπτου διεισδυτή που εισχωρεί σε ελαστικό ημίσφωρο.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τα παραπάνω, έγινε μια προσπάθεια εύρεσης του μέτρου ελαστικότητας σε τρία υλικά δοκίμια. Τα δύο από αυτά χαρακτηρίζονται ως ελαστομερή υλικά, τα οποία χρησιμοποιούνται στην αυτοκινητοβιομηχανία. Για το προσδιορισμό της σταθεράς Ε χρησιμοποιήθηκαν δύο μέθοδοι. Αρχικά, η επιφάνεια επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος προσομοιώθηκε με την εξίσωση παραβολής του Hertz, κάνοντας χρήση της μέγιστης δύναμης που μπορεί να δεχθεί ο συγκεκριμένος τύπος διεισδυτή, διαμέσου του ελατηρίου, αλλά και της τιμής της δύναμης σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240 (Boyce et al.). Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση του κανονισμού τα αποτελέσματα ήταν καλύτερα, σε σχέση με τη χρήση της μέγιστης δύναμης, όπου λαμβάνεται η μέγιστη δυνατή τιμή της σταθεράς Ε για κάθε υλικό.

Στη συνέχεια, η επιφάνεια επαφής μεταξύ διεισδυτή και υλικού προσομοιώθηκε με την εξίσωση του κύκλου, εξαιτίας του σφαιρικού διεισδυτή κλίμακας Ο κατά Shore που επιλέχθηκε, κάνοντας χρήση των τύπων του Tīng και προσδιορίζοντας την τιμή της δύναμης Ρ από τη σχέση του κανονισμού.

**Η μέθοδος, στην οποία χρησιμοποιείται η εξίσωση της παραβολής, δίνει μία σύντομη απάντηση στο πρόβλημα εύρεσης του μέτρου ελαστικότητας. Αντίθετα, η μέθοδος του Tīng, όπου χρησιμοποιείται η εξίσωση του κύκλου, αποτελεί καλύτερη προσέγγιση, ουσιαστικά διορθώνει την πρώτη μέθοδο και δίνει αναλυτικότερα αποτελέσματα για το μέτρο ελαστικότητας.** Έτσι, για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων και με τις δύο μεθόδους γίνεται ένα είδος αυτοελέγχου.

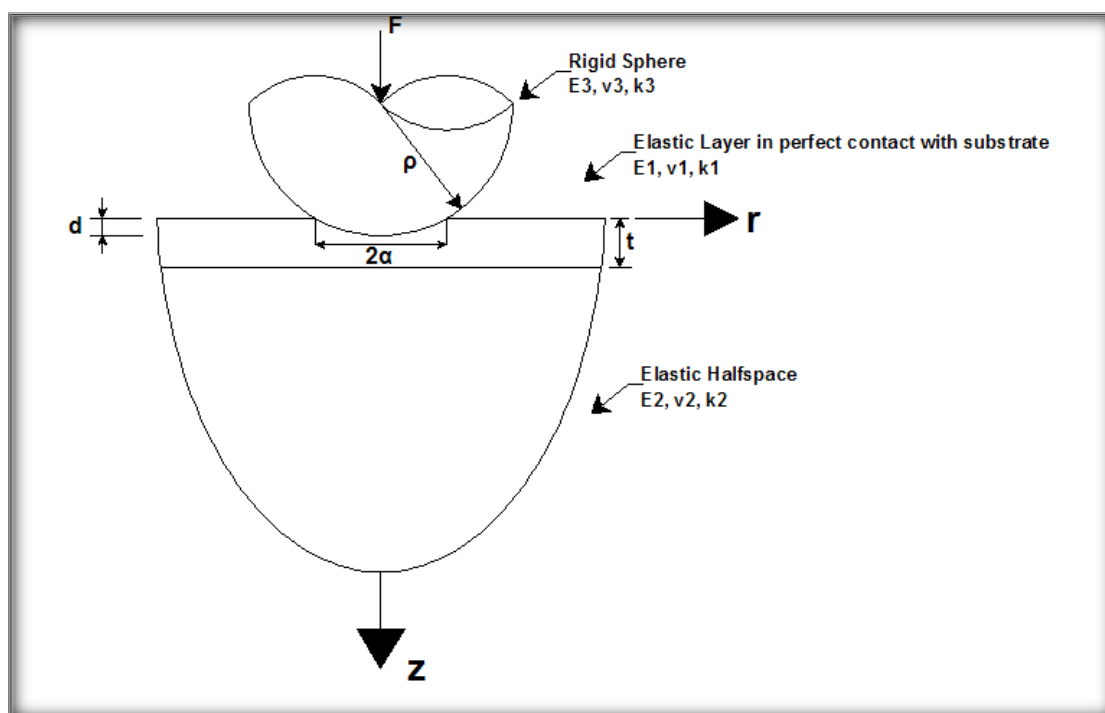
Οι πραγματικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας για το απόλυτο ελαστικό είναι της τάξης των  $6 \text{ N/mm}^2$ , δηλαδή λίγο μικρότερες από αυτές που προέκυψαν εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Tīng. Αυτό συμβαίνει επειδή τα δοκίμια συνήθως δεν διαθέτουν επαρκές πάχος, με αποτέλεσμα η μέτρηση να επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το υπόστρωμα του δοκιμίου πάνω στο οποίο επικάθεται το υλικό, το οποίο σχεδόν πάντοτε είναι σκληρότερο από το μετρούμενο υλικό και δίνει αποτελέσματα μεγαλύτερα από τα πραγματικά. Για την αποφυγή της επιρροής αυτής συνίσταται τα δοκίμια να τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο (όπως στην περίπτωση του υλικού G&T), ώστε να προσδιοριστεί η ακριβής τιμή του μέτρου ελαστικότητας χωρίς την πιθανή επιρροή του υποστρώματος.

Για να επιτευχθεί λοιπόν, η εύρεση του μέτρου ελαστικότητας σε πολύ λεπτά υλικά, προτείνεται μία μέθοδος σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιείται ένα υλικό ως υπόστρωμα, του οποίου οι μηχανικές ιδιότητες αλλά και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά είναι γνωστά, και είναι επιθυμητό να προσδιοριστούν οι ιδιότητες του υλικού με ανεπαρκές πάχος που επικάθεται πάνω στο ήδη γνωστό δοκίμιο. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατό να ληφθούν αποτελέσματα για όλα τα υλικά δοκίμια ανεξαρτήτως του πάχους τους. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να βρει εφαρμογή σε συσκευές Shore κλίμακας Ο, όπως στην προκειμένη περίπτωση. Παρόλα αυτά όμως, υπάρχουν συσκευές Shore διαφορετικής κλίμακας, που μπορούν να προσδιορίσουν κατευθείαν τη σκληρότητα σε

ένα πολύ λεπτό υλικό, χωρίς να απαιτείται η χρήση άλλου υλικού ως υπόστρωμα. Τέτοια συσκευή είναι το σκληρόμετρο Shore κλίμακας Μ, στο οποίο θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε επόμενα κεφάλαια.

## 1.10 Προσδιορισμός του μέτρου ελαστικότητας ελαστικού δείγματος ανεπαρκούς πάχους με τη χρήση πινάκων των Chen και Engel

Για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας ενός πολύ λεπτού στρώματος ελαστικού υλικού μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ως υπόστρωμα, ένας ελαστικός ημίχωρος, πάνω στον οποίο επικάθεται το υπό δοκιμή υλικό. Το ελαστικό, αυτό, υπόστρωμα πρέπει να διαθέτει επαρκές πάχος, συγκρινόμενο με το λεπτό ελαστομερές δοκίμιο, το οποίο θεωρείται γνωστό, εφόσον μπορεί να μετρηθεί, ενώ ταυτόχρονα έχουν προσδιοριστεί, με τη διαδικασία σκληρομέτρησης, και οι μηχανικές του ιδιότητες. Για την εύρεση λοιπόν, του μέτρου διάτμησης και κατ' επέκταση του μέτρου ελαστικότητας του δείγματος γίνεται χρήση των πινάκων Chen και Engel [10]. Απώτερος λοιπόν, στόχος είναι μέσω της διαδικασίας, που περιγράφηκε προηγουμένως, να υπολογιστεί ένα περισσότερο ακριβές αποτέλεσμα της ελαστικότητας του υλικού.



**Σχήμα 1.10.1** Δοκιμή σκληρομέτρησης σε πολύ λεπτό στρώμα ελαστικού υλικού. Για τη μέτρηση της σκληρότητας ενός δοκιμίου, όπως αυτό του σχήματος, είναι απαραίτητη η χρήση ενός υλικού ως υπόστρωμα, πάνω στο οποίο επικάθεται το λεπτό ελαστομερές. Το υλικό που λειτουργεί, εν προκειμένω, ως υπόστρωμα διαθέτει επαρκές πάχος, ενώ οι μηχανικές του ιδιότητες θεωρούνται γνωστές. Για την υλοποίηση της μέτρησης και τη λήψη των αποτελεσμάτων επιλέγεται άκαμπτος διεισδυτής σφαιρικού σχήματος, με γνωστή ακτίνα  $\rho$ . Στο παραπάνω σχήμα, φαίνεται η ακριβής διάταξη των υλικών για την πραγματοποίηση της σκληρομέτρησης. Τα σύμβολα  $E$ ,  $\nu$ ,  $k$

παριστάνουν το μέτρο ελαστικότητας, τον λόγο του Poisson και την ηλεκτρική αγωγιμότητα, αντίστοιχα. Οι δείκτες 1, 2, 3 συμβολίζουν το λεπτό στρώμα, το υπόστρωμα και τον άκαμπτο διεισδυτή. Με  $t$  συμβολίζεται το πάχος της λεπτής στρώσης, με  $d$  το βάθος διείδυσης, με  $F$  η δύναμη του ελατηρίου του οργάνου και με  $a$  η ακτίνα επαφής μεταξύ του σφαιρικού διεισδυτή και του δείγματος.

Σύμφωνα με τους Chen και Engel για τον υπολογισμό του μέτρου διάτμησης χρειάζεται να πραγματοποιηθεί κάποια διόρθωση στο μέγεθος της δύναμης που επιβάλλεται διαμέσου του εσωτερικού, βαθμονομημένου ελατηρίου του σκληρόμετρου, αλλά ταυτόχρονα καθίσταται απαραίτητο να διορθωθεί και η ακτίνα επαφής μεταξύ του άκαμπτου διεισδυτή και του δείγματος. Η διόρθωση που αφορά τη δύναμη συμβολίζεται με  $P^*$ , ενώ η διόρθωση που αφορά την ακτίνα επαφής με  $\delta^*$ . Τα μεγέθη αυτά, σύμφωνα με τους Chen και Engel, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις.

$$P^* = \frac{3(1-\nu_1)PR}{8G_1a^3} \quad (1.9)$$

$$\delta^* = \frac{R\delta}{a} = \frac{Rh}{a^2} \quad (1.10)$$

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω σχέσεων πρέπει να αναφερθεί εκτενώς η φυσική σημασία των συμβόλων, που χρησιμοποιήθηκαν για να περιγράψουν τους τύπους.

- ✓  $\nu_1$ : συντελεστής Poisson του ελαστικού στρώματος
- ✓  $P$ : δύναμη ελατηρίου του σκληρόμετρου, η οποία επιβάλλεται πάνω στο διεισδυτή, με στόχο να προκύψει η σκληρότητα του υλικού
- ✓  $R$ : ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή, πρόκειται για ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό που είναι πάντοτε γνωστό
- ✓  $G_1$ : μέτρο διάτμησης του ελαστικού στρώματος
- ✓  $a$ : ακτίνα επαφής μεταξύ διεισδυτή και δείγματος, που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια της σκληρομέτρησης
- ✓  $\delta$ : ποσοστό εισχώρησης του διεισδυτή μέσα στο δοκίμιο, σε σχέση με την ακτίνα επαφής  $a$ . Η τιμή του  $\delta$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$h = a\delta - \frac{r^2}{2R} = a\delta$ , για  $r = 0$ . Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που δεν παρατηρείται ακτινική μετατόπιση κατά τη διείδυση, παρά μόνο κατά τον άξονα  $z$ .

Στην παρούσα εργασία, είναι επιθυμητό να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας σε ένα πολύ λεπτό στρώμα υλικού. Έτσι λοιπόν, το δείγμα που επιλέχθηκε είναι το λεπτό, ελαστικό δοκίμιο G&T. Για την πραγματοποίηση της δοκιμής, το υλικό G&T επικάθεται πάνω σε ελαστικό υπόστρωμα πάχους 11 χιλιοστών. Αυτό συμβαίνει επειδή το όργανο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση ανήκει στην κλίμακα Shore O και δεν έχει την ικανότητα να υπολογίσει τη σκληρότητα σε δοκίμια πάχους μικρότερο από 6.4 χιλιοστά. Όσον αφορά, την επιφάνεια επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του λεπτού ελαστικού θεωρείται παραβολική (Hertz), ενώ τα ακόλουθα μεγέθη που αφορούν το όργανο, το διεισδυτή και τον ελαστικό ημίκωρο που επιλέχθηκε, αποτελούν τα δεδομένα για να προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος. Έτσι λοιπόν, τα μεγέθη, που λειτουργούν ως δεδομένα και τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας του λεπτού ελαστικού δείγματος, αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω είναι τα εξής:

- ✓ Η δύναμη του ελατηρίου P για το υλικό που χρησιμοποιείται ως υπόστρωμα, υπολογισμένη από τον κανονισμό ASTM D 2240 σε προηγούμενο κεφάλαιο, ισούται με 6.5 N
- ✓ Το βάθος διείσδυσης h ισούται με 0.516 χιλιοστά
- ✓ Η ακτίνα του διεισδυτή κλίμακας O αποτελεί γεωμετρικό χαρακτηριστικό του διεισδυτή και δίνεται σε σχετικό εγχειρίδιο, που αφορά τα σκληρόμετρα Shore, ίση με 1.19 χιλιοστά
- ✓ Το μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού πάχους 11 χιλιοστών, όπως αυτό υπολογίστηκε με βάση τη θεωρία της παραβολής, ισούται με  $9 \text{ N/mm}^2$
- ✓ Το πάχος του υποστρώματος είναι γνωστό και ίσο με 11 χιλιοστά
- ✓ Η ακτίνα επαφής μεταξύ του άκαμπτου διεισδυτή και του ελαστικού υποστρώματος υπολογίστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, βασιζόμενη στην εξίσωση της παραβολής, λαμβάνεται ίση με 0.784 χιλιοστά

Έχοντας λοιπόν, ως δεδομένα του προβλήματος, τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν, πραγματοποιείται μία επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας του λεπτού στρώματος E<sub>1</sub>, κάνοντας χρήση ενός νέου πίνακα που απεικονίζεται παρακάτω, ο οποίος βασίζεται στους πίνακες των Chen και Engel.

Τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας, που έχει ως στόχο τον προσδιορισμό της ελαστικότητας ενός λεπτού ελαστομερούς, κάνοντας χρήση μίας συσκευής που αδυνατεί να μετρήσει ιδιαίτερα λεπτά δοκίμια, είναι τα εξής:

- ❖ Αρχική τιμή της ακτίνας επαφής  $a_0 = 0.784 \text{ mm}$ , όπως υπολογίστηκε σύμφωνα με την εξίσωση της παραβολής

- ❖ Εύρεση του λόγου του πάχους του υποστρώματος προς την ακτίνα επαφής  $t/a_0 = 11/0.784 = 14$
- ❖ Διόρθωση της ακτίνας επαφής  $\delta^* = \frac{R\delta}{a} = \frac{Rh}{a^2} = \frac{1.19 \cdot 0.516}{0.784^2} = 0.9989$
- ❖ Κάνοντας χρήση του παρακάτω πίνακα, γνωρίζοντας τα μεγέθη  $t/a_0 = 14$  και  $\delta^* = 0.9989$  προκύπτει τελικά η τιμή της διόρθωσης της δύναμης του ελατηρίου  $P^* = 1.0000$
- ❖ Γνωρίζοντας πλέον τα μεγέθη  $P^* = 1.0000$  και  $\delta^* = 0.9989$  και χρησιμοποιώντας τον πίνακα, βρίσκουμε την τιμή που αντιστοιχεί στο λόγο των μέτρων διάτμησης  $G_1/G_2 = 1.1$ . Επιπλέον, εφόσον τα υλικά ανήκουν στην κατηγορία των ελαστομερών είναι γνωστός ο λόγος Poisson και ίσος με  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ . Εξαιτίας της ισότητας των  $\nu_{1,2}$  προκύπτει με αντικατάσταση στη σχέση  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ότι  $E_1/E_2 = 1.1$ . Η τιμή του  $E_2$  δίνεται από τα δεδομένα και τελικά λαμβάνεται το ζητούμενο μέτρο ελαστικότητας του λεπτού στρώματος ίσο με  $E_1 = 9 \times 1.1 = 9.90$
- ❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, με χρήση της σχέσης  $P^* = \frac{3(1-\nu_1)PR}{8G_1a^3} = \frac{3(1-0.5) \cdot 6.5 \cdot 1.19}{8 \cdot \frac{9.90}{2(1+0.5)} \cdot a^3} = 1.0000$  προσδιορίζεται μία νέα τιμή της ακτίνας επαφής ίση με  $a_1 = 0.785 \text{ mm}$ .

Αξίζει να σημειωθεί, ότι όσα περιγράφηκαν παραπάνω αφορούν στρώσεις υλικών με ίδιο λόγο Poisson, πρέπει δηλαδή το λεπτό στρώμα του υπό δοκιμή υλικού να έχει ίδιο λόγο Poisson με το υλικό πάνω στο οποίο επικάθεται. Διαφορετικά, το αποτέλεσμα του μέτρου ελαστικότητας του λεπτού δείγματος επηρεάζεται από το μέγεθος  $\nu_2$  του υποστρώματος. Επιπρόσθετα, το αποτέλεσμα της παραπάνω επίλυσης, σχετικά με τη διόρθωση της δύναμης του ελατηρίου, επαληθεύεται κι από το διάγραμμα που δημοσίευσαν οι Johnson και Sridhar [11]. Στο εν λόγω διάγραμμα απεικονίζονται οι καμπύλες του σφάλματος του φορτίου ως συνάρτηση της ακτίνας επαφής  $a/t$ , για διάφορες τιμές του λόγου των μέτρων ελαστικότητας των δύο στρώσεων υλικών, που χρησιμοποιήθηκαν για τη σκληρομέτρηση  $E_1/E_2$ . Σε προηγούμενα κεφάλαια, έχει υπολογισθεί η ελαστικότητα του υποστρώματος ίση με  $E_2 = 9 \text{ N/mm}^2$ . Γνωρίζοντας λοιπόν, το λόγο  $E_1/E_2 = 9.9/9 = 1.1$  και την τιμή  $a/t$ , βρίσκουμε την αντίστοιχη καμπύλη του διαγράμματος, η οποία πράγματι αντιστοιχεί στην τιμή  $P^* = 1.0000$ , όπως είδαμε προηγουμένως. Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για την εύρεση των μεγεθών που προαναφέρθηκαν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά το διάγραμμα των Johnson και Sridhar, στην περίπτωση που οι πίνακες θεωρούνται πολύπλοκοι, αν και είναι περισσότερο ακριβής. Στην συνέχεια, παρατίθενται οι πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του

λεπτού, ελαστικού δείγματος. Για την εύρεση του επιθυμητού μεγέθους, πρέπει να προηγηθεί ο υπολογισμός των τιμών  $P^*$  και  $\delta^*$ . Βασιζόμενοι λοιπόν, στους ακόλουθους πίνακες καταλήξαμε στα αποτελέσματα που προαναφέρθηκαν. Οι τιμές του πίνακα αφορούν λόγους μέτρων ελαστικότητας που κυμαίνονται μεταξύ του 1 και 3, πράγμα το οποίο δηλώνει ότι το λεπτό δείγμα αλλά και το υπόστρωμα είναι υλικά που εμφανίζουν παρόμοια ελαστικότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ανήκουν και τα δύο στην κατηγορία των ελαστικών.

**Πίνακας 1.10.1** Πίνακες Chen και Engel. Οι τιμές του πίνακα αφορούν λόγους μέτρων ελαστικότητας που κυμαίνονται μεταξύ του 1 και 3, πράγμα το οποίο δηλώνει ότι το λεπτό δείγμα αλλά και το υπόστρωμα είναι υλικά που εμφανίζουν παρόμοια ελαστικότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ανήκουν και τα δύο στην κατηγορία των ελαστικών.

<b>G1/G2</b>	<b>3</b>		<b>2,9</b>		<b>2,8</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>
<b>0</b>	3,0000	1,0000	2,9000	1,0000	2,8000	1,0000
<b>0,1</b>	2,2897	0,8800	2,2252	0,8860	2,1607	0,8920
<b>0,15</b>	2,0971	0,8511	2,0422	0,8585	1,9874	0,8659
<b>0,2</b>	1,9474	0,8304	1,9000	0,8389	1,8527	0,8474
<b>0,3</b>	1,7194	0,8016	1,6834	0,8115	1,6475	0,8214
<b>0,4</b>	1,5557	0,7845	1,5279	0,7953	1,5001	0,8061
<b>0,6</b>	1,3456	0,7117	1,3283	0,7261	1,3110	0,7405
<b>1</b>	1,1509	0,7834	1,1434	0,7942	1,1358	0,8051
<b>1,5</b>	1,0640	0,8149	1,0608	0,8242	1,0576	0,8334
<b>2</b>	1,0318	0,8439	1,0302	0,8517	1,0286	0,8595
<b>4</b>	1,0048	0,9101	1,0046	0,9146	1,0043	0,9191
<b>8</b>	1,0006	0,9531	1,0006	0,9554	1,0005	0,9578
<b>16</b>	1,0001	0,9763	1,0001	0,9775	1,0001	0,9787
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

<b>G1/G2</b>	<b>2,7</b>		<b>2,6</b>		<b>2,5</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>
<b>0</b>	2,7000	1,0000	2,6000	1,0000	2,5000	1,0000
<b>0,1</b>	2,0962	0,8980	2,0318	0,9040	1,9673	0,9100
<b>0,15</b>	1,9325	0,8734	1,8777	0,8809	1,8228	0,8883
<b>0,2</b>	1,8053	0,8558	1,7579	0,8643	1,7106	0,8728
<b>0,3</b>	1,6115	0,8314	1,5755	0,8413	1,5396	0,8512
<b>0,4</b>	1,4723	0,8168	1,4446	0,8276	1,4168	0,8384
<b>0,6</b>	1,2938	0,7549	1,2765	0,7694	1,2592	0,7838
<b>1</b>	1,1283	0,8159	1,1207	0,8267	1,1132	0,8373
<b>1,5</b>	1,0544	0,8427	1,0512	0,8519	1,0480	0,8612
<b>2</b>	1,0270	0,8673	1,0254	0,8751	1,0238	0,8829



<b>4</b>	1,0041	0,9236	1,0038	0,9281	1,0036	0,9326
<b>8</b>	1,0005	0,9601	1,0005	0,9625	1,0005	0,9648
<b>16</b>	1,0001	0,9799	1,0001	0,9810	1,0001	0,9822
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

<b>G1/G2</b>	<b>2,4</b>		<b>2,3</b>		<b>2,2</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>
<b>0</b>	2,4000	1,0000	2,3000	1,0000	2,2000	1,0000
<b>0,1</b>	1,9028	0,9160	1,8383	0,9220	1,7738	0,9280
<b>0,15</b>	1,7679	0,8958	1,7131	0,9032	1,6583	0,9107
<b>0,2</b>	1,6632	0,8813	1,6158	0,8898	1,5684	0,8982
<b>0,3</b>	1,5036	0,8611	1,4674	0,8710	1,4316	0,8809
<b>0,4</b>	1,3889	0,8492	1,3612	0,8599	1,3334	0,8707
<b>0,6</b>	1,2419	0,7982	1,2246	0,8126	1,2074	0,8270
<b>1</b>	1,1056	0,8484	1,0981	0,8592	1,0905	0,8700
<b>1,5</b>	1,0448	0,8704	1,0416	0,8797	1,0384	0,8889
<b>2</b>	1,0223	0,8907	1,0207	0,8985	1,0191	0,9063
<b>4</b>	1,0034	0,9371	1,0031	0,9416	1,0029	0,9461
<b>8</b>	1,0004	0,9672	1,0004	0,9695	1,0004	0,9719
<b>16</b>	1,0001	0,9834	1,0001	0,9846	1,0001	0,9858
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

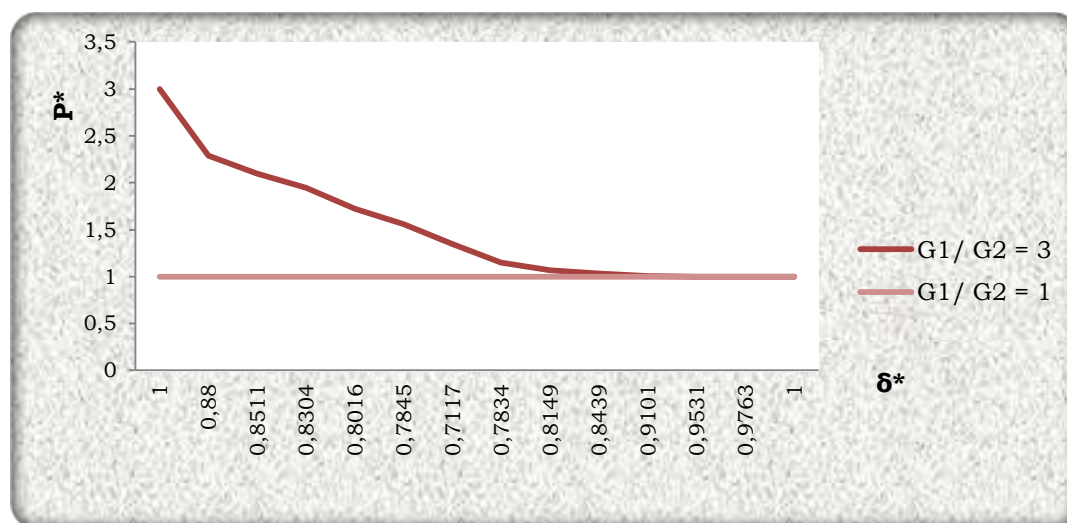
<b>G1/G2</b>	<b>2,1</b>		<b>2</b>		<b>1,9</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>	<b>P*</b>	<b><math>\delta^*</math></b>
<b>0</b>	2,1000	1,0000	2,0000	1,0000	1,9000	1,0000
<b>0,1</b>	1,7093	0,9340	1,6449	0,9400	1,5804	0,9460
<b>0,15</b>	1,6034	0,9181	1,5486	0,9256	1,4937	0,9329
<b>0,2</b>	1,5211	0,9067	1,4737	0,9152	1,4263	0,9237
<b>0,3</b>	1,3957	0,8409	1,3597	0,9008	1,3237	0,9107
<b>0,4</b>	1,3056	0,8815	1,2779	0,8923	1,2501	0,9030
<b>0,6</b>	1,1901	0,8414	1,1728	0,8559	1,1555	0,8703
<b>1</b>	1,0829	0,8809	1,0755	0,8917	1,0679	0,9025
<b>1,5</b>	1,0352	0,8982	1,0320	0,9075	1,0288	0,9167
<b>2</b>	1,0175	0,9141	1,0159	0,9219	1,0143	0,9298
<b>4</b>	1,0026	0,9506	1,0024	0,9551	1,0022	0,9595
<b>8</b>	1,0003	0,9742	1,0003	0,9766	1,0003	0,9789
<b>16</b>	1,0001	0,9869	1,0001	0,9882	1,0000	0,9893
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

<b>G1/G2</b>	<b>1,8</b>		<b>1,7</b>		<b>1,6</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>
<b>0</b>	1,8000	1,0000	1,7000	1,0000	1,6000	1,0000
<b>0,1</b>	1,5159	0,9520	1,4514	0,9580	1,3869	0,9640
<b>0,15</b>	1,4388	0,9404	0,3839	0,9479	1,3291	0,9553
<b>0,2</b>	1,3789	0,9322	1,3316	0,9406	1,2842	0,9491
<b>0,3</b>	1,2878	0,9206	1,2518	0,9306	1,2158	0,9405
<b>0,4</b>	1,2223	0,9138	1,1945	0,9246	1,1667	0,9354
<b>0,6</b>	1,1382	0,8847	1,1209	0,8991	1,1037	0,9135
<b>1</b>	1,0604	0,9134	1,0528	0,9242	1,0453	0,9350
<b>1,5</b>	1,0256	0,9259	1,0224	0,9352	1,0192	0,9445
<b>2</b>	1,0127	0,9376	1,0111	0,9454	1,0095	0,9532
<b>4</b>	1,0019	0,9640	1,0017	0,9685	1,0014	0,9730
<b>8</b>	1,0002	0,9812	1,0002	0,9836	1,0002	0,9859
<b>16</b>	1,0000	0,9905	1,0000	0,9917	1,0000	0,9929
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

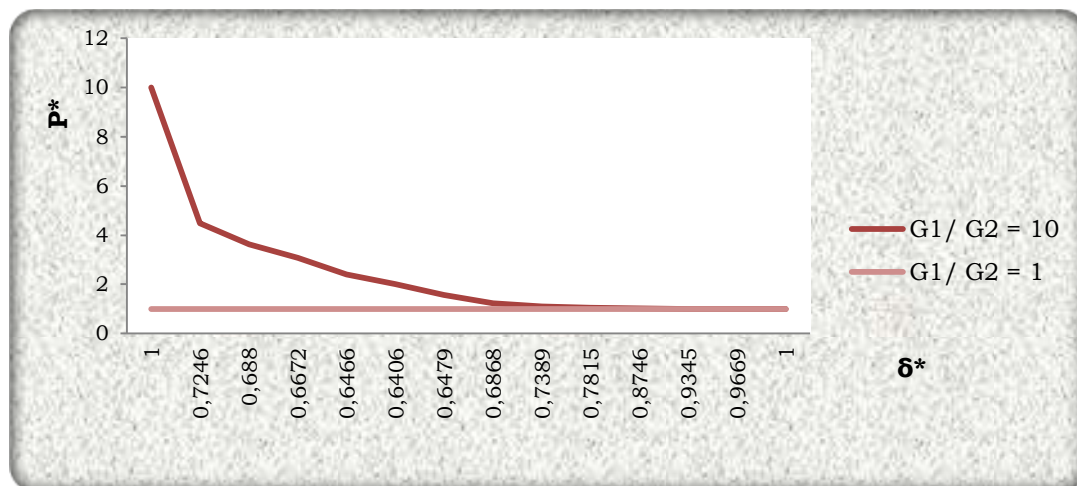
<b>G1/G2</b>	<b>1,5</b>		<b>1,4</b>		<b>1,3</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>
<b>0</b>	1,5000	1,0000	1,4000	1,0000	1,3000	1,0000
<b>0,1</b>	1,3224	0,9700	1,2579	0,9760	1,1935	0,9820
<b>0,15</b>	1,2743	0,9628	1,2194	0,9702	1,1646	0,9777
<b>0,2</b>	1,2369	0,9576	1,1895	0,9661	1,1421	0,9746
<b>0,3</b>	1,1799	0,9504	1,1439	0,9603	1,1079	0,9702
<b>0,4</b>	1,1389	0,9461	1,1111	0,9569	1,0834	0,9677
<b>0,6</b>	1,0864	0,9279	1,0691	0,9423	1,0518	0,9568
<b>1</b>	1,0377	0,9459	1,0302	0,9567	1,0226	0,9675
<b>1,5</b>	1,0160	0,9537	1,0128	0,9629	1,0096	0,9722
<b>2</b>	1,0079	0,9609	1,0064	0,9688	1,0048	0,9766
<b>4</b>	1,0012	0,9775	1,0009	0,9820	1,0007	0,9865
<b>8</b>	1,0002	0,9883	1,0001	0,9906	1,0001	0,9929
<b>16</b>	1,0000	0,9941	1,0000	0,9953	1,0000	0,9964
$\infty$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

<b>G1/G2</b>	<b>1,2</b>		<b>1,1</b>		<b>1</b>	
<b>t/a</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>	<b>P*</b>	<b>δ*</b>
<b>0</b>	1,2000	1,0000	1,1000	1,0000	1,0000	1,0000
<b>0,1</b>	1,1289	0,9880	1,0645	0,9940	1,0000	1,0000
<b>0,15</b>	1,1097	0,9851	1,0549	0,9926	1,0000	1,0000
<b>0,2</b>	1,0947	0,9830	1,0474	0,9915	1,0000	1,0000
<b>0,3</b>	1,0719	0,9802	1,0359	0,9901	1,0000	1,0000
<b>0,4</b>	1,0556	0,9785	1,0278	0,9892	1,0000	1,0000
<b>0,6</b>	1,0346	0,9712	1,0173	0,9856	1,0000	1,0000
<b>1</b>	1,0151	0,9783	1,0075	0,9892	1,0000	1,0000
<b>1,5</b>	1,0064	0,9815	1,0032	0,9907	1,0000	1,0000
<b>2</b>	1,0032	0,9844	1,0016	0,9922	1,0000	1,0000
<b>4</b>	1,0005	0,9910	1,0002	0,9955	1,0000	1,0000
<b>8</b>	1,0001	0,9953	1,0000	0,9977	1,0000	1,0000
<b>16</b>	1,0000	0,9976	1,0000	0,9988	1,0000	1,0000
<b>∞</b>	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Στη συνέχεια, ακολουθούν διαγράμματα που απεικονίζουν τη μεταβολή του σφάλματος της δύναμης του ελατηρίου σε σχέση με τη διόρθωση της ακτίνας επαφής.



**Γράφημα 1.10.1** Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι καμπύλες της διόρθωσης της ακτίνας  $\delta^*$  ως συνάρτηση του σφάλματος της δύναμης του ελατηρίου του οργάνου  $P^*$ , για διάφορες τιμές του λόγου διάτμησης των δύο στρώσεων υλικών, που χρησιμοποιούνται για τη σκληρομέτρηση. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα, παρατηρείται ότι η καμπύλη για λόγο ίσο με τη μονάδα είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται. Αντίθετα η καμπύλη για λόγο διάτμησης ίσο με 3, τόσο για τη μέγιστη καθώς και για την ελάχιστη τιμή του σφάλματος, συγκλίνει στην τιμή  $\delta^*$  ίσο με μονάδα.



**Γράφημα 1.10.2** Το διάγραμμα που απεικονίζεται είναι ανάλογο με αυτό που παρουσιάστηκε παραπάνω. Οι ομοιότητες είναι κοινές για τα δύο διαγράμματα, με μόνη διαφορά ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση απεικονίζονται καμπύλες με λόγο διάτμησης των δύο στρώσεων υλικών που αντιστοιχεί στις τιμές 10 και 1, αντίστοιχα.

## 1.11 Περιγραφή του «μοντέλου» των Stevanovic et al.

Στο άρθρο των Stevanovic et al. (2001) περιγράφεται μία διαδικασία που αποσκοπεί στην εύρεση της ακτίνας επαφής  $a$ , που παρατηρείται κατά τη σκληρομέτρηση, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο άκαμπτου σφαιρικού διεισδυτή και ενός ελαστικού στρώματος υλικού το οποίο επικάθεται πάνω σε ένα άκαμπτο, συγκριτικά με το υπό δοκιμή υλικό, υπόστρωμα. Σύμφωνα με το άρθρο τα επιμέρους μεγέθη συμβολίζονται ως εξής:

- ❖ Σφαιρικός διεισδυτής ακτίνας  $r$
- ❖ Ακτίνα επαφής  $a$
- ❖ Πάχος στρώματος υλικού (δοκίμιο)  $t$ .

Η εργασία των Stevanovic et al. συνδέεται με τις δημοσιεύσεις των Vorovich και Ustinov (1959) καθώς και του Matthewson (1981), οι οποίες αναφέρονται αναλυτικά στη βιβλιογραφία της εργασίας. Έτσι λοιπόν, στη δημοσίευση των Stevanovic et al. εντοπίζεται ένα πειραματικό δεδομένο με υλικό δοκίμιο ένα silicone rubber, του οποίου οι ιδιότητες αναφέρονται ως εξής:

- ❖ Μέτρο ελαστικότητας  $E = 3.05 \text{ MPa}$
- ❖ Λόγος Poisson  $\nu = 0.5$
- ❖ Πάχος δοκιμίου (κυμαινόμενο)  $t = 7\text{-}43 \text{ mm}$
- ❖ Ακτίνα σφαιρικού διεισδυτή (κυμαινόμενη)  $r = 14\text{-}26.1 \text{ mm}$
- ❖ Επιβαλλόμενο φορτίο  $P = 40\text{-}200 \text{ N}$ .

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παριστάνονται σχηματικά με τη μορφή διαγραμμάτων, όπως απεικονίζονται παρακάτω, και τελικά επιβεβαιώνουν το μοντέλο τους.

**Το υπόστρωμα πάνω στο οποίο τοποθετείται το υπό δοκιμή υλικό θεωρείται άκαμπτο όταν είναι τουλάχιστον 40 φορές μεγαλύτερο από το μετρούμενο υλικό.** Η ακτίνα επαφής  $a$  κατά Hertz όταν το πάχος του υλικού  $t \rightarrow \infty$  (πρακτικά όταν  $a < 3t$ ) συμβολίζεται με  $a_L$  και δίνεται από την παρακάτω ισότητα:

$$a_L = \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{4E} Pr \right]^{\frac{1}{3}} \quad (1.11)$$

Στην περίπτωση που το μετρούμενο υλικό είναι ασυμπίεστο ο λόγος του Poisson ισοδυναμεί με  $\nu = 0.5$  και η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$a_L = \left[ \frac{9}{16} \frac{Pr}{E} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (1.12)$$

Έτσι, με  $a_L$  συμβολίζεται η ακτίνα επαφής του δοκιμίου εάν αυτό είχε άπειρο πάχος.

Ειδικότερα, σύμφωνα με τα πειράματα των Stevanovic et al. και λαμβάνοντας τις μέγιστες τιμές που δίνονται παραπάνω, δηλαδή για την περίπτωση που  $E = 3.05 \text{ MPa}$ ,  $r = 26.1 \text{ mm}$  και  $P = 200 \text{ N}$ , η ακτίνα επαφής  $a_L$  με αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση λαμβάνεται ίση με  $a_L = 9.9 \text{ mm}$ . Για τον προσδιορισμό της βύθισης  $h$  οι Stevanovic et al. εφαρμόζουν μία αρχική προσέγγιση που δίνεται από τη σχέση:

$$h = \frac{a^2}{2r}$$

**Η παραπάνω σχέση έχει ισχύ για  $r > 10a$ , όταν δηλαδή η σφαίρα δεν έχει εισχωρήσει αρκετά μέσα στο υλικό δοκίμιο.** Επομένως, για  $a = a_L = 9.9 \text{ mm}$  και ακτίνα διεισδυτή  $r = 26.1 \text{ mm}$  προκύπτει βάθος διείσδυσης  $h = 1.88 \text{ mm}$ . Παρατηρείται λοιπόν, ότι τα μεγέθη  $a$ ,  $r$  δεν υπακούουν στον παραπάνω περιορισμό σε αυτή την περίπτωση και για το λόγο αυτό η λύση χρειάζεται διορθώσεις.

Ο βασικός τύπος των Stevanovic et al. συνδέει το πραγματικό  $a$  με το ιδεατό  $a_L$  (εάν δηλαδή το δείγμα διέθεται άπειρο πάχος) και το πάχος του δοκιμίου  $t$  με τον εξής τρόπο:

$$\frac{a}{a_L} = 1 - c_3 \exp \left[ c_1 \left( \frac{t}{a} \right)^{c_2} \right] \quad (1.13)$$

Στην παραπάνω ισότητα οι συντελεστές  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  είναι γνωστοί και ίσοι με  $c_1 = -1.73$ ,  $c_2 = 0.734$ ,  $c_3 = 1.04$ . Στα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν παρατηρείται ότι για μεγάλους λόγους  $t/a$  τα αποτελέσματα των Stevanovic et al. συμφωνούν με τους Vorovich και Ustinov, ενώ για μικρά  $t/a$  τα αποτελέσματά τους συμφωνούν με τον Matthewson.

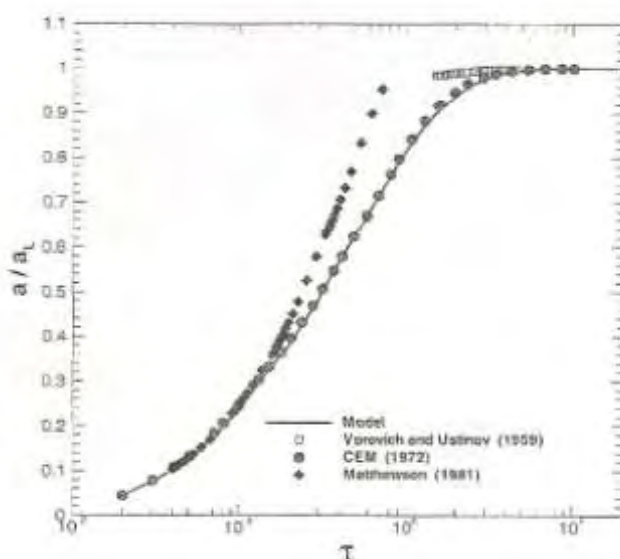
Όπως προαναφέρθηκε, οι Stevanovic et al. εκτελούν μία σειρά πειραμάτων για τον προσδιορισμό της καμπύλης  $(a/a_L) - (t/a)$ . Το

μέγεθος  $a$  προσδιορίζεται από τη σχέση  $h = \frac{a^2}{2r}$ , που δίνεται παραπάνω,

ενώ για την καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης η ποσότητα  $a$  είναι προτιμότερο να υπολογιστεί σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Ting. Στα διαγράμματα που ακολουθούν με  $\tau$  συμβολίζεται το αδιάστατο πάχος  $\tau = t/a$  και η αδιάστατη ακτίνα με  $\alpha/a_L$ . Οι τιμές του οριζόντιου άξονα  $\tau$  λαμβάνονται για εύρος  $[0.02, 3]$ . **Για μεγάλου πάχους υποστρώματα η τιμή του  $a$  πρέπει να προσεγγίζει την τιμή  $a_L$ .** Η καμπύλη του διαγράμματος είναι συσχετισμένη με μία απλή ισότητα της μορφής (1), που αναφέρθηκε προηγουμένως. Η άγνωστη ακτίνα επαφής  $a$

εμφανίζεται και στα δύο σκέλη της ισότητας και απαιτεί μία απλή αριθμητική μεθοδολογία εύρεσης της ρίζας χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό πρόγραμμα.

Το πείραμα των Stevanovic et al. συγκρίνεται με εκείνα των Vorovich και Ustinov αλλά και του Matthewson. Τα μοντέλα αυτά όμως δεν έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν σε μεγάλο εύρος των τιμών  $\tau$ . Το μοντέλο του Matthewson δίνει πολύ καλή προσέγγιση για τιμές  $\tau \leq 0.5$ , ενώ το μοντέλο των Vorovich και Ustinov δίνει καλά αποτελέσματα για  $\tau > 1.5$ . Η ποσότητα  $\tau$  δε μπορεί να γίνει ίση με μηδέν διότι αυτό σημαίνει ότι  $\alpha = \infty$  ( $\tau = \frac{t}{\alpha}$ , για  $\alpha = \infty \rightarrow \tau = 0$ ) και για το λόγο αυτό επιλέχθηκε ίση με 0.02. Στο διάγραμμα που ακολουθεί γίνεται σύγκριση του μοντέλου των Stevanovic et al. με εκείνα των Vorovich και Ustinov και του Matthewson.



**Εικόνα 1.11.1** Γράφημα στο οποίο γίνεται σύγκριση του μοντέλου των Stevanovic et al. με εκείνα των Vorovich και Ustinov και του Matthewson.

Όπως μπορούμε να δούμε στην παραπάνω εικόνα το προτεινόμενο μοντέλο των Stevanovic et al. συμφωνεί με το μοντέλο του Matthewson για λεπτά στρώματα υλικού για τις τιμές  $\tau < 0.2$ . Για το εύρος τιμών  $\tau > 0.2$  το μοντέλο του Matthewson παρεκκλίνει από την προτεινόμενη καμπύλη των Stevanovic et al. και δείχνει να μη συμφωνεί. Επιπρόσθετα, για το εύρος  $\tau < 0.1$  το μέγιστο σφάλμα των αποτελεσμάτων του Matthewson συγκριτικά με την προτεινόμενη καμπύλη προσεγγίζει το 3% για την περίπτωση  $\tau = 0.1$ . Το μοντέλο των Stevanovic et al. συμφωνεί με τα μοντέλα των Vorovich και Ustinov για στρώματα μεγάλου πάχους, δηλαδή για  $\tau > 3$ . Αντίθετα, για την περίπτωση όπου  $\tau < 3$  το μοντέλο δε δείχνει να συμφωνεί με εκείνο των Vorovich και Ustinov, επειδή το μοντέλο τους είναι εφαρμόσιμο μόνο για παχιές στρώσεις υλικού.

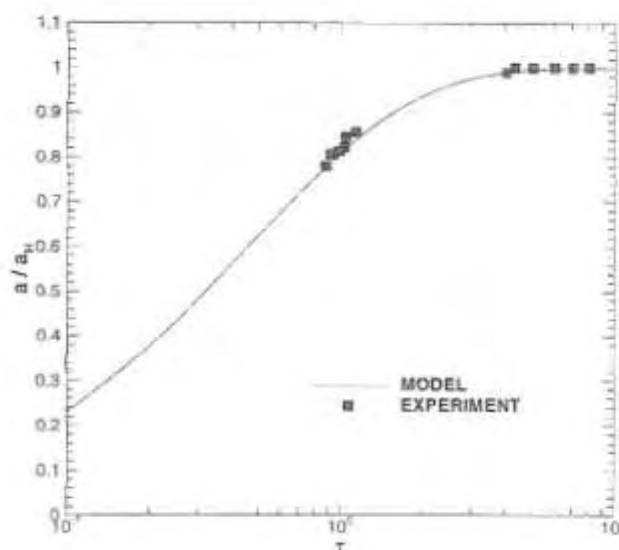
### 1.11.1 Σύγκριση των πειραμάτων των Stevanovic et al. με το προτεινόμενο μοντέλο

Το ελαστικό σιλικόνης (silicone rubber) χαρακτηρισμένο από τις ακόλουθες ιδιότητες χρησιμοποιήθηκε ως υπόστρωμα από τους Stevanovic et al. για την εκτέλεση των πειραμάτων. Οι ιδιότητες του δείγματος είναι οι εξής:

- ❖  $E = 3.05 \text{ MPa}$
- ❖  $\nu = 0.5$  (για ασυμπίεστα υλικά)

Οι δοκιμές εκτελέστηκαν για δύο διαφορετικές στρώσεις υλικού  $t = 7 \text{ mm}$  και  $t = 43 \text{ mm}$ , χρησιμοποιώντας δύο διεισδυτές με διαφορετικές ακτίνες  $r = 14 \text{ mm}$  και  $r = 26.1 \text{ mm}$ . Ακόμη, το φορτίο που επιβλήθηκε στο δείγμα επιλέχθηκε ίσο με  $P = 40 \text{ N}$  και  $P = 200 \text{ N}$ . Τα πειράματα των Stevanovic et al. πραγματοποιήθηκαν εφαρμόζοντας συσκευή τύπου Instron, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του βάθους διείσδυσης  $h$  που προκαλεί σφαιρικός διεισδυτής πάνω σε μαλακό υπόστρωμα. Γνωρίζοντας λοιπόν το βάθος διείσδυσης, η ακτίνα επαφής  $a$  μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας μία απλή γεωμετρική σχέση της μορφής:

$$\alpha = \sqrt{2rh} \quad (1.14)$$



**Εικόνα 1.11.1.1** Σύγκριση του μοντέλου των Stevanovic et al. με τα πειραματικά τους αποτελέσματα για ένα εύρος τιμών  $\tau$ . Το μέγιστο σφάλμα της συσχέτισης με τα πειραματικά αποτελέσματα είναι της τάξης του 3%. Αυτά τα προκαταρκτικά αποτελέσματα επαληθεύουν την ακρίβεια του μοντέλου για στρώματα ενδιάμεσου πάχους.



### **1.11.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας υλικού που επικάθεται πάνω σε γνωστό υπόστρωμα**

Για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς υλικού, το οποίο επικάθεται πάνω σε υπόστρωμα του οποίου τις ιδιότητες θεωρούμε γνωστές προτείνεται η ακόλουθη διαδικασία:

- ❖ εκτελώντας το πείραμα μετράμε τον συντελεστή σκληρότητας κατά Shore S
- ❖ Ανάλογα με τη συσκευή που χρησιμοποιούμε γνωρίζουμε την αντίστοιχη σχέση που συνδέει τη σκληρότητα S με το βάθος διείσδυσης  $h$ , σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε και το βάθος διείσδυσης  $h$
- ❖ Σύμφωνα με τον τύπο του οργάνου και κατ'επέκταση του διεισδυτή που είναι ενσωματωμένος πάνω σε αυτό, εφαρμόζοντας την κατάλληλη σχέση από τον κανονισμό ASTM D 2240 μπορούμε να υπολογίσουμε την επιβαλλόμενη δύναμη του ελατηρίου P.
- ❖ Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο του Tīng, εφόσον η ακτίνα του διεισδυτή  $r$  θεωρείται γνωστή, προσδιορίζουμε την ακτίνα επαφής  $a_L$  (ιδεατή ακτίνα, εάν δεν υπήρχε επιρροή του πάχους)
- ❖ Το πάχος  $t$  του δοκιμίου θεωρείται γνωστό. Έτσι στη συνέχεια βρίσκουμε από τη σχέση των Stevanovic et al. την ακτίνα επαφής  $a$  (πραγματική ακτίνα), λόγω της επιρροής του πάχους του υλικού
- ❖ Γνωρίζοντας λοιπόν τις ποσότητες  $a$ ,  $P$ ,  $r$  και εφαρμόζοντας τον τύπο του Hertz (ή του Tīng), που αναγράφεται παραπάνω, υπολογίζουμε το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος.

### **1.11.3 Σχεδιασμός της καμπύλης των Stevanovic et al. εφαρμόζοντας τη σχέση του Tīng για τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής**

Οι Stevanovic et al. επαλήθευσαν κατά κάποιο τρόπο τη μεθοδολογία που προτείνουν με πειραματικά αποτελέσματα, όπως δείχνεται σε προηγούμενα διαγράμματα. Η σχέση όμως που χρησιμοποίησαν για τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής  $a$ , που αναγράφεται παραπάνω, είναι πολύ συντηρητική και είναι αντιπροσωπευτική στην περίπτωση που η ακτίνα επαφής  $a$  είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με την ακτίνα  $r$  του διεισδυτή του οργάνου. **Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή τα μεγέθη  $a$  και  $r$  εμφανίζουν**

**παρόμοιες τιμές προτείνεται για την επίλυση του προβλήματος η επαναληπτική σχέση του Ting (1966) που συνδέει το μετρούμενο βάθος διείσδυσης  $h$  με την ακτίνα επαφής  $a_L$ .** Η βύθιση  $h$  αποτελεί πρωτογενές μέγεθος, εφόσον μπορούμε να τη μετρήσουμε από το πείραμα. Αντίθετα, η ακτίνα επαφής ανήκει στα δευτερογενή μεγέθη του προβλήματος, αφού πρέπει να την υπολογίσουμε κάνοντας χρήση αναλυτικών σχέσεων.

Βασιζόμενοι σε όλα τα παραπάνω, και κάνοντας χρήση των σχέσεων των Stevanovic et al. καθώς και του Ting προχωρήσαμε, χρησιμοποιώντας άλλοτε τα μέγιστα και άλλοτε τα ελάχιστα δεδομένα του προβλήματος των Stevanovic et al., με στόχο να κατασκευάσουμε την καμπύλη των Stevanovic et al. εφαρμόζοντας τον τύπο του Ting. Έτσι, τα δεδομένα του προβλήματος χρησιμοποιώντας τις μέγιστες τιμές που δίνονται από τους Stevanovic et al. είναι τα ακόλουθα:

- ❖ Πάχος δοκιμίου  $t = 43 \text{ mm}$
- ❖ Ακτίνα άκαμπτου διεισδυτή  $r = 26.1 \text{ mm}$
- ❖ Επιβαλλόμενη δύναμη  $P = 200 \text{ N}$
- ❖ Μέτρο ελαστικότητας δοκιμίου  $E = 3.05 \text{ MPa}$
- ❖ Λόγος του Poisson  $\nu = 0.5$

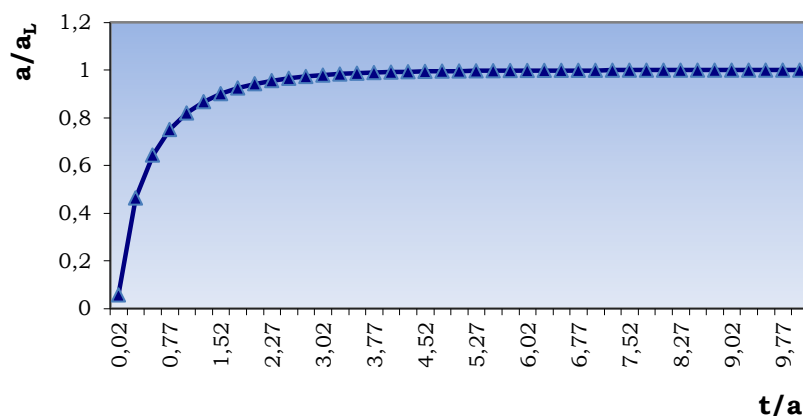
Αρχικά, υπολογίσθηκε η ακτίνα επαφής  $a_L$  για υπόστρωμα άπειρου πάχους, όπως δίνεται από τη σχέση του Hertz (1.12). Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση, τα μεγέθη που αναγράφονται παραπάνω λαμβάνεται ακτίνα επαφής  $a_L = 9.9 \text{ mm}$ . Παρατηρούμε ότι τα μεγέθη  $a_L$  και  $r$  εμφανίζουν τιμές που είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή  $a_L = \frac{1}{3} * r$ . Στην περίπτωση αυτή, δεν είναι αντιπροσωπευτική η λύση των Stevanovic et al. και πρέπει να εφαρμόσουμε τον τύπο του Ting (1966) για τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής. Στη συνέχεια, για να βρούμε το βάθος διείσδυσης  $h$  χρησιμοποιούμε τη συντηρητική σχέση (1.14), επιλύουμε ως προς τη βύθιση  $h$  και αντικαθιστούμε το μέγεθος  $a$  με το  $a_L$ , όπως υπολογίσθηκε προηγουμένως από τον τύπο του Hertz. Επιλύοντας λοιπόν τη σχέση, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, προκύπτει  $h = 1.88 \text{ mm}$ . Υποθέτουμε ότι το πείραμα έχει το ίδιο βάθος διείσδυσης  $h = 1.88 \text{ mm}$  και επιθυμούμε τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής  $a_L$  εφαρμόζοντας όχι τον τύπο του Hertz, αλλά την επαναληπτική σχέση του Ting, στην οποία αντικαθιστούμε την ακτίνα  $a$  με  $a_L$ . Η σχέση του Ting έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$h = \frac{1}{2} a_L \log \frac{r + a_L}{r - a_L} \quad (1.15)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο συμβολισμός  $\log$  αντιστοιχεί σε νεπέριο λογάριθμο, ουσιαστικά πρόκειται για  $\ln$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση τα γνωστά μεγέθη  $h$ ,  $r$  και κάνοντας μία σειρά από δοκιμές προκύπτει η τιμή του  $a_L = 6.94 \text{ mm}$ .

Στο σημείο αυτό, κάνοντας χρήση της σχέσης των Stevanovic et al. (1.13) κατασκευάσαμε την καμπύλη των Stevanovic et al., με απώτερο στόχο να τη συγκρίνουμε με εκείνη του Ting. Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζεται η καμπύλη των Stevanovic et al. κατασκευασμένη σε πρόγραμμα excel.

**Διάγραμμα κατά Stevanovic et al.**



**Γράφημα 1.11.3.1** Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται η συμπεριφορά του μοντέλου των Stevanovic et al., σύμφωνα με τα πειραματικά τους δεδομένα. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζονται οι τιμές  $t/a$ , ενώ στον κατακόρυφο άξονα η ποσότητα  $a/a_L$ . Για την υλοποίηση της καμπύλης πρέπει να ισχύει ο περιορισμός  $0.02 < t/a < 3$ . Για το σχεδιασμό της καμπύλης χρησιμοποιήθηκε η σχέση (1.13), όπου οι συντελεστές  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  είναι δεδομένοι και δίνονται παραπάνω. Το πάχος του υλικού ισοδυναμεί με 43 χιλιοστά, είναι δηλαδή το μεγαλύτερο ως προς το πάχος ελαστικό σιλικόνης που επιλέχθηκε από τους Stevanovic et al.

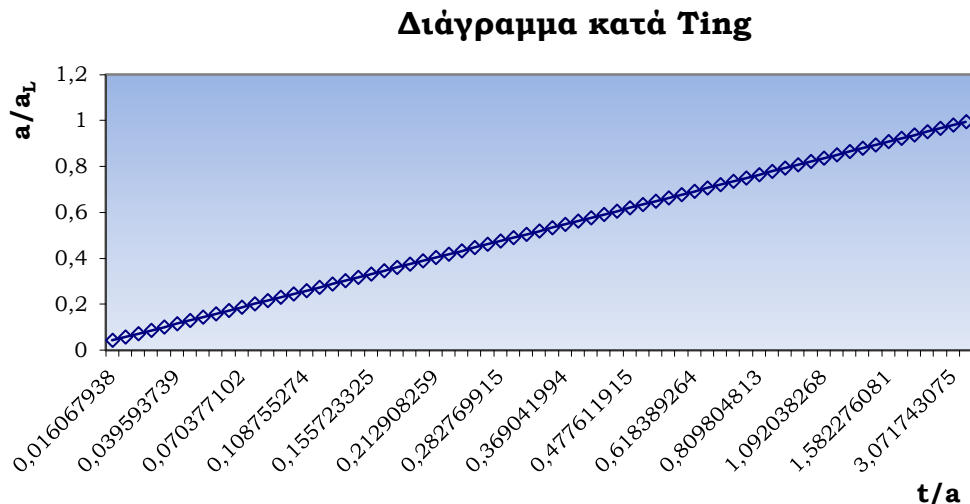
Για τη δημιουργία του ίδιου διαγράμματος, εφαρμόζοντας όμως την επαναληπτική σχέση του Ting για την εύρεση της ακτίνας επαφής  $a_L$ , ακολουθήθηκε μία διαδικασία με σκοπό την επίλυση της εξίσωσης (1.13) ως προς  $t/a$ . Αυτό κρίθηκε απαραίτητο διότι το μέγεθος που προκαλεί τη διαφορά στο διάγραμμα σύμφωνα με θεωρία του Ting είναι το  $a_L$ . Αναλυτικά, η σχέση (1.13) για τη δημιουργία του διαγράμματος κατά Ting μετατρέπεται ως εξής:

$$c_3 \exp \left[ c_1 \left( \frac{t}{a} \right)^{c_2} \right] = 1 - \frac{a}{a_L}$$

$$\ln e^{\left[ c_1 \left( \frac{t}{a} \right)^{c_2} \right]} = \ln \left[ \frac{1}{c_3} \left( 1 - \frac{a}{a_L} \right) \right]$$

$$\frac{t}{a} = \left\{ \frac{1}{c_1} \ln \left[ \frac{1}{c_3} \left( 1 - \frac{a}{a_L} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{c_2}} \quad (1.16)$$

Ακολουθεί η καμπύλη του μοντέλου των Stevanovic et al., κάνοντας εφαρμογή της σχέσης του Ting για τον προσδιορισμό της ακτίνας επαφής  $a_L$  του υποστρώματος με άπειρο πάχος.



**Γράφημα 1.11.3.2** Καμπύλη του μοντέλου των Stevanovic et al. εφαρμόζοντας την επαναληπτική σχέση του Ting. Για τις τιμές  $0.02 < a/a_L < 0.85$  τα αποτελέσματα των δύο διαγραμμάτων δείχνουν να συμπίπτουν, με την καμπύλη του Ting να είναι περισσότερο γραμμική. Αντίθετα, για τιμές μεγαλύτερες του 0.85 η καμπύλη του Ting δίνει μικρότερες τιμές συγκριτικά με το διάγραμμα των Stevanovic et al. Τα πειραματικά δεδομένα όμως των Stevanovic et al. βρίσκονται στην περιοχή της καμπύλης μεταξύ  $0.8 < a/a_L < 0.85$  και εξαιτίας αυτού επαληθεύονται και συμπίπτουν με τα πραγματικά αποτελέσματα. Έτσι λοιπόν, οι Stevanovic et al. στάθηκαν «τυχαιοί», εφόσον τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους κινούνται γύρω από τη συγκεκριμένη περιοχή.

Οι Stevanovic et al. για την επαλήθευση του μοντέλου τους με πειραματικές δοκιμές χρησιμοποίησαν και ένα δείγμα με ελάχιστα δεδομένα που αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω ως εξής:

- ❖ Πάχος δοκιμίου  $t = 7 \text{ mm}$
- ❖ Ακτίνα διεισδυτή  $r = 14 \text{ mm}$
- ❖ Επιβαλλόμενη δύναμη  $P = 40 \text{ N}$
- ❖ Μέτρο ελαστικότητας  $E = 3.05 \text{ MPa}$
- ❖ Λόγος Poisson  $\nu = 0.5$

Με αντικατάσταση των παραπάνω δεδομένων στη σχέση του Hertz (1.12) προκύπτει ακτίνα επαφής υποστρώματος άπειρου πάχους ίση με  $a_L = 4.69 \text{ mm}$ . Το μέγεθος αυτό αντιστοιχεί περίπου στο  $1/3$  της ακτίνας του

διδιοδυτή  $r$  και εξαιτίας αυτού πρέπει να εφαρμοσθεί η σχέση του Ting, για να λάβουμε την ακριβή λύση της ακτίνας επαφής και κατ' επέκταση του προβλήματος. Οι καμπύλες του πειράματος θα προκύψουν με την ίδια διαδικασία, όπως αναφέρθηκε εκτενώς παραπάνω.

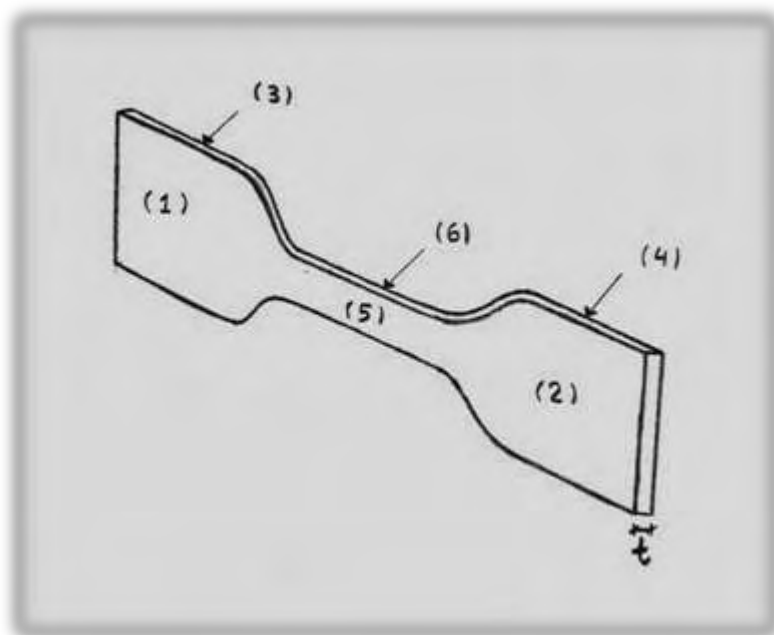
Οι Stevanovic et al. λοιπόν, προτείνουν μία επαναληπτική σχέση που συμπεριλαμβάνει τη διόρθωση των αποτελεσμάτων λόγω του λεπτού δοκιμίου. Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι η επιρροή του πάχους του δοκιμίου επεμβαίνει στη μετρολογία με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει στα γραμμικά υλικά. Αυτό επαληθεύεται πειραματικά! Οι πιθανότεροι λόγοι που συμβαίνει αυτό είναι οι ακόλουθοι:

- ❖ Το εντατικό πεδίο κάτω από το διεισδυτή είναι υδροστατικού τύπου
- ❖ Επειδή το υλικό είναι ασυμπίεστο στην επιφάνεια του «σώματος» ισχύει η ισότητα  $\mathbf{F} \approx \mathbf{R}$ , υπακούοντας στη σχέση  $\mathbf{V} \approx \mathbf{U} \approx \mathbf{I}$ , δηλαδή δεν υπάρχει «τέντωμα». Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται από τη γραμμική ελαστικότητα. Ουσιαστικά, το υλικό μέσω της αλλαγής γωνιών και όχι «τεντωμάτων» λαμβάνει το σχήμα του διεισδυτή.

Η ασυμπίεστικότητα ενός δείγματος προσφέρει ενδιαφέροντα αναλυτικά και πειραματικά αποτελέσματα, ενώ δημιουργεί προβλήματα σε αριθμητικές αναλύσεις.

## 1.12 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του «λεπτού» δοκιμίου G&T που επικάθεται σε πλήθος στρώσεων του ίδιου υλικού εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting

Εναλλακτικά με την προηγούμενη μεθοδολογία, αποφασίσαμε να τοποθετήσουμε το λεπτό στρώμα του δοκιμίου πάνω σε πλήθος στρωμάτων του ίδιου υλικού. Έτσι, πραγματοποιήθηκε μια σειρά διαδοχικών πειραμάτων με δοκίμιο το ελαστικό δείγμα που ονομάστηκε G&T από τους Α. Γιαννακοπουλος και Α. Triantafyllou (2007). Ουσιαστικά, πρόκειται για ελαστομερές υλικό που ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών και βρίσκει εφαρμογή στις ζάντες των τροχοφόρων οχημάτων. Το δοκίμιο χαρακτηρίζεται από σκούρο μαύρο χρώμα, το πάχος του είναι μόλις 1.89 χιλιοστά, ενώ το σχήμα του ταυτίζεται με εκείνο που έχουν δείγματα υλικών που υποβάλλονται σε εφελκυσμό. Ειδικότερα, το υπό δοκιμή υλικό αποτελείται από ένα λαιμό στο μέσο, ενώ τα άκρα του διαθέτουν μεγαλύτερο πλάτος σε σχέση με το λαιμό του. Η σκληρομέτρηση πραγματοποιήθηκε και στις δύο όψεις του δείγματος τόσο στα ακραία τμήματα όσο και στο λαιμό, ενώ η συσκευή που επιλέχθηκε για την υλοποίηση των πειραμάτων χαρακτηρίζεται ως durometer shore κλίμακας Ο. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται το ελαστικό δοκίμιο G&T, που υποβλήθηκε σε σκληρομέτρηση.



**Σχήμα 1.12.1** Τρισδιάστατη απεικόνιση του υπό δοκιμή υλικού G&T. Το δείγμα ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών. Όπως φαίνεται παραπάνω, το σχήμα του είναι ιδιόμορφο, διαθέτει λαιμό στο μεσαίο τμήμα, ενώ τα ακραία τμήματα του δοκιμίου έχουν μεγαλύτερο πλάτος ορθογωνικού περιπίου

σχήματος. Με το σύμβολο  $t$  παριστάνεται το πάχος του υλικού, το οποίο είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του δοκιμίου και συγκεκριμένα ισούται με 1.89 χιλιοστά. Επιπρόσθετα, το δοκίμιο χωρίζεται σε έξι περιοχές, για κάθε μία από τις οποίες έγιναν τρεις μετρήσεις σκληρομέτρησης, έτσι ώστε το μέγεθος της σκληρότητας να είναι περισσότερο αξιόπιστο.

Η σκληρομέτρηση του δοκιμίου G&T πραγματοποιήθηκε σε τρεις περιοχές του δείγματος που αφορούν κάθε όψη, δηλαδή σε έξι τμήματα συνολικά. Στη συνέχεια, παρατίθενται οι μετρήσεις σκληρότητας που προέκυψαν σε κάθε περιοχή του υλικού, καθώς και οι μέση όροι των αποτελεσμάτων αυτών.

Για την περιοχή (1) τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $S_1 = 81.0$
- ✓  $S_2 = 81.0$
- ✓  $S_3 = 82.0$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 81.33$ . Αντίστοιχα, για την περιοχή (2) τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $S_1 = 81.0$
- ✓  $S_2 = 81.0$
- ✓  $S_3 = 81.5$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 81.17$ . Τα τμήματα (1) και (2) αποτελούν τις ακραίες περιοχές του υλικού, όπως διακρίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αντίθετα, το τμήμα (5) αφορά το λαιμό του δοκιμίου, το οποίο υποβλήθηκε σε έξι συνολικά διαδοχικές μετρήσεις που αναφέρονται ως εξής:

- ✓  $S_1 = 79.0$
- ✓  $S_2 = 79.0$
- ✓  $S_3 = 80.0$
- ✓  $S_4 = 83.0$
- ✓  $S_5 = 81.0$
- ✓  $S_6 = 80.0$

Οι μετρήσεις  $S_1$  και  $S_2$  αφορούν τα άκρα του λαιμού, δηλαδή μετρήσεις σε περιοχές λίγο πριν εισέλθουμε στα τμήματα (1) και (2) του δείγματος. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, τα υπόλοιπα αποτελέσματα σκληρότητας του δείγματος προέκυψαν σε κεντρικά σημεία του λαιμού. Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 80.33$ .

Με τον ίδιο τρόπο, η διαδικασία σκληρομέτρησης επαναλήφθηκε και στην άλλη όψη του υλικού και τα αποτελέσματα που πάρθηκαν στα αντίστοιχα τμήματα αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω.

Για την περιοχή (3) τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $S_1 = 81.5$
- ✓  $S_2 = 81.5$
- ✓  $S_3 = 81.5$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 81.50$ . Για την περιοχή (4) οι μετρήσεις σκληρότητας που πάρθηκαν είναι οι εξής:

- ✓  $S_1 = 81.0$
- ✓  $S_2 = 80.0$
- ✓  $S_3 = 81.5$

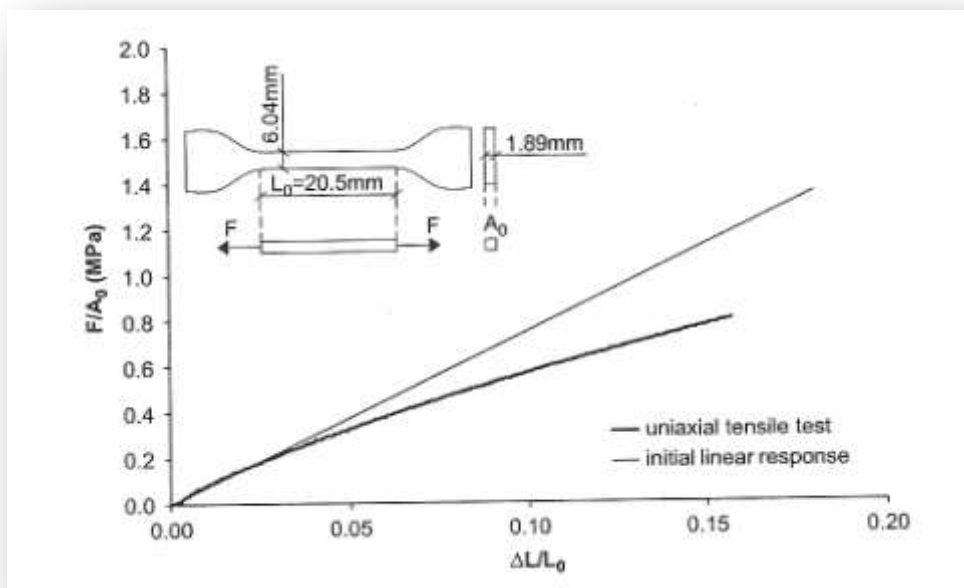
Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 80.83$ . Για την περιοχή (6) λήφθηκαν έξι διαδοχικά αποτελέσματα που είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $S_1 = 81.0$
- ✓  $S_2 = 80.3$
- ✓  $S_3 = 80.3$
- ✓  $S_4 = 83.0$
- ✓  $S_5 = 80.4$
- ✓  $S_6 = 83.0$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 81.33$ . Οι τιμές  $S_1$  και  $S_2$  αντιστοιχούν σε ακραία τμήματα του λαιμού και σε αυτή την περίπτωση, ενώ οι υπόλοιπες μετρήσεις σε κεντρικά σημεία του λαιμού.

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρείται ότι η σκληρότητα κατά Shore συμπίπτει σε όλες τις περιοχές του δείγματος και ισοδυναμεί περίπου με  $S_m = 81$  κατά Shore O. Στην πραγματικότητα όμως, η σκληρότητα του υλικού θα πρέπει να είναι μικρότερη σε σχέση με αυτή που προέκυψε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το δοκίμιο χαρακτηρίζεται από πολύ μικρό πάχος, μικρότερο του απαιτούμενου σύμφωνα με τις προδιαγραφές για τη συσκευή Shore κλίμακας O, όπου το ελάχιστο όριο πάχους του δείγματος πρέπει να είναι ίσο με 6.4 χιλιοστά. Για το λόγο αυτό, το αποτέλεσμα της σκληρότητας κατά Shore δέχεται την επιρροή του σκληρού, σε σχέση με το δείγμα, υπόβαθρου του οργάνου. Έτσι, μετά από μία σειρά αναλύσεων θα προκύψει ένα μέτρο ελαστικότητας για το υλικό μεγαλύτερο από το πραγματικό. Στο σχήμα που ακολουθεί παριστάνεται η καμπύλη τάσης παραμόρφωσης του δοκιμίου, όταν αυτό υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.





**Εικόνα 1.12.1** Απεικόνιση της καμπύλης τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης του δοκιμίου G&T, όταν αυτό υποβάλλεται σε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Στο παραπάνω διάγραμμα παριστάνεται και η αρχική γραμμική απόκριση του υλικού, του οποίου τελικά το μέτρο ελαστικότητας προκύπτει ίσο με  $E_0 = 7.5 \text{ MPa}$ . Ειδικότερα, για να προκύψει η παραπάνω καμπύλη πραγματοποιήθηκε ένα πλήθος πειραμάτων εφελκυσμού. Για την πραγματοποίηση των δοκιμών επιλέχθηκε ένα ασυμπίεστο ελαστικό υλικό με μέγιστη εφελκυστική τάση ίση με  $18.37 \text{ MPa}$  που αντιστοιχεί στη μέγιστη εφελκυστική παραμόρφωση  $261.03\%$  (σύμφωνα με τον κατασκευαστή IMAS A.G.). Επίσης, από τον κατασκευαστή δόθηκε για το υλικό σκληρότητα Shore ίση με 75 (κλίμακα A). Η πυκνότητα του υλικού μετρήθηκε ίση με  $1.207 \text{ gr/cm}^3$ . Όλα τα πειράματα εκτελέστηκαν σε θερμοκρασία  $20 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$  και σχετική υγρασία  $30\%$ . Το δείγμα G&T υποβλήθηκε σε μονοαξονικό εφελκυσμό χρησιμοποιώντας μονοαξονική μηχανή εφελκυσμού/ θλίψης (MTS Q Test/ 1L Elite Controller), με μέγιστο επιβαλλόμενο φορτίο  $\pm 1 \text{ kN}$  και ακρίβεια  $\pm 10^{-2} \text{ N}$  σε δύναμη και  $\pm 10^{-2} \text{ mm}$  σε μετακινήσεις. Τα πειράματα εκτελέστηκαν σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM (D638, E8, D882, D3574, Part E, D412 A και B). Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται μία τυπική μονοαξονική εφελκυστική απόκριση του δείγματος G&T, του οποίου το αρχικό μήκος είναι ίσο με  $L_0 = 20.05 \text{ mm}$  και εμβαδόν διατομής ίσο με  $A_0 = 6.05 \times 1.89 \text{ mm}^2$ . Έτσι λοιπόν, στο σχήμα διακρίνεται η καμπύλη μεταξύ της μηχανικής τάσης  $F/A_0$  και της παραμόρφωσης  $\Delta L/L_0$ . Ακόμη, στο σχήμα φαίνεται η αρχική γραμμική απόκριση. Ο μέσος όρος του αρχικού μέτρου ελαστικότητας βρέθηκε ίσος με  $E_0 = 7.5 \pm 0.3 \text{ MPa}$  και το αντίστοιχο μέτρο διάτμησης ίσο με  $\mu = E_0/3 = 2.5 \pm 0.1 \text{ MPa}$ . Η ταχύτητα της φόρτισης ήταν  $1, 5, 10 \text{ mm/min}$  και δεν είχε καμία επίδραση στην απόκριση του υλικού. Το σχήμα προέρχεται από τη δημοσίευση [19] A.E. Giannakopoulos και A. Triantafyllou.

Μετά την ολοκλήρωση του πειράματος σκληρομέτρησης του ελαστικού δοκιμίου G&T, και έχοντας υπόψη την επιρροή του σκληρού υποστρώματος, αποφασίστηκε η μέτρηση της σκληρότητας του δείγματος εξαρχής έχοντας ως υπόστρωμα κι άλλα ίδια δοκίμια. Αρχικά το δείγμα επικάθεται πάνω σε ένα ίδιο δοκίμιο, ενώ στη συνέχεια σε δύο, σε τρία

και σε τέσσερα δοκίμια αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω.

Για δύο στρώσεις υλικού, το συνολικό πάχος ισούται με  $t = 2 \cdot 1.89 = 3.78$  χιλιοστά. Η σκληρότητα κατά Shore σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με:

- ✓  $S_1 = 79.0$
- ✓  $S_2 = 78.5$
- ✓  $S_3 = 80.0$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 79.17$ . Στην περίπτωση τοποθέτησης τριών στρώσεων ίδιου δείγματος το συνολικό πάχος του υλικού ισούται με  $t = 5.67$  χιλιοστά και οι μετρήσεις που προέκυψαν είναι οι ακόλουθες:

- ✓  $S_1 = 76.5$
- ✓  $S_2 = 75.0$
- ✓  $S_3 = 76.0$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 75.83$ . Στη συνέχεια, τοποθετήθηκαν τέσσερις στρώσεις του υλικού με ολικό πάχος ίσο με  $7.56$  χιλιοστά. Τα αποτελέσματα της σκληρομέτρησης παρατηρείται ότι είναι παρόμοια με τα προηγούμενα και φαίνονται παρακάτω:

- ✓  $S_1 = 76.0$
- ✓  $S_2 = 75.0$
- ✓  $S_3 = 75.0$

Η μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 75.33$ . Το ίδιο παρατηρείται και στην περίπτωση πέντε στρώσεων με πάχος ίσο με  $9.45$  χιλιοστά. Η επιρροή του κατακόρυφου συνόρου (υπόβαθρο) έχει ουσιαστικά εξαλειφθεί, ενώ τα αποτελέσματα της σκληρομέτρησης δίνονται παρακάτω:

- ✓  $S_1 = 75.0$
- ✓  $S_2 = 76.0$
- ✓  $S_3 = 75.5$

Η μέση τιμή των παραπάνω τιμών είναι περίπου ίση με τις προηγούμενες  $S_m = 75.5$ .

**Συγκρίνοντας λοιπόν, τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι τοποθετώντας περισσότερες από τρεις στρώσεις του υλικού G&T το σκληρό υπόβαθρο του οργάνου παύει πλέον να επηρεάζει τα αποτελέσματα του πειράματος!**

Μετά την ολοκλήρωση των μετρήσεων της σκληρότητας με συσκευή Shore κλίμακας O και κάνοντας στη συνέχεια εφαρμογή των σχέσεων του Ting (1966) υπολογίστηκε το μέτρο ελαστικότητας E για μία αλλά και για περισσότερες στρώσεις του υλικού G&T. **Επιπρόσθετα, για**

τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων στην περίπτωση των πολλών στρώσεων (2-5) του ίδιου υλικού επιλέχθηκε για τον υπολογισμό της ακτίνας επαφής  $a$  η εφαρμογή της σχέσης των Stevanovic et al. (2001), χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και τις σχέσεις του Ting για τον προσδιορισμό της ακτίνας του υποστρώματος  $a_L$ . Οι σχέσεις του Ting που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι ακόλουθες και έχουν αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο.

$$c = \frac{1-\nu}{G} = \frac{1}{2G} \quad (1.17)$$

$$h = \frac{1}{2} \alpha \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \quad (1.18)$$

$$cP = (r^2 + \alpha^2) \log \frac{r+\alpha}{r-\alpha} - 2\alpha r \quad (1.19)$$

Στις σχέσεις που αναφέρονται παραπάνω με  $\nu$  συμβολίζεται ο λόγος του Poisson (όπου για την περίπτωση ασυμπίεστου υλικού ισοδυναμεί με  $1/2$ ), με  $G$  το μέτρο διάτμησης, με  $h$  το βάθος διείσδυσης, με  $a$  η ακτίνα επαφής, με  $r$  η ακτίνα του διεισδυτή και με  $P$  η δύναμη του ελατηρίου που επιβάλλεται τελικά στο δείγμα.

Ο προσδιορισμός της ακτίνας επαφής  $a$  στην περίπτωση πολλών στρώσεων υλικού σύμφωνα με τους Stevanovic et al. δίνεται από την παρακάτω σχέση.

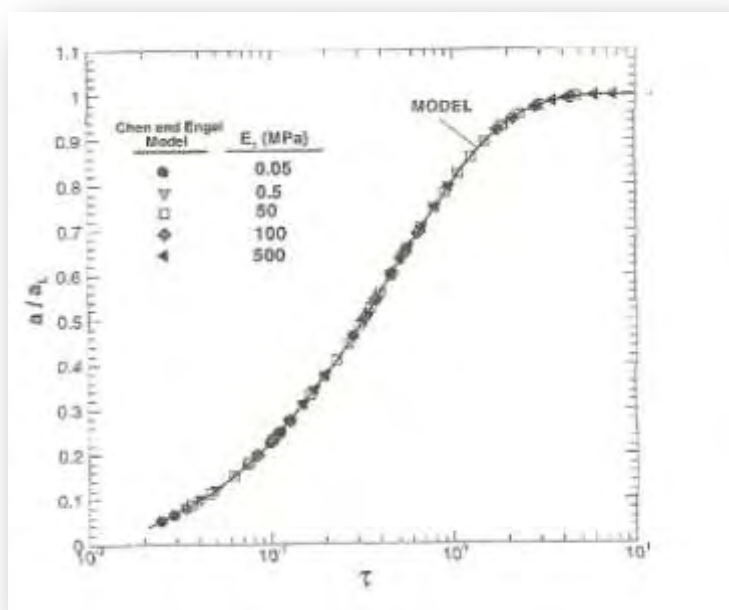
$$\frac{\alpha}{a_L} = 1 - c_3 \exp [c_1(t/a)^{c_2}] \quad (1.20)$$

Στην εξίσωση που αναγράφεται παραπάνω με  $a_L$  συμβολίζεται η ακτίνα επαφής του ημιάπειρου χώρου (υπολογισμένη σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Ting), με  $t$  το συνολικό πάχος του στρώματος, δηλαδή το συνολικό πάχος των στρώσεων και με  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  παριστάνονται οι σταθεροί συντελεστές των οποίων οι τιμές είναι οι εξής:  $c_1 = -1.73$ ,  $c_2 = 0.734$ ,  $c_3 = 1.04$ . Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των μετρήσεων της δοκιμής στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας.

**Πίνακας 1.12.1** Στον πίνακα παριστάνονται οι μέσες τιμές σκληρότητας κατά Shore  $S_m$ , το αντίστοιχο βάθος διείσδυσης  $h$  που προκύπτει κατά το πείραμα, η ακτίνα επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος  $a$ , το φορτίο  $P$  που επιβάλλεται μέσω του εσωτερικού ελατηρίου, το μέτρο διάτμησης  $G$  και το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας  $E$  που ισοδυναμεί με  $E = 3G$  για ασυμπίεστα υλικά, όπως είναι τα ελαστικά. Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή όταν η σκληρομέτρηση υλοποιείται σε μία στρώση λεπτού υλικού, εφαρμόζεται η μεθοδολογία του Ting, ενώ στην περίπτωση πολλών στρώσεων 2-5 η λύση προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Ting αλλά και κάνοντας χρήση της σχέσης που προτείνεται από τους Stevanovic et al. Στην περίπτωση που έχουν τοποθετηθεί 3-5 στρώσεις υλικού τα αποτελέσματα είναι ίδια, όπως φαίνεται παραπάνω. Οι μετρήσεις των δοκιμών πραγματοποιήθηκαν με σκληρόμετρο Shore κλίμακας O. Το πάχος των δοκιμών είναι μετρήσιμο και θεωρείται γνωστό, καθώς και η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή  $r = 1.19$  χιλιοστά, που είναι ενσωματωμένος στη συσκευή κλίμακας O. Εξαιτίας του ανεπαρκούς πάχους του δοκιμίου, δηλαδή  $t = 1.89 \text{ mm} \ll 6.4 \text{ mm}$  για το σκληρόμετρο τύπου O, τα αποτελέσματα για μία στρώση υλικού δε συμπίπτουν με τα

πραγματικά, δίνοντας πολύ μεγάλη τιμή του μέτρου ελαστικότητας λόγω του άκαμπτου υποβάθρου πάνω στο οποίο επικάθεται το δείγμα. Αντίθετα, οι πολλές στρώσεις του ίδιου υλικού αυξάνουν σημαντικά το πάχος του δείγματος, με αποτέλεσμα οι τιμές του  $E$  που προκύπτουν να είναι αρκετά ικανοποιητικές. Παρατηρώντας τον πίνακα φαίνεται ότι και για δύο στρώσεις υλικού το πάχος είναι μικρότερο του απαιτούμενου  $t = 3.78 \text{ mm} < 6.4 \text{ mm}$  και οι μηχανικές ιδιότητες που προκύπτουν δεν ανταποκρίνονται στις πραγματικές. Επιπλέον, παρατηρώντας τις τιμές της ακτίνας επαφής  $a$  στον πίνακα γίνεται φανερό ότι τα αποτελέσματα κατά Ting συμπίπτουν με εκείνα των Stevanovic et al.

Στρώσεις υλικού G&T	Sm	h [mm]	$a_L$ [mm] Ting	$a$ [mm] Stevanovic	P [N]	G [N/ mm <sup>2</sup> ]	E [N/ mm <sup>2</sup> ]
1	81.08	0.473	0.700	0.680	6.631	4.032	12.096
2	79.17	0.521	0.730	0.725	6.488	3.171	9.514
3	75.50	0.613	0.780	0.780	6.213	2.351	7.053
4	75.50	0.613	0.780	0.780	6.213	2.351	7.053
5	75.50	0.613	0.780	0.780	6.213	2.351	7.053



**Εικόνα 1.12.2** Στο παραπάνω διάγραμμα παριστάνεται η καμπύλη μεταξύ της αδιάστατης ακτίνας επαφής  $a/a_L$  και του αδιάστατου πάχους του στρώματος  $\tau =$

$t/a$ . Η καμπύλη του διαγράμματος αυξάνεται με την αύξηση του αδιάστατου μεγέθους  $t$ , ενώ για τιμές  $t/a > 3$  παραμένει σταθερή, όπως απεικονίζεται παραπάνω. Δηλαδή, η καμπύλη διατηρείται σταθερή για μεγάλα πάχη του δοκιμίου σε σχέση με την ακτίνα επαφής που προκύπτει κατά τη διείδυση. Πράγματι, αυτό επαληθεύεται και στον προηγούμενο πίνακα όπου για μεγάλα πάχη τα μεγέθη  $a$  και  $a_L$  είναι ίσα. Το διάγραμμα προέρχεται από τη δημοσίευση των Stevanovic et al. (2001).

### 1.13 Σύγκριση των θεωριών Hertz, Ting, Lin et al. και FEA με τη μορφή διαγραμμάτων

Το 2009 οι Lin et al. δημοσίευσαν ένα άρθρο, που αναφέρεται στη διείσδυση αιχμηρού αντικειμένου σφαιρικής αιχμής σε υπέρ-ελαστικά μοντέλα. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογισμούς των Lin et al. στο πρόβλημα της διείσδυσης, εφαρμόζοντας μικροσφαίρες σαν διεισδυτές, ήταν συνθετικά ελαστικά που προσεγγίζουν τις ιδιότητες των gels, χόνδροι από ντόπια ποντίκια και χόνδροι μηχανικής. Σε αριθμητικές απομιμήσεις ή μονοαξονικές και διαξονικές δοκιμές, η μηχανική απόκριση που εμφανίζουν τα πολυμερή gels καθώς και οι βιολογικοί ιστοί περιγράφεται συχνά με επιτυχία χρησιμοποιώντας γραμμική ελαστική θεωρία στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων και ελαστική θεωρία ελαστικών για μικρές αλλά και μεγάλες παραμορφώσεις. Ύστερα από μία σειρά αναλύσεων και την εφαρμογή προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων οι Lin et al. παρουσιάζουν μία σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a/R$  και της κανονικοποιημένης βύθισης  $h/R$  ενός σφαιρικού διεισδυτή ακτίνας  $R$  σε μία πολυωνυμική μορφή:

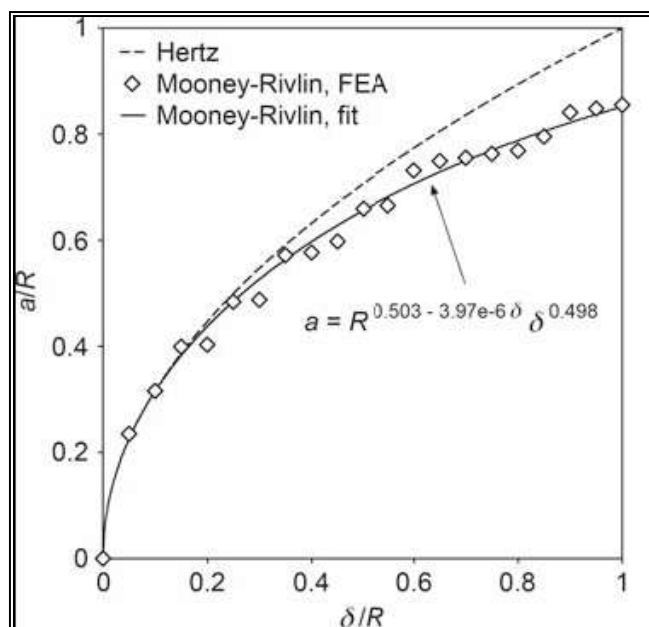
$$\alpha = R^{x-h^*y} h^z \quad (1.21)$$

Πρόκειται λοιπόν, για μία σχέση μεταξύ της ακτίνας επαφής  $a$  και της βύθισης  $h$ . **Η εξίσωση  $\alpha = R^{1/2} h^{1/2}$  εφαρμόζεται σε προβλήματα επαφής σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz, όμως δεν γνωρίζουμε εάν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα υπέρ-ελαστικών μοντέλων.** Έτσι, για μία γενικότερη υπόθεση, οι Lin et al. πρότειναν μία συνάρτηση που έχει τη μορφή της σχέσης που αναγράφεται παραπάνω όπου τα  $x$ ,  $y$ ,  $z$  είναι σταθερές. Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα υπέρ-ελαστικά υλικά των Mooney-Rivlin και του Ogden βασισμένα στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων.

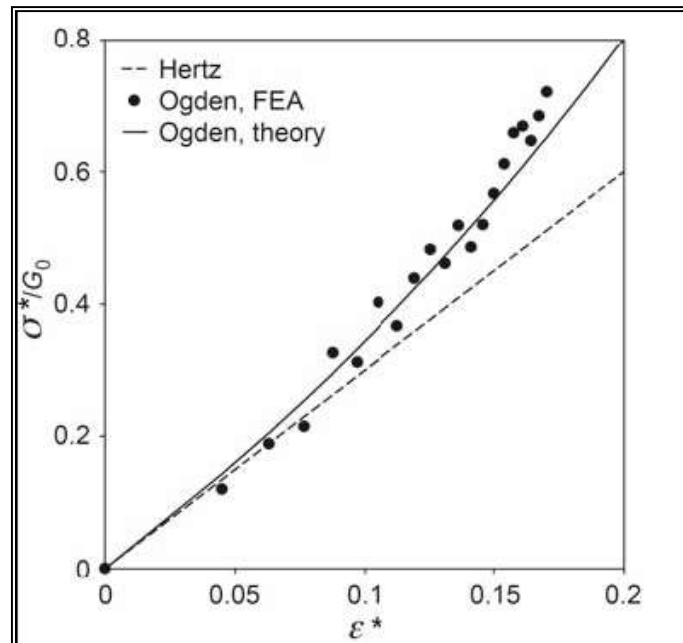
Το μοντέλο των Mooney-Rivlin παρουσιάστηκε σαν μία ειδική υπόθεση πολυωνυμικού τύπου (Mooney 1940). Ακόμη, μελετήθηκε από το Rivlin σε μία σειρά δημοσιεύσεων βασισμένες στις μεγάλες ελαστικές παραμορφώσεις (Rivlin-Saunders 1951) και χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα σε πειραματικούς υπολογισμούς. **Παρόλα αυτά, το μοντέλο των Mooney-Rivlin έχει ένα σημαντικό περιορισμό, σύμφωνα με τον οποίο δεν είναι ικανό να προβλέψει τη συμπεριφορά σε μεγάλες παραμορφώσεις (Han et al. 1999).**

Ακόμη ένα ευρύτατα χρησιμοποιούμενο καταστατικό μοντέλο αναπτύχθηκε από τον Ogden (1972), το οποίο έχει τη δυνατότητα να προβλέπει σε ικανοποιητικό βαθμό τη συμπεριφορά σε μεγάλες παραμορφώσεις. Η ενέργεια παραμόρφωσης σύμφωνα με τον Ogden είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μίας αλγεβρικής δύναμης εξαρτημένης από την παραμόρφωση.

Στις εικόνες που ακολουθούν παριστάνονται γραφικά τα μοντέλα των Mooney-Rivlin και του Ogden συγκρινόμενα με εκείνο του Hertz.



**Εικόνα 1.13.1** Αποτελέσματα με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων (FEA) για τα υπέρ-ελαστικά υλικά των Mooney-Rivlin. Ειδικότερα, στο παραπάνω διάγραμμα με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται η κανονικοποιημένη ακτίνα επαφής  $a$  σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης διείσδυσης  $h$  σύμφωνα με την εξίσωση  $a = R^{1/2} h^{1/2}$  του Hertz, ενώ με συνεχή γραμμή η σχέση μεταξύ των μεγεθών  $a$  και  $h$  βασισμένη στο μοντέλο των Mooney-Rivlin κάνοντας χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Οι υπολογισμοί στο πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων εκτελέστηκαν σύμφωνα με τη σχέση  $a = R^{x-h^*y} h^z$ , όπου η μονάδα του μήκους αντιστοιχεί σε nm. Στην εν λόγω σχέση μπορούμε να διακρίνουμε τρεις παραμέτρους και για το λόγο αυτό η λύση δεν είναι μοναδική.



**Εικόνα 1.13.2** Αποτελέσματα με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων για το υπέρ-ελαστικό υλικό του Ogden. Στο διάγραμμα που παριστάνεται παραπάνω απεικονίζονται καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης, όπως αυτές προκύπτουν από τη δοκιμή διείσδυσης, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς  $\sigma^* = \frac{P}{\pi a^2}$  και

$\varepsilon^* = 0.2 \frac{a}{R}$ . Η ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και το θεωρητικό μοντέλο του Ogden, σύμφωνα με το πίνακα 2 των Lin et al. (2009), υποδεικνύουν σημαντικά τη μη γραμμικότητα. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω η καμπύλη του Hertz είναι γραμμική, ενώ αντίθετα η καμπύλη του Ogden παρουσιάζει μία αύξουσα πορεία καθώς προσεγγίζει παραμόρφωση ίση με 0.2.

Η μορφή αυτή θεωρήθηκε από τους Lin et al. ότι προκύπτει από τη μη γραμμικότητα του καταστατικού νόμου των Mooney-Rivlin. **Αντίθετα, εμείς θεωρούμε ότι η σχέση μεταξύ  $\{a/R - h/R\}$  είναι καθαρά γεωμετρική σχέση στην περίπτωση που έχουμε μεγάλες βυθίσεις και ακολουθεί το νόμο του Ting (1966) που αναγράφεται παρακάτω.** Για το σχεδιασμό της καμπύλης, που είναι βασισμένη στη θεωρία του Hertz, εφαρμόστηκε η σχέση:

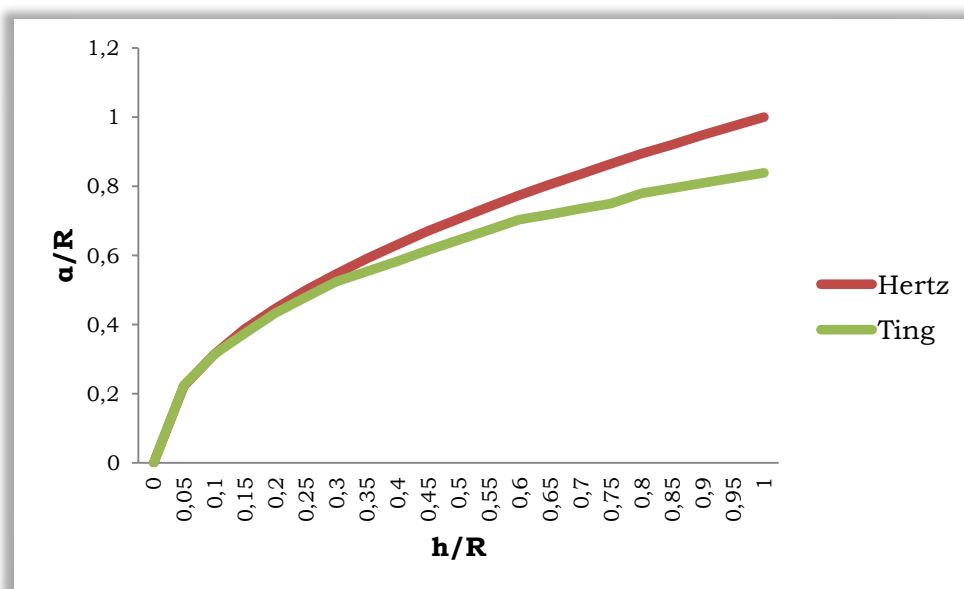
$$\frac{a}{R} = \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.22)$$

Όπου το σύμβολο  $h$  παριστάνει τη βύθιση κατά τη δοκιμή διείσδυσης, ενώ τα  $a$ ,  $R$  συμβολίζουν την ακτίνα επαφής και την ακτίνα του διεισδυτή, αντίστοιχα. Στο ίδιο διάγραμμα απεικονίζεται η καμπύλη του Ting σύμφωνα με την εξίσωση:

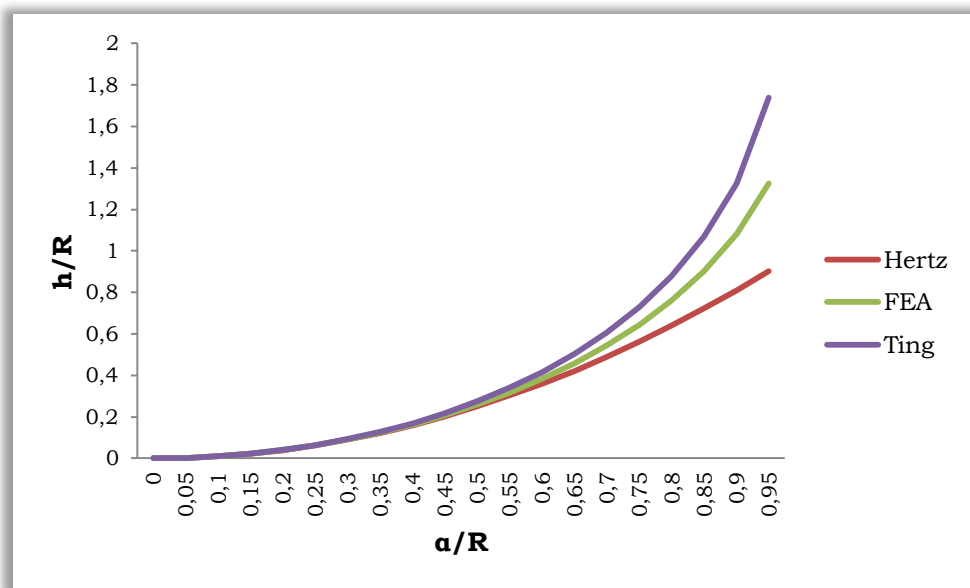


$$\frac{h}{R} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{R} \ln \frac{1 + \frac{\alpha}{R}}{1 - \frac{\alpha}{R}} \quad (1.23)$$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παριστάνονται οι δύο καμπύλες του Hertz και του Ting, αντίστοιχα. **Όπως φαίνεται παρακάτω η καμπύλη του Ting είναι σύμφωνη με εκείνη των Lin et al., όμως δεν οφείλεται στη μη γραμμικότητα του καταστατικού νόμου αλλά στη γεωμετρία του μοντέλου. Το διάγραμμα λοιπόν, των Lin et al. είναι σωστό και επαληθεύεται από το νόμο του Ting.** Παρόλα αυτά, το συμπέρασμά τους είναι λανθασμένο.



**Γράφημα 1.13.1** Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι καμπύλες  $\{h/R - a/R\}$  σύμφωνα με το συντηρητικό μοντέλο του Hertz (κόκκινη καμπύλη) καθώς και με το μοντέλο του Ting (πράσινη καμπύλη). Οι ποσότητες  $a$ ,  $h$ ,  $R$  παριστάνουν την ακτίνα επαφής, το βάθος διείσδυσης και την ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή, αντίστοιχα. Το μοντέλο του Ting συμπίπτει με εκείνο του Hertz για μικρές βυθίσεις, ενώ για μεγάλες τιμές του βάθους διείσδυσης  $h$  αποκλίνει σημαντικά και η ακτίνα επαφής σε αυτή την περίπτωση είναι μικρότερη σε σχέση με εκείνη του Hertz. Παρατηρώντας προσεκτικά την παραπάνω γραφική παράσταση μπορούμε να δούμε ότι συμπίπτει με το αντίστοιχο διάγραμμα των Lin et al. που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ακτίνας επαφής και της βύθισης και αφορά το μοντέλο των Mooney-Rivlin. Μπορούμε λοιπόν, να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία που ακολουθήθηκε από τους Lin et al. είναι σωστή καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, όμως σε ότι αφορά το συμπέρασμα περί γραμμικότητας καταλήγουμε να πούμε ότι η μορφή του διαγράμματος οφείλεται καθαρά στη γεωμετρία, όπως αποδεικνύεται από το νόμο του Ting.

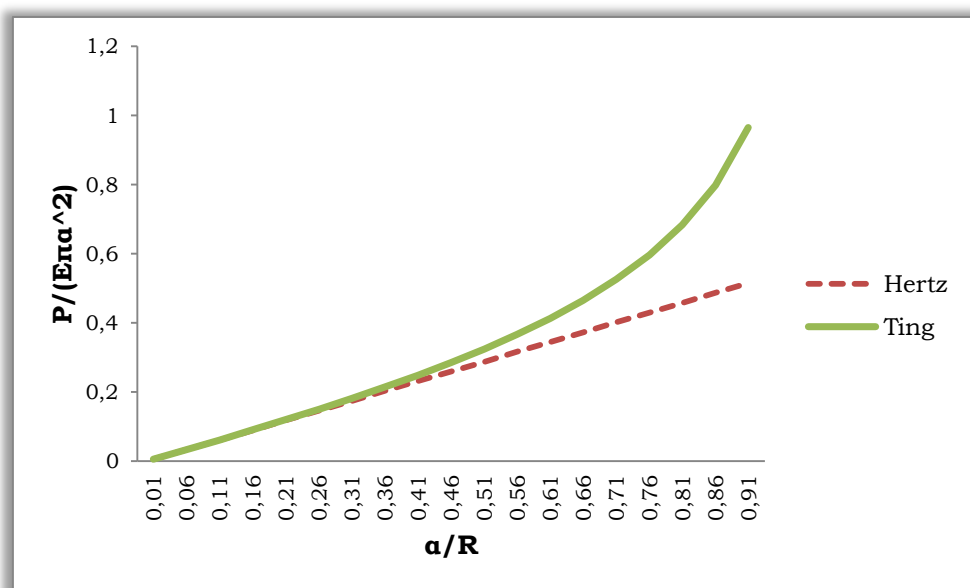


**Γράφημα 1.13.2** Αντίστοιχο διάγραμμα με το προηγούμενο με εναλλαγή των αξόνων. Σε αυτή την περίπτωση συμπεριλαμβάνονται και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αντίστοιχη σχέση των πεπερασμένων στοιχείων (FEA). Η εξίσωση από την οποία προέρχεται η καμπύλη FEA έχει τη μορφή

$$\frac{h}{R} = \left( \frac{a^2}{R^2} \right) \Phi_5 \left( \frac{a}{R} \right).$$

Στην προηγούμενη εξίσωση

$\Phi_5 \left( \frac{a}{R} \right) = \exp \left[ 0.225 \left( \frac{a}{R} \right)^{10} + 0.29 \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right]$ . Οι τιμές της καμπύλης FEA είναι ενδιάμεσες των θεωριών Hertz και Ting, όπως φαίνεται στο γράφημα.



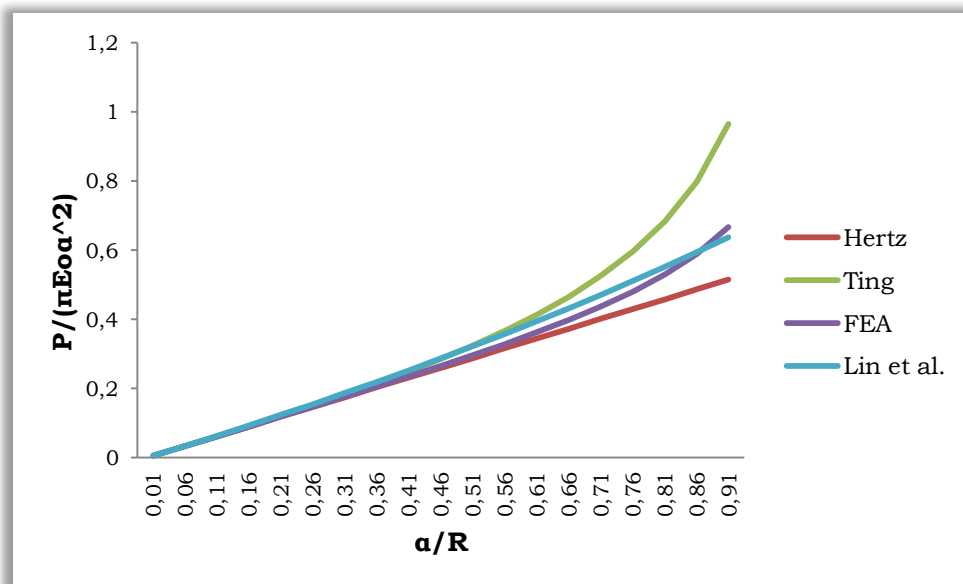
**Γράφημα 1.13.3** Στο παραπάνω διάγραμμα παριστάνεται η σχέση μεταξύ του επιβαλλόμενου φορτίου  $P$  και της ακτίνας επαφής  $a$ . Η διακεκομμένη καμπύλη (κόκκινη) ακολουθεί τη σχέση του Hertz μεταξύ του εφαρμοσμένου φορτίου και

του βάθους διείσδυσης  $P = \frac{4ER^{1/2}h^{3/2}}{3(1-\nu^2)}$ . Η καμπύλη που προκύπτει από την

εξίσωση είναι γραμμική, όπως μπορούμε να διακρίνουμε στο σχήμα. Αντίθετα, η συνεχής καμπύλη (πράσινη) είναι βασισμένη στη σχέση του Ting

$cP = (R^2 + \alpha^2) \log \frac{R + \alpha}{R - \alpha} - 2\alpha R$ , και ακολουθεί ανοδική πορεία για μεγάλες

ακτίνες επαφής  $\alpha$ . Οι δύο καμπύλες συμπίπτουν για μικρές τιμές της ακτίνας επαφής  $\alpha$ , δηλαδή επαληθεύεται για αυτές τις τιμές το συντηρητικό μοντέλο του Hertz, ενώ αποκλίνουν σημαντικά για μεγάλες τιμές αυτής. Συγκρίνοντας λοιπόν, το διάγραμμα αυτό με εκείνο του Ogden που εκφράζει τη σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης, που κατασκεύασαν οι Lin et al., παρατηρούμε ότι πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο διάγραμμα. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η μεθοδολογία του Ting (1966) και το συμπέρασμα που προκύπτει είναι γενικότερο και βασισμένο στη γεωμετρία του προβλήματος.



**Γράφημα 1.13.4** Αντίστοιχο γράφημα με το προηγούμενο που συμπεριλαμβάνει τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων (FEA) και τη θεωρία των Lin et al. Όπως μπορούμε να δούμε από το διάγραμμα, οι καμπύλες των Lin et al. και FEA δείχνουν να συγκλίνουν καθώς αυξάνεται η ακτίνα επαφής, με μικρές διαφοροποιήσεις και ταυτίζονται για τιμές  $a/R$  ίσες με 0.86.

Τα διαγράμματα των Hertz, Ting, FEA και Lin et al. που απεικονίζονται παραπάνω εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$  και της ακτίνας επαφής  $\alpha$ . Η καμπύλη του Hertz προέρχεται από τη σχέση που ακολουθεί:

$$P = \frac{4ER^{1/2}h^{3/2}}{3(1-\nu^2)} \quad (1.24)$$

Όπου με  $P$  παριστάνεται η επιβαλλόμενη δύναμη στο διεισδυτή, με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, με  $R$  η ακτίνα του διεισδυτή, με  $h$  το βάθος διείσδυσης και με  $\nu$  ο λόγος του Poisson. Για το σχεδιασμό της καμπύλης η παραπάνω σχέση τροποποιήθηκε ως εξής:

$$\frac{P}{E\pi\alpha^2} = \frac{16}{9} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{R} \quad (1.25)$$

Αντίστοιχα, για την ολοκλήρωση του διαγράμματος σχεδιάστηκε η καμπύλη του Ting, όπως διακρίνουμε παραπάνω, βασισμένη στην εξίσωση:

$$cP = (R^2 + \alpha^2) \log \frac{R + \alpha}{R - \alpha} - 2\alpha R \quad (1.26)$$

Όπου με  $c$  συμβολίζεται το μέγεθος που εμπεριέχει το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , ενώ οι υπόλοιπες ποσότητες περιγράφηκαν παραπάνω. Η σχέση για τον σχεδιασμό του διαγράμματος έλαβε την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{P}{E\pi\alpha^2} = \frac{2}{3\pi} \left[ \left( \frac{R^2}{a^2} + 1 \right) \ln \frac{1 + \frac{a}{R}}{1 - \frac{a}{R}} - 2 \frac{R}{a} \right] \quad (1.27)$$

Η καμπύλη των πεπερασμένων στοιχείων (FEA) στην παραπάνω καμπύλη δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{P}{\pi E_0 a^2} = \left( \frac{16}{9\pi} \frac{\alpha}{R} \right) \Phi_4 \left( \frac{\alpha}{R} \right) \quad (1.28)$$

$$\Phi_4 \left( \frac{\alpha}{R} \right) = \exp \left[ 0.275 \left( \frac{\alpha}{R} \right)^{10} + 0.225 \left( \frac{\alpha}{R} \right)^3 \right] \quad (1.29)$$

Αντίστοιχα, η καμπύλη των Lin et al. δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \pi B_1 \left( \frac{\alpha^5 - 15Ra^4 + 75R^2a^3}{5Ra^2 - 50R^2a + 125R^3} \right) \quad (1.30)$$

$$B_1 = \frac{20E_0}{9\pi(1-\nu^2)} \quad (1.31)$$

Συγκρίνοντας λοιπόν, το διάγραμμα  $\left\{ \frac{P}{E\pi\alpha^2} - \frac{a}{R} \right\}$  των Hertz και Ting με εκείνο του Ogden που εκφράζει τη σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης, που κατασκεύασαν οι Lin et al., παρατηρούμε ότι

πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο διάγραμμα. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η μεθοδολογία του Ting (1966) και το συμπέρασμα που προκύπτει είναι γενικότερο και βασισμένο στη γεωμετρία του προβλήματος.

Επιπρόσθετα, λόγω των πολύ μαλακών υλικών που προτείνονται για τη μέτρηση (π.χ. αρτηρίες) αναμένονται μεγάλες τιμές παραμόρφωσης διείσδυσης ( $h/R$  και  $a/R$ ). Επομένως, οι σχέσεις του Ting (1966) δείχνουν να δίνουν σημαντική βελτίωση στα αναλυτικά αποτελέσματα. Παρατηρούμε επίσης ότι τα πειραματικά αποτελέσματα των Lin et al. ουσιαστικά μπορούν να ερμηνευθούν από την ακριβή γεωμετρία του διεισδυτή (σφαίρα και όχι παραβολοειδές). Οι Lin et al. προτείνουν ότι τα πειραματικά δεδομένα ερμηνεύονται λόγω μη γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών, πράγμα το οποίο δεν ισχύει.

Όλες οι θεωρίες που προαναφέρθηκαν και εφαρμόζονται για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας  $E_0$  ισχύουν για γραμμικά ελαστικά υλικά. Όπως αποδεικνύεται όμως και από τα πειράματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση των ελαστομερών υλικών τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες παραμορφώσεις καθώς και για ποικιλία διεισδυτών. Τα ελαστομερή υλικά ανήκουν στην κατηγορία των υπέρ ελαστικών υλικών, τα οποία είναι έντονα μη γραμμικά υλικά! Για τις θεωρίες αυτές πραγματοποιήθηκε έλεγχος ότι ισχύουν και για μη γραμμικά υλικά.

## Παράρτημα Α

### 1.14 Σκληρομέτρηση του υλικού με κωδικό S/ N Blue Xo 120974



**Εικόνα 1.14.1** Κυκλική οθόνη αναλογικού σκληρόμετρου Shore κλίμακας O. Πρόκειται για μη φορητή συσκευή, η οποία χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση του πειράματος του μαλακού δείγματος, χρώματος μπλε, που φαίνεται στην εικόνα. Επιπρόσθετα, στην εικόνα διακρίνεται και ο μετρούμενος συντελεστής Shore, στην οθόνη του οργάνου, του οποίου οι τιμές κυμαίνονται από μηδέν (0) έως εκατό (100). Στην προκειμένη περίπτωση το υπό δοκιμή υλικό εμφανίζει σκληρότητα ίση με  $S=67$  περίπου. Η τιμή αυτή της σκληρότητας εκφράζει πόσο μαλακό ή σκληρό είναι ένα υλικό δοκίμιο. Το δείγμα, λοιπόν, ύστερα από τη μέτρηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως υλικό με μέτρια σκληρότητα, με την προϋπόθεση ότι η τιμή μηδέν αντιστοιχεί σε πολύ μαλακά υλικά, ενώ η τιμή εκατό σε ιδιαίτερα σκληρά δοκίμια. Μεταξύ της κυκλικής οθόνης και του υλικού διακρίνεται ο διεισδυτής κυκλικής αιχμής και ένα επίπεδο «πόδι», το οποίο χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της παραλληλίας μεταξύ του «ποδιού» και του δείγματος. Κάτω από την οθόνη της συσκευής τοποθετείται το υλικό, πάνω σε μία άκαμπτη επίπεδη επιφάνεια. Παρατηρώντας την εικόνα, πρόκειται για ένα υλικό μπλε χρώματος, όπως προαναφέρθηκε, με κωδικό S/ N Blue Xo 120974.



**Εικόνα 1.14.2** Πλάγια όψη του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O. Επιλέχθηκε συσκευή κλίμακας O, επειδή τα υπό δοκιμή υλικά είναι συνήθως μαλακά ελαστικά, αλλά και υλικά με μέτρια πυκνότητα, όπως είναι για παράδειγμα το τεχνητό μετάξι, το orlon και το nylon. Στην εικόνα διακρίνεται η κυκλική, αναλογική οθόνη του σκληρόμετρου, το επίπεδο «πόδι» που καθορίζει την παραλληλία μεταξύ του οργάνου και του δείγματος και το υπό δοκιμή υλικό. Το σκληρόμετρο τύπου O είναι μία σταθερή συσκευή που κάνει περισσότερο αξιόπιστες τις μετρήσεις σκληρότητας του υλικού.



**Εικόνα 1.14.3** Κύρια όψη του σκληρόμετρου Shore. Στην εικόνα φαίνεται ο διεισδυτής του σκληρόμετρου κλίμακας O, που χαρακτηρίζεται από μία αιχμή

σφαιρικού σχήματος και έχει ακτίνα ίση με 0.0468 ίντσες. Η κλίμακα Shore O ακολουθεί το πρότυπο ASTM D 2240, ενώ η μέγιστη δύναμη που μπορεί να επιβάλλει το εσωτερικό βαθμονομημένο ελατήριο στο δοκίμιο είναι ίση με 821 γραμμάρια.



**Εικόνα 1.14.4** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore κλίμακας O. Όπως φαίνεται στην εικόνα, πρόκειται για σταθερή συσκευή μέτρησης της σκληρότητας που χαρακτηρίζεται ως «περίπτερο». Η οθόνη του σκληρόμετρου δείχνει σκληρότητα ίση με μηδέν, ενώ ο διεισδυτής βρίσκεται σε σχετική απόσταση με το δείγμα. Σύμφωνα με την εικόνα, ο μοχλός του οργάνου είναι «ελεύθερος» επισημαίνοντας ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί ακόμη η σκληρομέτρηση.





**Εικόνα 1.14.5** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore κλίμακας O, του οποίου οι ιδιότητες έχουν περιγραφεί εκτενέστερα προηγουμένως. Σε αντίθεση με την προηγούμενη εικόνα, στην περίπτωση αυτή, η φωτογραφία πάρθηκε κατά τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας, εφόσον φαίνεται ο διεισδυτής να έχει εισχωρήσει μέσα στο υλικό, ενώ ο δείκτης στην κυκλική οθόνη του οργάνου, που δεν είναι πλέον ίσος με μηδέν, εκφράζει την τιμή της σκληρότητας του δοκιμίου, δηλαδή τον συντελεστή Shore κατά τη διάρκεια της μέτρησης.

## Παράρτημα Β

### 1.15 Σκληρομέτρηση σε ελαστικά δείγματα



**Εικόνα 1.15.1** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore κλίμακας O, με το οποίο πραγματοποιήθηκαν οι μετρήσεις του πειράματος. Στην παραπάνω εικόνα, φαίνεται ο μετρούμενος συντελεστής Shore που διακρίνεται στην κυκλική οθόνη του οργάνου, ενώ η τιμή της σκληρότητας είναι ίση με μηδέν, τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, εφόσον δεν επιβάλλεται δύναμη στο δείγμα διαμέσου του εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου της συσκευής. Το υπό δοκιμή υλικό τοποθετείται πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια, ενώ το επίπεδο «πόδι» του οργάνου καθορίζει την παραλληλία μεταξύ του σκληρόμετρου και του υλικού καθώς και την καθετότητα μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος. Το δείγμα ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών, έχει μαύρο χρώμα και πάχος ίσο με 11 χιλιοστά. Το πάχος του δοκιμίου είναι επαρκές για την υλοποίηση της σκληρομέτρησης, εφόσον το ελάχιστο πάχος του δείγματος, για να μπορεί να γίνει η μέτρηση με την εν λόγω συσκευή και τα αποτελέσματά της να είναι αξιόπιστα, πρέπει να είναι τουλάχιστον 6.4 χιλιοστά. Ουσιαστικά, το δείγμα διαθέτει διπλάσιο πάχος σε σχέση με το απαιτούμενο και έτσι τα αποτελέσματα της μέτρησης θεωρούνται αξιόπιστα.



**Εικόνα 1.15.2** Απεικόνιση του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O κατά τη διάρκεια της σκληρομέτρησης. Παρατηρείται ότι ο διεισδυτής έχει εισχωρήσει μέσα στην επιφάνεια του ελαστικού, όπως φαίνεται στην εικόνα, ενώ ο δείκτης στην κυκλική οθόνη του οργάνου, που δεν είναι πλέον μηδενικός, εκφράζει την τιμή του συντελεστή Shore και κατ' επέκταση τη σκληρότητα του ελαστικού, η οποία λαμβάνεται περίπου ίση με 80 O. Έτσι, το αποτέλεσμα της μέτρησης δείχνει ότι πρόκειται για ένα σκληρό υλικό.



**Εικόνα 1.15.3** Κύρια όψη του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O. Στη παραπάνω φωτογραφία, απεικονίζονται δύο ελαστικά διαφορετικού πάχους, για τα οποία είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί η σκληρότητα κατά Shore. Όπως παρατηρείται, πάνω στο αρχικό ελαστομερές υλικό, που περιγράφηκε

προηγούμενως, επικάθεται ένα ελαστικό, που ονομάζεται G&T, με ιδιότητες παρόμοιες με το αρχικό, πράγμα το οποίο επαληθεύεται και μετά το πέρας της σκληρομέτρησης. Το δείγμα G&T δεν διαθέτει επαρκές πάχος, ώστε να μπορεί να μετρηθεί με το συγκεκριμένο σκληρόμετρο κλίμακας O. Για το λόγο αυτό, τοποθετείται πάνω στην επιφάνεια του προηγούμενου δοκιμίου, έτσι ώστε να παρθούν αξιόπιστα αποτελέσματα. Για τη μέτρηση πολύ λεπτών δοκιμίων, όπως αυτό, δεν ενδείκνυνται σκληρόμετρα Shore τύπου O. Συσκευές κατάλληλες για να υπολογίσουν τη σκληρότητα λεπτών υλικών με ακανόνιστο σχήμα είναι τα σκληρόμετρα Shore κλίμακας M. Παρόλα αυτά, η μέτρηση του δοκιμίου G&T μπορεί να υλοποιηθεί με το σκληρόμετρο Shore τύπου O, χρησιμοποιώντας κάποιο υλικό, με γνωστές ιδιότητες, ως υπόστρωμα, όπως πραγματοποιήθηκε στην προκειμένη περίπτωση.

## Παράρτημα Γ

### 1.16 Σκληρομέτρηση σε ελαστικό δοκίμιο με κωδικό G&T



**Εικόνα 1.16.1** Ελαστομερές υλικό που χαρακτηρίζεται ως G&T. Ειδικότερα, πρόκειται για ελαστικό δοκίμιο που συχνά εφαρμόζεται στις ζάντες των αυτοκινήτων. Όπως φαίνεται στη φωτογραφία, το δοκίμιο χαρακτηρίζεται από σκούρο μαύρο χρώμα, διαθέτει πολύ μικρό πάχος ίσο με 1.89 χιλιοστά, ενώ το σχήμα του είναι ιδιόμορφο. Το δοκίμιο έχει κοπεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε δοκιμές εφελκυσμού. Έτσι δικαιολογείται και η παρουσία λαιμού στο μεσαίο τμήμα του δείγματος.



**Εικόνα 1.16.2** Δοκιμή σκληρομέτρησης με συσκευή Shore κλίμακας O. Το υπό δοκιμή υλικό ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών. Όπως διακρίνεται



στην εικόνα, διαθέτει πολύ μικρό πάχος. Εξαιτίας αυτού τα αποτελέσματα σκληρότητας που θα προκύψουν είναι αναξιόπιστα, εφόσον επηρεάζονται σημαντικά από το άκαμπτο υπόβαθρο. Η αναλογική οθόνη δείχνει σκληρότητα ίση με μηδέν, εφόσον ο διεισδυτής και το δείγμα βρίσκονται σε σχετική απόσταση μεταξύ τους.

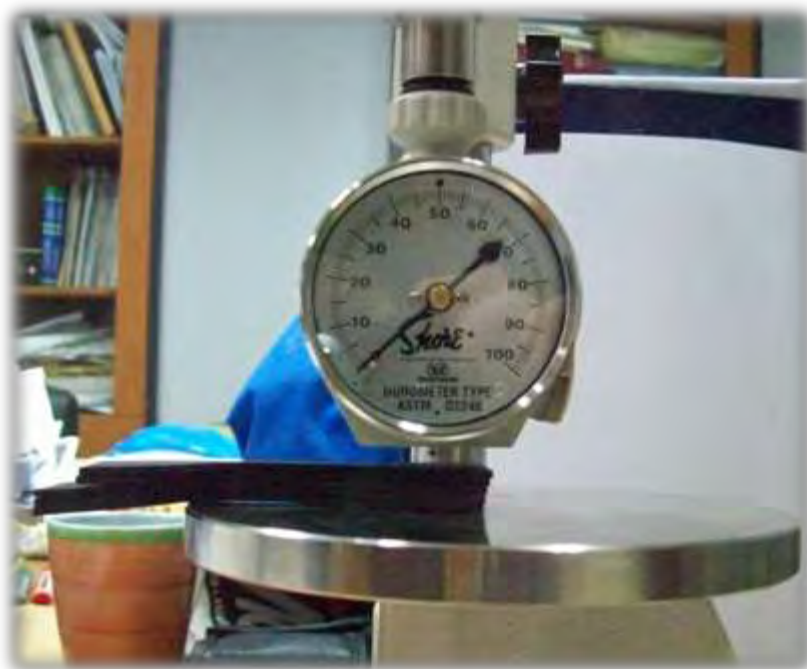


**Εικόνα 1.16.3** Δοκιμή σκληρομέτρησης κάνοντας χρήση Durometer Shore κλίμακας O. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούνται ως δοκίμια δύο στρώσεις του ελαστικού G&T, με στόχο την αύξηση του πάχους του δείγματος και ταυτόχρονα τη μείωση της επιρροής του άκαμπτου υποστρώματος του οργάνου στα αποτελέσματα της σκληρομέτρησης.



**Εικόνα 1.16.4** Σκληρόμετρο Shore κλίμακας O. Στην εικόνα διακρίνεται η σφαιρική αιχμή του διεισδυτή. Επιπρόσθετα, για την ελαχιστοποίηση της

επιρροής του άκαμπτου υποστρώματος του οργάνου, το δοκίμιο επικάθεται πάνω σε δύο ομοειδή ελαστικά. Σε αυτή την περίπτωση, τα αποτελέσματα της μέτρησης που πάρθηκαν ήταν περισσότερο αντιπροσωπευτικά.



**Εικόνα 1.16.5** Δοκιμή σκληρομέτρησης κατά Shore. Το σκληρόμετρο που χρησιμοποιήθηκε ανήκει στην κλίμακα O και σε αυτή την περίπτωση, ενώ για την υλοποίηση του πειράματος χρησιμοποιήθηκαν πέντε στρώσεις ελαστομερούς υλικού G&T ίδιου πάχους. Το τελικό δείγμα που συνθέτουν τα πέντε ομοειδή δοκίμια δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα, αρκετά κοντά στα πραγματικά.



**Εικόνα 1.16.6** Πλάγια όψη του σκληρόμετρου Shore λίγο πριν τη μέτρηση της σκληρότητας του δείγματος που αποτελείται από ένα πλήθος ομοειδών δοκιμίων.



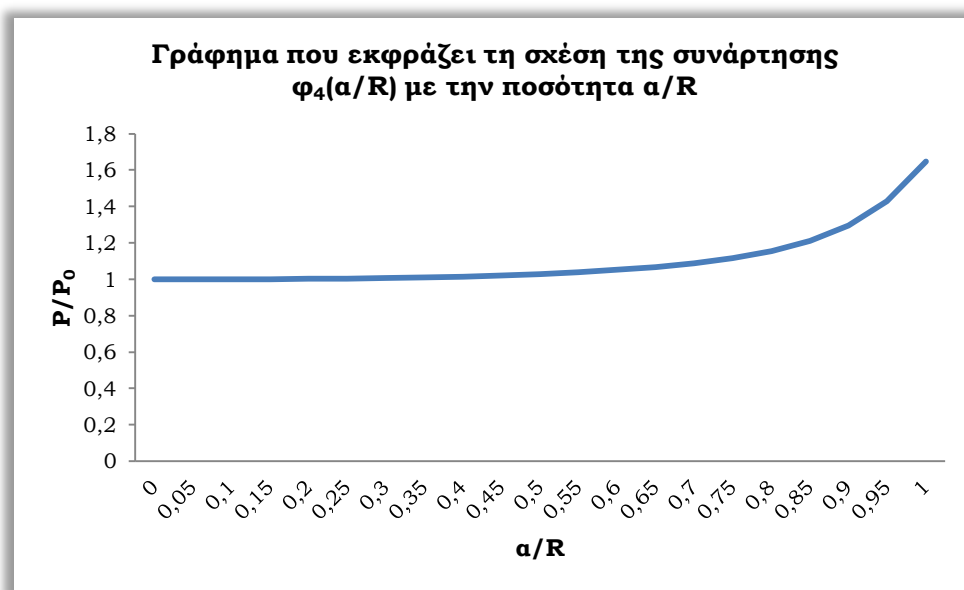
## Παράρτημα Δ

Το 2009 οι Lin et al. δημοσίευσαν ένα άρθρο, που αναφέρεται στη διείδυση αιχμηρού αντικειμένου σφαιρικής αιχμής σε υπέρ-ελαστικά μοντέλα. Για τη δημιουργία ενός γραφήματος πεπερασμένων στοιχείων (FEA) που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ακτίνας επαφής  $a$  και του βάθους διείδυσης  $h$  χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εξισώσεις:

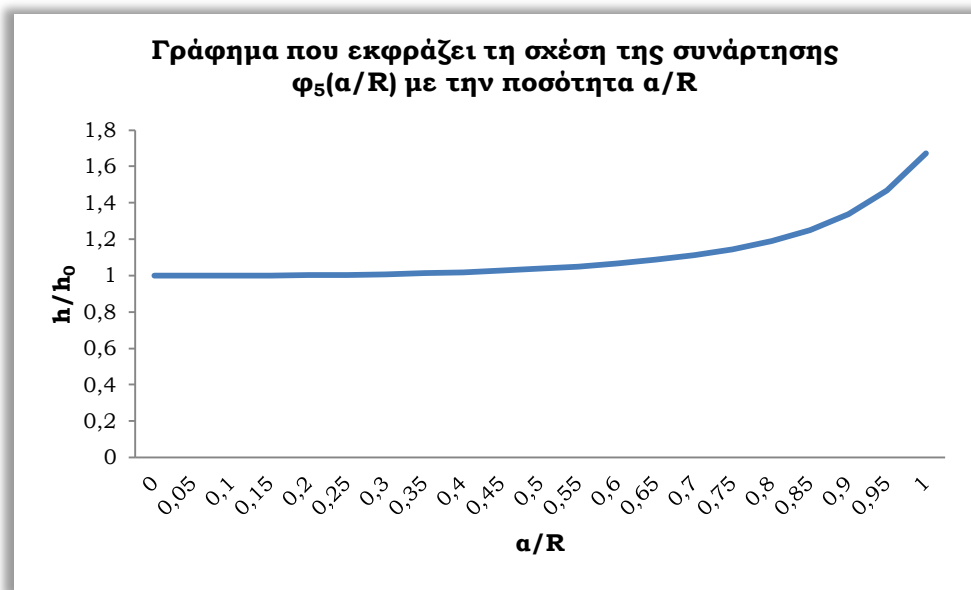
$$\Phi_4\left(\frac{a}{R}\right) = \exp\left[0.275\left(\frac{a}{R}\right)^{10} + 0.225\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]$$

$$\Phi_5\left(\frac{a}{R}\right) = \exp\left[0.225\left(\frac{a}{R}\right)^{10} + 0.29\left(\frac{a}{R}\right)^3\right].$$

Οι γραφικές παραστάσεις των ανωτέρω σχέσεων είναι οι εξής:



**Γράφημα 1.17.1** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση της συνάρτησης  $\Phi_4(a/R)$  με την ποσότητα  $a/R$ .



**Γράφημα 1.17.2** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση της συνάρτησης  $\varphi_5(a/R)$  με την ποσότητα  $a/R$ .

## Κεφάλαιο 2

### 2.1 Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M

Το σκληρόμετρο Shore μπορεί να χαρακτηριστεί ως το πιο διαδεδομένο όργανο μέτρησης σκληρότητας πλαστικών υλικών. Για την μέτρηση των διαφόρων δειγμάτων υπάρχουν 12 κλίμακες Shore με 7 διαφορετικούς τύπους διεισδυτών. Ανάλογα με το είδος του υλικού χρησιμοποιείται και η κατάλληλη για το πείραμα κλίμακα. Στην περίπτωση ιδιαίτερα λεπτών δοκιμίων, που διαθέτουν ανεπαρκές πάχος, επιλέγεται η κλίμακα Shore M. Τα δοκίμια που ελέγχονται με χρήση αυτής της κλίμακας είναι συνήθως ελαστικά υλικά, τα οποία πρέπει να έχουν ελάχιστο πάχος 1.25 χιλιοστά, έτσι ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί η δοκιμή. Ο διεισδυτής που εφαρμόζεται χαρακτηρίζεται από μία κωνική αιχμή, ενώ η δοκιμή βασίζεται στο πρότυπο ASTM D 2240.

Όλα τα σκληρόμετρα, εκτός της κλίμακας M, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως φορητές συσκευές. Έτσι, στην περίπτωση του τύπου Shore M συνιστάται η χρήση μόνο σταθερών συσκευών που χαρακτηρίζονται ως «περίπτερα» και ταυτόχρονα προϋποθέτουν καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τα όργανα χειρός και είναι απαραίτητα για τον έλεγχο της κλίμακας M, λόγω της ευαισθησίας που παρουσιάζει η μέτρηση.

Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζονται αναλυτικά σκληρόμετρα Shore κλίμακας M, που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της σκληρότητας πολύ λεπτών μαλακών υλικών με ακανόνιστο σχήμα, όπως προαναφέρθηκε.



**Εικόνα 2.1.1** Η συσκευή Automatic O- Ring Hardness Tester, DigiTest, παράγει ακριβής και επαληθεύσιμες μετρήσεις σκληρότητας σε μαλακά

ελαστομερή, ελαστικά και πλαστικά υλικά. Το δείγμα που εξετάζεται από μία συσκευή τέτοιου τύπου Shore διαθέτει συνήθως ανεπαρκές πάχος (είναι ουσιαστικά πολύ λεπτό υλικό) ή έχει ακανόνιστο σχήμα. Το πάχος του δείγματος δεν πρέπει να είναι μικρότερο από 1.25 χιλιοστά. Ο διεισδυτής που είναι ενσωματωμένος στο όργανο χαρακτηρίζεται από μία κωνική αιχμή, ενώ ταυτόχρονα η κάθοδος του προς το δείγμα ελέγχεται υδραυλικά, έτσι ώστε να επιτευχθεί η ελάχιστη δυνατή διείσδυση στο υλικό και κατά συνέπεια να προκύψει μικρότερη παραμόρφωση του δοκιμίου. Το σκληρόμετρο Shore Automatic O- Ring είναι σύμφωνο με το πρότυπο ASTM D 2240 για την κλίμακα M. Η παραπάνω φωτογραφία προέρχεται από την ηλεκτρονική σελίδα <http://www.worldftest.com/oringautomat.htm>.

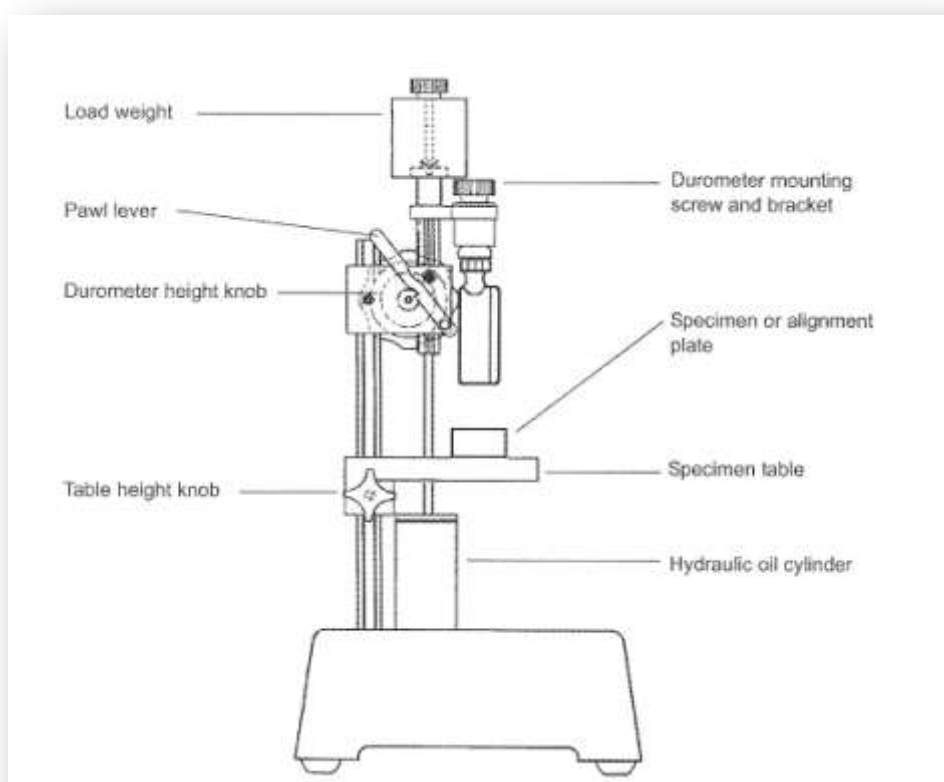


**Εικόνα 2.1.2** Το σκληρόμετρο HPE Type M/ AM Digital Micro Shore είναι ιδανικό για ακριβή και επαληθεύσιμα αποτελέσματα σκληρότητας σε μαλακά ελαστομερή υλικά, τα οποία διαθέτουν πολύ μικρό πάχος ή ακανόνιστο σχήμα για τις συνήθεις συσκευές Shore. Το HPE Type M/ AM σκληρόμετρο μετρά με ακρίβεια τα δείγματα πάχους τουλάχιστον 1.25 mm. Ο μοναδικός σχεδιασμός της συσκευής shore κλίμακας M ελαχιστοποιεί την παραμόρφωση του υλικού. Η μέθοδος τύπου M είναι σύμφωνη με τα πρότυπα ASTM D 2240 (τύπος M) και ISO 7619 (τύπος AM). Με την εξαιρετικά ακριβής δύναμη που επιβάλλει (η μέγιστη τιμή της δύναμης είναι ίση με 78 gr για την κλίμακα M) στο δοκίμιο εξασφαλίζει συνεπή αποτελέσματα με ακρίβεια και επαναληψιμότητα. Η εικόνα μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση <http://www.worldoftest.com/hpe-am-m.htm>.

## 2.2 Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M (Micro O – Ring Hardness Tester)

**Η** διακύμανση της ταχύτητας κατά την εφαρμογή του σκληρόμετρου Shore είναι συχνά η αιτία για τις διαφορετικές ενδείξεις σκληρότητας του οργάνου. Σε περίπτωση που η επιφάνεια του δείγματος έχει την ιδιότητα να γλιστράει, υπάρχει η δυνατότητα να ληφθεί λανθασμένο αποτέλεσμα, εάν ο χειριστής εφαρμόσει το σκληρόμετρο με μεγάλη ταχύτητα πάνω στο υπό δοκιμή υλικό.

Η συσκευή Micro O-Ring Hardness Tester διαθέτει έναν υδραυλικό κύλινδρο, που ελέγχει αυτόματα την ταχύτητα με την οποία εφαρμόζεται το Durometer πάνω στο δείγμα. Όταν αποδεσμεύσουμε τον μοχλό του οργάνου, το σκληρόμετρο κινείται προς τα κάτω με σταθερό ρυθμό, ελεγχόμενο από την βαθμονομημένη αντίσταση του λαδιού διαμέσου του υδραυλικού πιστονιού της συσκευής. Ο διεισδυτής του σκληρόμετρου λοιπόν, εφάπτεται στο δείγμα με σταθερή ταχύτητα και δύναμη, εξασφαλίζοντας με τον τρόπο αυτό επαναληψιμότητα και ακρίβεια όσον αφορά τα αποτελέσματα των πειραμάτων. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται τα συστατικά του οργάνου Micro O-Ring.



**Εικόνα 2.2.1** Σχηματική απεικόνιση των βασικών συστατικών του σκληρόμετρου Micro O-Ring Hardness Tester κλίμακας M. Η συσκευή

αποτελείται από την αναλογική οθόνη, στην οποία αναγράφονται οι διάφορες ενδείξεις σκληρότητας του υπό δοκιμή υλικού. Επιπρόσθετα, το όργανο αποτελείται από το μοχλό που δίνει την δυνατότητα κίνησης στο διεισδυτή, το κουμπί που καθορίζει το ύψος της συσκευής, το «πίατο» ευθυγράμμισης, το «τραπέζι» του δείγματος, το κουμπί που καθορίζει το ύψος του υπόβαθρου και τον υδραυλικό κύλινδρο λαδιού. Το διάγραμμα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [www.shoreinstruments.com](http://www.shoreinstruments.com).



**Εικόνα 2.2.2** Σκληρόμετρο Shore Micro O-Ring κλίμακας M. Πρόκειται για σκληρόμετρο ακριβείας, με δυνατότητα επαναληψιμότητας όσον αφορά τις ενδείξεις σκληρότητας, όταν εφαρμόζεται πάνω σε επιφάνειες ιδιαίτερα λεπτών ελαστομερών υλικών ή δοκιμίων με «ανώμαλο» σχήμα. Η συσκευή Micro O-Ring βρίσκει εφαρμογή συνήθως σε δείγματα που έχουν ελάχιστο πάχος 1.25 χιλιοστά (0.05 in) καθώς και σε υλικά το πάχος των οποίων φτάνει έως 7 χιλιοστά (0.275 in). Το σκληρόμετρο Shore τύπου M ακολουθεί τον κανονισμό ASTM D 2240. Όσον αφορά την επεκτασιμότητα του διεισδυτή του οργάνου, σε αυτή την περίπτωση φτάνει μέχρι 1.25 χιλιοστά (0.049 in), σε αντίθεση με το σκληρόμετρο τύπου O, του οποίου ο διεισδυτής επεκτείνεται έως 2.50 χιλιοστά, όπως έχει προαναφερθεί. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της ευαισθησίας του ιδιαίτερα λεπτού δείγματος στη δοκιμή σκληρομέτρησης, η δύναμη που επιβάλλεται διαμέσου του εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου του οργάνου είναι πολύ μικρή σε σχέση με συσκευές Shore διαφορετικής κλίμακας και ίση με 78 γραμμάρια.



**Εικόνα 2.2.3** Αναλογικό σκληρόμετρο Shore Micro O-Ring κλίμακας M. Πρόκειται για σταθερή συσκευή που εφαρμόζεται κυρίως για τη μέτρηση ελαστομερών υλικών ανεπαρκούς πάχους. Κάτω από το υπόβαθρο που τοποθετείται το δείγμα βρίσκεται ένας υδραυλικός κύλινδρος λαδιού, που καθορίζει την ταχύτητα με την οποία ο διεισδυτής κατευθύνεται προς την επιφάνεια του δοκιμίου, με απώτερο στόχο την καταγραφή της ένδειξης σκληρότητας του ελαστομερούς.





**Εικόνα 2.2.4** Πλάγια όψη του σκληρόμετρου Shore Micro O-Ring κλίμακας Μ. Στην παραπάνω εικόνα διακρίνεται η αναλογική οθόνη του οργάνου στην οποία καταγράφονται οι διάφορες ενδείξεις σκληρότητας σε κάθε περίπτωση. Το εύρος των τιμών στην αναλογική οθόνη κυμαίνεται μεταξύ 0 και 100. Η τιμή 0 αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή σκληρότητας, ενώ η μέτρηση 100 στη μέγιστη. Πίσω από την κυκλική οθόνη είναι τοποθετημένος ο μοχλός του οργάνου, με την απελευθέρωση του οποίου ο διεισδυτής κατευθύνεται προς το δείγμα, πράγμα το οποίο δηλώνει την έναρξη της σκληρομέτρησης. Κάτω από την οθόνη και το μοχλό βρίσκεται το «τραπέζι» του δείγματος, πάνω στο οποίο επικάθεται το υπό δοκιμή υλικό. Ακόμη χαμηλότερα από το υπόβαθρο είναι τοποθετημένος ο υδραυλικός κύλινδρος. Στη φωτογραφία ο κύλινδρος λαδιού είναι τυλιγμένος με χαρτί, έτσι ώστε να αποφευχθεί η διαρροή λαδιού μέσα από το δοχείο του κυλίνδρου, σε περίπτωση πιθανής μετακίνησης του οργάνου.





**Εικόνα 2.2.5** Αναλογική κυκλική οθόνη της συσκευής Shore Micro O-Ring κλίμακας M. Στη φωτογραφία διακρίνεται ο κωνικός διεισδυτής του οργάνου. Ειδικότερα, πρόκειται για αιχμηρό διεισδυτή με γωνία  $30^\circ$ , ο οποίος χαρακτηρίζεται από σφαιρική αιχμή στην κορυφή του. Στόχος της σφαιρικής αιχμής είναι να αποφευχθεί οποιαδήποτε διάτρηση ή τυχόν αλλοίωση του δείγματος. Άλλωστε τα δοκίμια που εξετάζονται με τη χρήση της ανωτέρω συσκευής παρουσιάζουν ιδιαίτερες ευαισθησίες εξαιτίας της ανεπάρκειας του πάχους τους αλλά και της ιδιομορφίας του σχήματος τους.



**Εικόνα 2.2.6** Κασετίνα για την τοποθέτηση των διάφορων τύπων υπόβαθρων του σκληρόμετρου Micro O-Ring κλίμακας M. Ανάλογα με το είδος του δείγματος επιλέγεται και το αντίστοιχο υπόβαθρο.



**Εικόνα 2.2.7** Διάφοροι τύποι ελαστομερών δοκιμίων, των οποίων η σκληρότητα έχει μετρηθεί με συσκευή Shore κλίμακας M. Τα δείγματα αυτά στέλνονται από την εταιρία Shore με απώτερο στόχο την εξακρίβωση της σωστής λειτουργίας του σκληρόμετρου αλλά και της ορθής υλοποίησης της δοκιμής από κάθε πιθανό αγοραστή. Πρόκειται για τα δοκίμια από αριστερά προς τα δεξιά white, yellow, blue, green, red, brown και black.

**Πίνακας 2.2.1** Στον παραπάνω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων σκληρότητας των δοκιμίων που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Τα δείγματα μετρήθηκαν με σκληρόμετρα Shore κλίμακας O και M και τα αποτελέσματα ως προς τη σκληρότητα απεικονίζονται παραπάνω. Όπως παρατηρείται η μετρήσεις με συσκευή τύπου O δίνει μεγαλύτερες τιμές του  $S_m$  σε σχέση με το durometer τύπου M.

Δοκίμιο	$S_m$ (shore O)	$S_m$ (shore M)
White	45.67	28.60
Yellow	54.17	42.70
Blue	60.67	52.30
Green	71.00	62.30
Red	78.67	72.60
Brown	84.33	81.50
Black	89.60	87.00

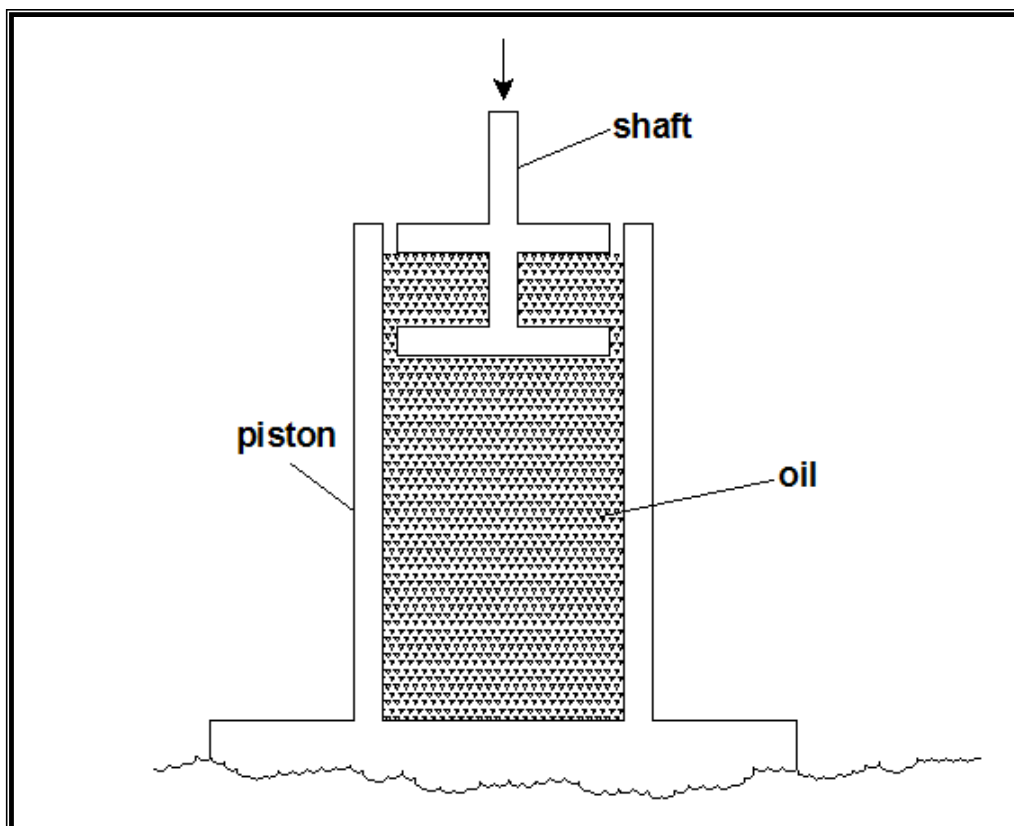
## 2.3 Προετοιμασία της συσκευής Shore κλίμακας M για την υλοποίηση των σκληρομετρήσεων

Το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της σκληρότητας πολύ λεπτών στρωμάτων δοκιμίου. Η εν λόγω συσκευή διαθέτει έναν υδραυλικό κύλινδρο λαδιού στο κατώτερο τμήμα της, που χρησιμοποιείται για τη ρύθμιση της ταχύτητας με την οποία ο διεισδυτής του οργάνου κατευθύνεται προς το δείγμα. Κατά τη μεταφορά του οργάνου στο εργαστήριο το λάδι που εμπεριέχεται στον εσωτερικό του κύλινδρου απομακρύνθηκε σε σημαντικό βαθμό. Για το λόγο αυτό, πριν τη μέτρηση των δοκιμίων με τη συσκευή κλίμακας M ήταν αναγκαίο να γεμίσει με λάδι από τη βάση έως την κορυφή το εσωτερικό τμήμα του κυλίνδρου. Βασικός στόχος της διαδικασίας αυτής είναι να εξασφαλίσουμε την σταθερή, αργή κίνηση του διεισδυτή προς το δείγμα, λόγω της ιδιαίτερα ευαίσθητης αιχμής του διεισδυτή τύπου M προστατεύοντας τον με αυτό τον τρόπο από κάποια πιθανή καταστροφή του κατά τη διάρκεια του πειράματος. Για την πλήρωση του κυλίνδρου με λάδι τύπου Mobil DTE oil light ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

- ❖ Στην περίπτωση που τμήμα της αναλογικής οθόνης (durometer mounting bracket) δε βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση, κρατάμε τη στρόφιγγα (durometer height knob) με το ένα χέρι και ελευθερώνουμε το μοχλό (pawl lever) ώστε να «ξεκλειδώσει» η στρόφιγγα. Στρέφουμε τη στρόφιγγα, έτσι ώστε το τμήμα της αναλογικής οθόνης (durometer mounting bracket) να βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση και κλειδώνουμε το μοχλό (pawl lever)
- ❖ Στη συνέχεια, χαλαρώνουμε τη στρόφιγγα που καθορίζει το ύψος του «ποδιού» που τοποθετείται το δείγμα (table height knob) και ανυψώνουμε το «τραπέζι» στο μέγιστο ύψος.
- ❖ Αφαιρούμε το κάλυμμα από την «τρύπα» γεμίματος λαδιού από την κορυφή του υδραυλικού κυλίνδρου
- ❖ Εισάγουμε τον σωλήνα λαδιού μέσα στην «τρύπα» γεμίματος λαδιού
- ❖ Σφίγγουμε το μπουκάλι του λαδιού αργά, έτσι ώστε να παρέχουμε το λάδι. Ο κύλινδρος θεωρείται γεμάτος όταν το επίπεδο του λαδιού διαμέσου της τρύπας του λαδιού είναι 3 χιλιοστά πάνω από το επίπεδο του πιστονιού, το οποίο βρίσκεται στην κορυφή του κυλίνδρου
- ❖ Ελευθερώνουμε το μοχλό (pawl lever) και στη συνέχεια στρέφουμε τη στρόφιγγα (durometer height knob) εμπρός και πίσω στο ανώτερο και κατώτερο επίπεδο του άξονα. Αυτή η διαδικασία είναι απαραίτητη για να αποβάλλουμε οποιαδήποτε ποσότητα εγκλωβισμένου αέρα μέσα στον κύλινδρο
- ❖ Εάν το επίπεδο του λαδιού «πέφτει» έτσι ώστε να ελευθερώνεται από αέρα, συμπληρώνουμε το λάδι στο επιθυμητό επίπεδο

- ❖ Μετακινούμε λοιπόν, το τμήμα την αναλογικής οθόνης (durometer mounting bracket) στην υψηλότερη δυνατή θέση και κλειδώνουμε το μοχλό (rawl lever). Τότε απελευθερώνουμε το μοχλό (rawl lever). Είμαστε βέβαιοι ότι ο άξονας μετακινείται με αργό ρυθμό σε ολόκληρο το μήκος της κίνησης του
- ❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, καλύπτουμε την τάπα του κυλίνδρου και καθαρίζουμε οποιοδήποτε ίχνος λαδιού από πάνω.

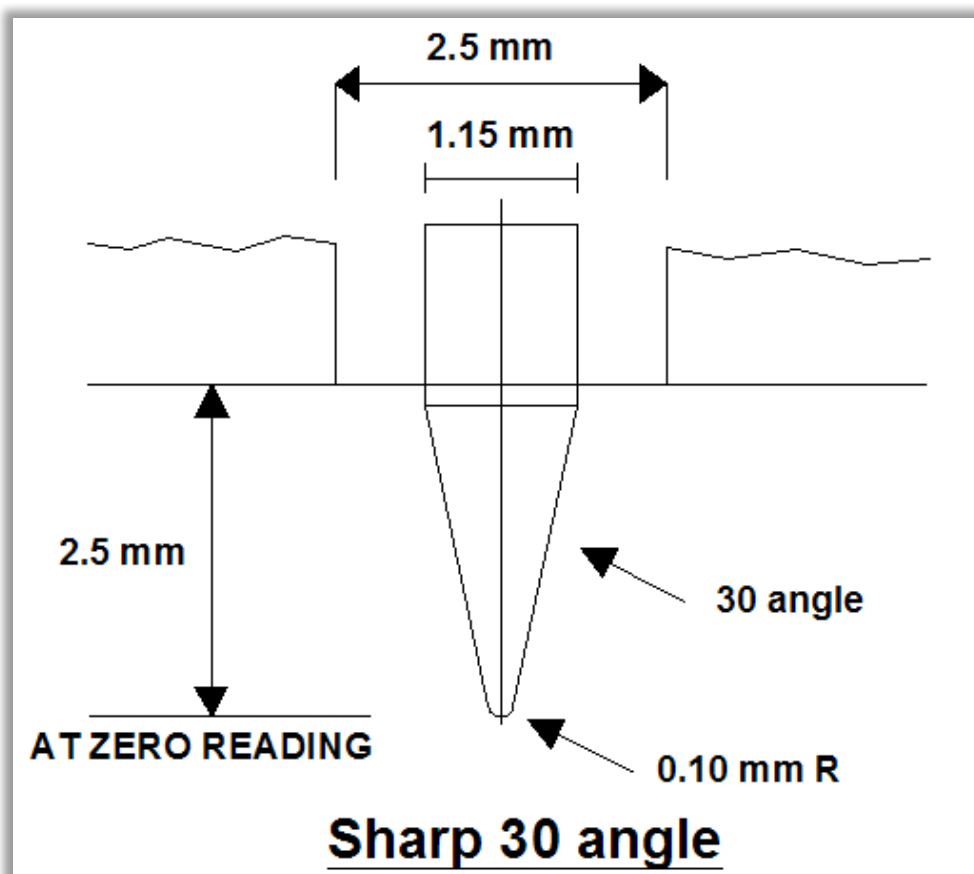
Στο σχήμα που ακολουθεί διακρίνεται το εσωτερικό τμήμα ενός κυλίνδρου λαδιού.



**Σχήμα 2.3.1** Εσωτερικό τμήμα κυλίνδρου λαδιού. Το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M διαθέτει ενσωματωμένο στη βάση του έναν τέτοιο κύλινδρο. Η ύπαρξη του κυλίνδρου αποσκοπεί στην διατήρηση αργής και σταθερής κίνησης του διεισδυτή, όταν αυτός κατευθύνεται προς το δείγμα. Η ύπαρξη του κυλίνδρου καθίσταται απαραίτητη για αυτή την κατηγορία συσκευών για την προστασία της αιχμής του διεισδυτή, μιας και το όργανο αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση πολύ λεπτών υλικών. Στο παραπάνω σχήμα διακρίνουμε τον άξονα (shaft) στο ανώτερο τμήμα του κυλίνδρου. Η κίνηση του άξονα είναι αργή εξαιτίας της ύπαρξης του λαδιού.

## 2.4 Αντιμετώπιση του προβλήματος του κωνικού διεισδυτή ανάλογα με το ποσοστό εισχώρησής του στο δείγμα σύμφωνα με τις μεθοδολογίες Hertz και Ciavarella

Το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M χρησιμοποιείται ευρύτατα για τον προσδιορισμό της σκληρότητας πολύ λεπτών δοκιμίων. Η συσκευή σκληρομέτρησης είναι κατασκευασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να μετρήσει υλικά που το πάχος τους φτάνει έως 1.25 χιλιοστά (0.05 ίντσες). Η συσκευή Shore ακολουθεί το πρότυπο ASTM D 2240 και διαθέτει κωνική αιχμή γωνίας 30°. Η μέγιστη δύναμη του εσωτερικού ελατηρίου που μπορεί να επιβληθεί στο δείγμα ισοδυναμεί με 78 γραμμάρια, σύμφωνα με τις προδιαγραφές. Στο σχήμα που ακολουθεί διακρίνονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του άκαμπτου κωνικού διεισδυτή που εφαρμόζεται σε σκληρόμετρα Shore κλίμακας Shore M.



**Σχήμα 2.4.1** Κωνικός διεισδυτής με σφαιρική αιχμή σκληρόμετρου Shore κλίμακας B και D. Στην περίπτωση των κλιμάκων αυτών η επεκτασιμότητα του διεισδυτή φτάνει έως 2.5 χιλιοστά, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η συσκευή Shore τύπου M διαθέτει τον ίδιο διεισδυτή με τη μόνη διαφορά ότι το μέγιστο βάθος διείσδυσης αυτού εκτείνεται έως 1.25 χιλιοστά. Παρατηρώντας το

σχήμα διακρίνεται η εσωτερική γωνία του διεισδυτή που ισοδυναμεί με 30° καθώς και η ακτίνα της αιχμής του που ισούται με 0.1 χιλιοστά. Η συσκευή κλίμακας M κατασκευάστηκε έτσι ώστε να μπορεί να υπολογίσει τη σκληρότητα σε δείγματα πολύ μικρού πάχους. Ο τύπος του διεισδυτή, που απεικονίζεται παραπάνω, είναι κατασκευασμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγεται η πιθανότητα διάτρησης σε ιδιαίτερα λεπτά δοκίμια, των οποίων τις μηχανικές ιδιότητες είναι επιθυμητό να προσδιορίσουμε.

Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να επιβληθεί στο δείγμα διαμέσου του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου κλίμακας M ισούται με 0.078 kg, όπως προαναφέρθηκε. Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν, το μέγεθος αυτό με την επιτάχυνση της βαρύτητας λαμβάνεται η μέγιστη δύναμη του ελατηρίου σε μονάδες Newton  $0.078 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 0.76518 \text{ N}$ . Η σκληρότητα κατά Shore για τη συσκευή κλίμακας M δίνεται από τη σχέση  $S_M = \frac{1.25 - h(\text{mm})}{0.0125}$ , όπου με  $S_M$  συμβολίζεται η σκληρότητα κατά

Shore μετρούμενη με όργανο τύπου M και με h το αντίστοιχο βάθος διείσδυσης μέσα στο υλικό δοκίμιο σε mm.

Στον κανονισμό ASTM D 2240 εμπεριέχονται οι διάφορες σχέσεις που αφορούν την εξίσωση για τη δύναμη του εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου για τις κλίμακες A, B, C, D, DO, E, O, OO, OOO, OOO-S και T. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, για την κλίμακα M ο κανονισμός δεν περιλαμβάνει αντίστοιχη σχέση που εκφράζει την εξίσωση της επιβαλλόμενης δύναμης. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαίο για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των μετρούμενων υλικών με τη συσκευή τύπου M να προσδιοριστεί η εξίσωση που εκφράζει τη δύναμη του ελατηρίου. Η γενική μορφή της εξίσωσης είναι  $F = A + B \times \Delta L$ , όπου το μέγεθος  $\Delta L = 1.25 - h$ .

- ✓ Η μέγιστη διείσδυση αντιστοιχεί σε βάθος  $h = 1.25 \text{ mm}$  ( $S = 0$ )  $\Rightarrow \Delta L = 0 \Rightarrow F = A$ .
- ✓ Αντίθετα, στην περίπτωση της ελάχιστης διείσδυσης ισχύει  $h = 0$  ( $S = 100$ )  $\Rightarrow \Delta L = 1.25 \Rightarrow F = A + B \cdot 1.25 = F_{\max}$ , έχει δηλαδή εξαντληθεί η μέγιστη δυνατή δύναμη που μπορεί να επιβάλλει το ελατήριο χωρίς ο διεισδυτής να επιφέρει στο υλικό καμία προσωρινή παραμόρφωση.

Παρακάτω δίνεται η βασική σχέση του συστήματος των δύο εξισώσεων για την εύρεση της ζητούμενης εξίσωσης του εσωτερικού ελατηρίου.

$$F = A + B \times 1.25 = 0.76518 \quad (2.1)$$

Στο πρόβλημα του επίπεδου αλλά και του κωνικού διεισδυτή σφαιρικής αιχμής αναφέρθηκε και ο M. Ciavarella με αντίστοιχη δημοσίευση του (1999). Σύμφωνα με τον Ciavarella, κατά την εισχώρηση του διεισδυτή μέσα στο δοκίμιο μπορούμε να διακρίνουμε δύο μήκη. Τα μήκη αυτά είναι η ακτίνα b της σφαιρικής αιχμής του διεισδυτή καθώς

και η ακτίνα επαφής  $a$  μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος. Ειδικότερα, στην περίπτωση που  $a \leq b$  τότε κατά τη διάρκεια της σκληρομέτρησης το τμήμα του διεισδυτή που έχει εισχωρήσει μέσα στο υλικό δεν έχει υπερβεί την ακτίνα της αιχμής. Επομένως, ο διεισδυτής σε αυτή την περίπτωση έχει τη μορφή σφαίρας για το υλικό και έτσι εφαρμόζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία του Hertz για την επίλυση του προβλήματος. **Αντίθετα, στην περίπτωση όπου  $a > b$ , μεγάλο τμήμα του διεισδυτή έχει εισχωρήσει μέσα στο δοκίμιο με αποτέλεσμα η επαφή μεταξύ των δύο υλικών να είναι αρκετά μεγάλη και να υπερβαίνει την ακτίνα  $b$  της αιχμής. Το «σώμα» σε αυτή την περίπτωση αναγνωρίζει έναν κωνικό διεισδυτή να εισχωρεί στην επιφάνειά του. Στην δεύτερη λοιπόν, περίπτωση για την επίλυση του προβλήματος προτείνεται η μεθοδολογία του Ciavarella.**

Αναλυτικότερα, στην πρώτη περίπτωση ισχύει:

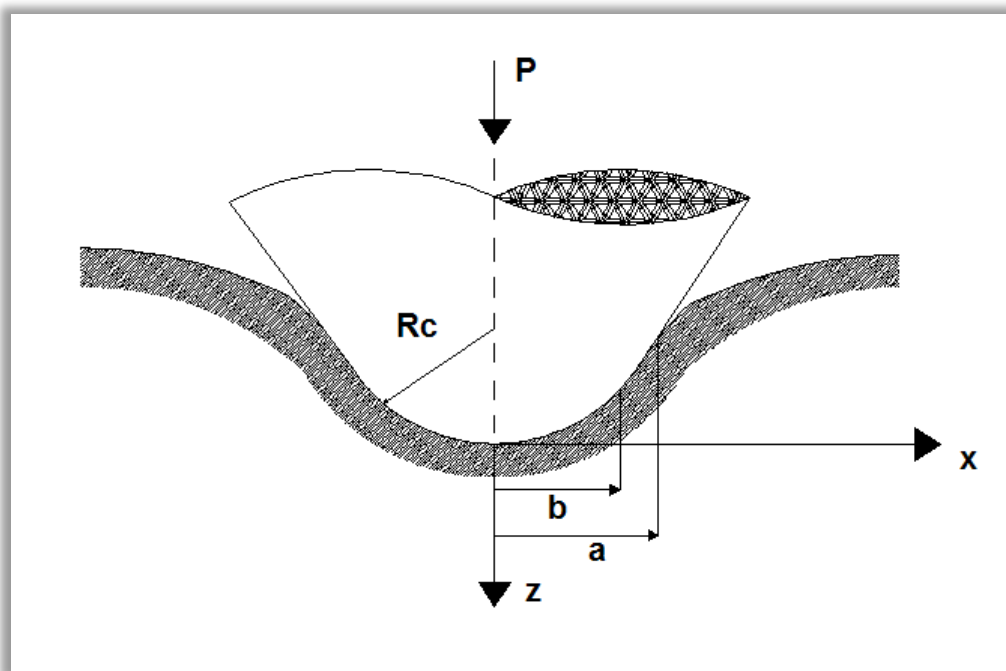
$$a \leq b \Rightarrow \sqrt{hr} \leq b \text{ (Hertz)} \Rightarrow hr \leq b^2 \Rightarrow h \leq \frac{b^2}{r} \Rightarrow h \leq r \cos^2 15^\circ.$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω όριο του  $h$  στη σχέση της σκληρότητας κατά Shore προκύπτει ότι  $S_{min} = \frac{1.25 - r \cos^2 15^\circ}{0.0125} = 92.5359$  προκύπτει για τιμές του  $S_{min} \leq S \leq 100$  η ακόλουθη ισότητα.

$$P = \frac{16}{3} \frac{(hr)^{3/2}}{r} G = F = A + B(1.25 - h) \quad (2.2)$$

Στη σχέση του Hertz που αναγράφεται παραπάνω με  $h$  συμβολίζεται το βάθος διείσδυσης, με  $r$  η ακτίνα του διεισδυτή, με  $P$  ή  $F$  η δύναμη του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου, με  $G$  το μέτρο διάτμησης, ενώ τα  $A$ ,  $B$  αποτελούν τα άγνωστα μεγέθη που είναι επιθυμητό να βρεθούν για να προκύψει τελικά η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου για το σκληρόμετρο Shore κλίμακας  $M$ . Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης τα μεγέθη  $h$ ,  $r$  πρέπει να αντικατασταθούν σε  $[m]$  και το μέτρο διάτμησης  $G$  σε  $[N/m^2]$  για να ισχύει η ισότητα. Για τον ίδιο λόγο, στο δεξιό μέλος της εξίσωσης το βάθος διείσδυσης  $h$  πρέπει να αντικατασταθεί σε  $[mm]$ .





**Σχήμα 2.4.2** Κωνικός διεισδυτής σφαιρικής αιχμής κατά την εισχώρησή του μέσα στην επιφάνεια του δείγματος, εφόσον διακρίνεται στο σχήμα η έντονη παραμόρφωση στην επιφάνεια του δοκιμίου. Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα με  $P$  συμβολίζεται η επιβαλλόμενη δύναμη στο δείγμα κατά τη σκληρομέτρηση, με  $R_c$  η ακτίνα του κωνικού διεισδυτή καθώς και με  $a$ ,  $b$  παριστάνονται η ακτίνα επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του δοκιμίου κατά τη σκληρομέτρηση και η ακτίνα της κυκλικής (σφαιρικής) αιχμής, αντίστοιχα. Τα σύμβολα  $x$ ,  $z$  αποτελούν το σύστημα συντεταγμένων.

Στη δεύτερη περίπτωση που ισχύει η ανισότητα  $a > b$  ( $S < S_{\min}$ ), έχει σημειωθεί κατά τη διάρκεια του πειράματος υπέρβαση του ορίου της σφαιρικής αιχμής του διεισδυτή. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τον M. Ciavarella ισχύουν τα ακόλουθα.

$$\frac{A}{2} = \frac{1-\nu^2}{E} = \frac{1-(\frac{1}{2})^2}{E} = \frac{1-\frac{1}{4}}{E} = \frac{3}{4E} \Rightarrow A = \frac{3}{2E} = \frac{1}{2G}$$

Στην σχέση που αναγράφεται παραπάνω με  $A$  συμβολίζεται ένας συντελεστής που εκφράζει την ανθεκτικότητα, με  $\nu$  ο λόγος του Poisson και με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας. Έτσι, στη δημοσίευση του M. Ciavarella εμπεριέχονται οι ακόλουθες σχέσεις που εφαρμόζονται με στόχο την εύρεση του βάθους διείσδυσης  $h$  καθώς και της δύναμης του ελατηρίου  $P$ .

$$h = \frac{b \tan \theta}{\cos^2 \varphi_0} (1 - \sin \varphi_0 + \varphi_0 \cos \varphi_0) \quad (2.3)$$

$$\frac{AP}{4 \tan \theta} = \frac{b^2}{6 \cos^3 \varphi_0} (4 + 3 \varphi_0 \cos \varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 - \sin^3 \varphi_0) \quad (2.4)$$



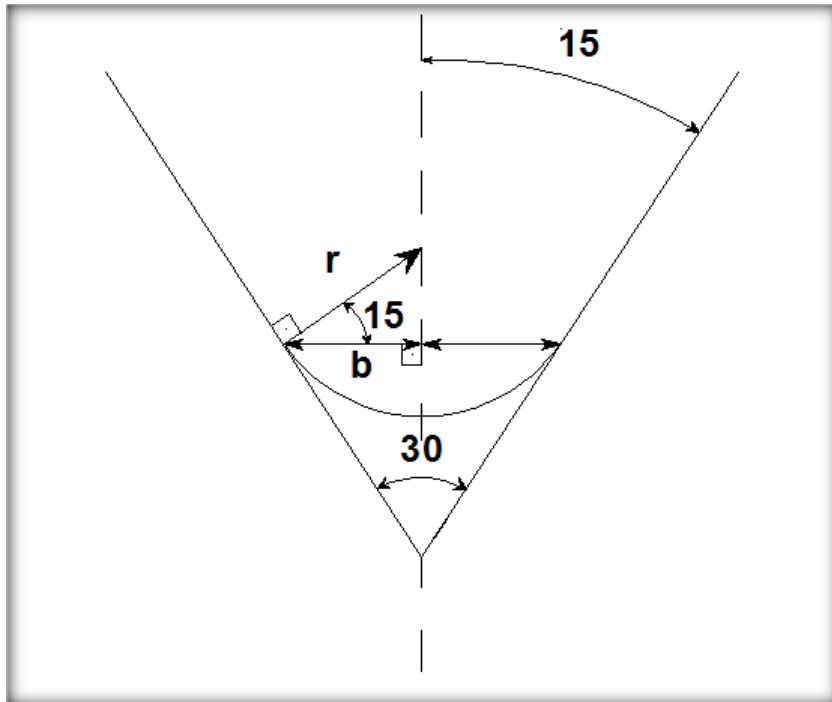
όπου  $\cos\varphi_0 = \frac{b}{a}$  και  $\theta$  είναι η εξωτερική γωνία της κωνικής αιχμής του διεισδυτή και ίση με  $\theta = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ , εφόσον η εσωτερική γωνία του κώνου ισοδυναμεί, στην περίπτωση του οργάνου Shore κλίμακας M, με  $30^\circ$ . Επιλύοντας λοιπόν, τη δεύτερη εξίσωση ως προς P δίνεται μία ποσότητα, η οποία εξισώνεται για μία ακόμη φορά με τη μορφή  $F = A + B(1.25 - h)$ , έτσι ώστε να προκύψει μία επιπλέον εξίσωση που μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό της εξίσωσης της δύναμης του ελατηρίου.

$$P = \frac{4\tan\theta}{A} \frac{b^2}{6\cos^3\varphi_0} (4 + 3\varphi_0\cos\varphi_0 - 3\sin\varphi_0 - \sin^3\varphi_0) = F = A + B(1.25 - h) \quad (2.5)$$

Σε κάθε δοκιμή σκληρομέτρησης είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε τα δύο αυτά μήκη που προαναφέρθηκαν, έτσι ώστε να γνωρίζουμε εάν κατά τη διείσδυση έχουμε υπερβεί το όριο b της σφαίρας της αιχμής ή όχι. Η πληροφορία αυτή είναι σημαντική διότι ανάλογα με το αποτέλεσμα ακολουθείται η κατάλληλη μεθοδολογία για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της δύναμης του εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου του οργάνου. Το σχήμα που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκε, όπως θα δούμε παρακάτω, για τον προσδιορισμό της ακτίνας b της σφαιρικής αιχμής του διεισδυτή. Παρατηρώντας λοιπόν, το παρακάτω σχήμα και αναλύοντας τη γεωμετρία του, προκύπτει τελικά το μέγεθος b, εφόσον είναι γνωστή η ακτίνα του διεισδυτή τύπου M σύμφωνα με τις προδιαγραφές και ίση με  $r = 0.1 \text{ mm}$  καθώς και η γωνία του, που ισοδυναμεί με  $30^\circ$ .

$$b = r \times \cos 15^\circ = 0.1 \times \cos(15\pi/180) = 0.0966 \text{ mm}$$

.



**Σχήμα 2.4.3** Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται ο κωνικός διεισδυτής που εφαρμόζεται σε σκληρόμετρα Shore κλίμακας M. Ο διεισδυτής χαρακτηρίζεται από κωνικό σχήμα γωνίας  $30^\circ$  και σφαιρική αιχμή. Με το σύμβολο  $r$  παριστάνεται η ακτίνα του διεισδυτή, ενώ το μήκος  $b$  συμβολίζει την ακτίνα της αιχμής του διεισδυτή. Επιπρόσθετα, στο σχήμα διακρίνεται και η διχοτόμος της γωνίας του διεισδυτή, που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της ποσότητας  $b$ .

Στη δημοσίευση του Ciavarella (1999) αναφέρεται η σχέση:

$$z(r) = \theta \times r - \frac{\theta}{2} \times b, \quad b \leq r \leq a$$

η οποία υπονοεί ότι ισχύει για μικρές γωνίες  $\theta$  ( $\tan \theta = \theta$ ), όπου  $\theta$  είναι η εξωτερική γωνία του κωνικού διεισδυτή. Στην πραγματικότητα, η γεωμετρική σχέση που δίνει τη βύθιση του διεισδυτή είναι:

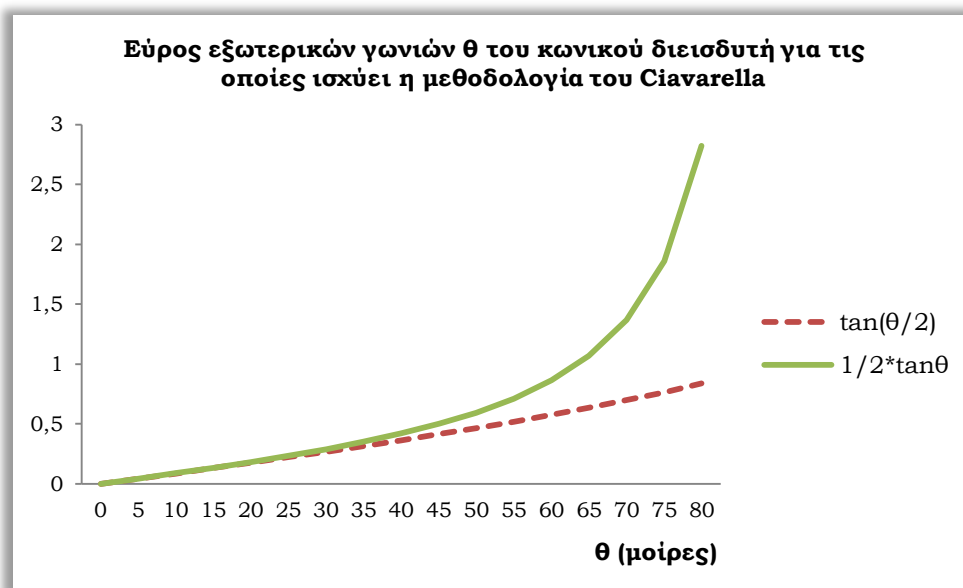
$$z(r) = \tan \theta \times r - \tan \frac{\theta}{2} \times b \quad (2.6)$$

Σαν μία δεύτερη προσέγγιση της ανωτέρω σχέσης αντικαθιστούμε την ισότητα  $\frac{1}{2} \tan \theta = \tan \frac{\theta}{2}$  στην παραπάνω σχέση του Ciavarella και προκύπτει ότι:

$$z(r) = \tan \theta \times r - \frac{1}{2} \tan \theta \times b \quad (2.7)$$

$$z(r) = \tan \theta \times \left( r - \frac{b}{2} \right) \quad (2.8)$$

Για να αντιληφθούμε την ακρίβεια της ανωτέρω προσέγγισης, στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι καμπύλες  $\tan(\theta/2)$  και  $\frac{1}{2}\tan\theta$ . Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά το γράφημα διακρίνουμε ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται για τιμές της εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή με εύρος από μηδέν έως  $45^\circ$  περίπου. Για μεγαλύτερες τιμές οι δύο καμπύλες αρχίζουν σιγά-σιγά να αποκλίνουν σε μικρό βαθμό, ενώ για τιμές της γωνίας  $\theta$  μεγαλύτερες των  $60^\circ$  η απόκλιση είναι πολύ μεγάλη.



**Γράφημα 2.4.1** Γράφημα που απεικονίζει τη σχέση μεταξύ  $\tan(\theta/2)$  και  $\frac{1}{2}\tan\theta$  με την γωνία  $\theta$ , που συμβολίζει την εξωτερική γωνία του κωνικού διεισδυτή σύμφωνα με τον Ciavarella (1999). Η γωνία  $\theta$ , όπως φαίνεται στο διάγραμμα, δίνεται σε μοίρες. Οι δύο καμπύλες του σχήματος ταυτίζονται για τιμές μικρότερες των  $45^\circ$ , ενώ αποκλίνουν σημαντικά για γωνίες μεγαλύτερες των  $60^\circ$ . Επομένως, η μεθοδολογία του Ciavarella δείχνει να ισχύει για γωνίες μικρότερες των  $45^\circ$ , ενώ για μεγαλύτερες γωνίες η μεθοδολογία δεν αποτελεί καλή προσέγγιση. Στην περίπτωση κωνικού διεισδυτή Shore κλίμακας M η εξωτερική γωνία του κώνου ισοδυναμεί με  $75^\circ$ , με αποτέλεσμα να μην ισχύει η μεθοδολογία του Ciavarella.

## 2.5 Απόδειξη της γραμμικής σχέσης του ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M σύμφωνα με τις σχέσεις του Ciavarella

Το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M δημιουργήθηκε με στόχο τη μέτρηση της σκληρότητας σε πολύ λεπτά υλικά, τα οποία είναι αδύνατο να μετρηθούν χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες συσκευές Shore. Παρόλο που όλες οι συσκευές Shore ακολουθούν το πρότυπο ASTM D 2240 για το σκληρόμετρο Shore τύπου M ο κανονισμός δεν περιλαμβάνει την σχέση που εκφράζει την εξίσωση του ελατηρίου. Για το λόγο αυτό ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία σύμφωνα με την οποία αποδεικνύεται τελικά ότι η σχέση που εκφράζει το εσωτερικό βαθμονομημένο ελατήριο του οργάνου Shore M είναι γραμμική.

Για να αποδειχθεί η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου κλίμακας M χρησιμοποιήθηκαν 7 δοκίμια διαφόρων χρωμάτων που στάλθηκαν από την εταιρία Shore και για τα οποία γνωρίζουμε τις τιμές σκληρότητας S. Έτσι λοιπόν, εφαρμόζοντας τις σχέσεις του Ting μπορούμε να υπολογίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες των δοκιμών. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα του μέτρου διάτμησης όπως αυτά προέκυψαν για τα υπό δοκιμή υλικά, κάνοντας χρήση του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O για τις μετρήσεις του S.

**Πίνακας 2.5.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται τα 7 δοκίμια ποικίλων χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό της εξίσωσης του ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M. Αρχικά, κάνοντας χρήση του οργάνου Shore κλίμακας O μετρήθηκε η σκληρότητα κάθε δείγματος. Στη συνέχεια, υπολογίστηκε το βάθος διείσδυσης  $h$ , η ακτίνα επαφής κατά Ting  $a$ , η δύναμη  $P$  του εσωτερικού ελατηρίου για τη συσκευή κλίμακας O σύμφωνα με τον κανονισμό ASTM D 2240 (Boyce) και το μέτρο διάτμησης  $G$ . Στην περίπτωση της συσκευής Shore κλίμακας O η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή ισούται με 1.19 χιλιοστά.

δοκίμιο	$S_m$ (shore O)	$h$ (shore O) [mm]	$a$ (Ting) [mm]	$P$ (Boyce) [N]	$G$ (Ting) [N/mm <sup>2</sup> ]
white	45.67	1.35825	1.031	3.97525	0.486802
yellow	54.17	1.14575	0.980	4.61275	0.716796
blue	60.67	0.98325	0.932	5.10025	0.982288
green	71.00	0.72500	0.834	5.87500	1.743398
red	78.67	0.53325	0.737	6.45025	2.978990

<b>brown</b>	84.33	0.39175	0.645	6.87475	4.988026
<b>black</b>	89.60	0.26000	0.536	7.27000	9.631988

Για τη συμπλήρωση του πίνακα χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις που αναγράφονται παρακάτω.

$$S = \frac{2.5 - h(mm)}{0.025} \quad (2.9)$$

Η ανωτέρω σχέση εκφράζει τη σκληρότητα κατά Shore κλίμακας O, ενώ η σχέση που ακολουθεί περιγράφει το βάθος διείσδυσης κατά Ting.

$$h = \frac{1}{2} \alpha \log \frac{r + \alpha}{r - \alpha} \quad (2.10)$$

Σύμφωνα με το πρότυπο ASTM D 2240 για συσκευή Shore O η δύναμη του ελατηρίου προκύπτει από την ακόλουθη σχέση.

$$P = 0.55 + 3(2.5 - h) \quad (2.11)$$

Την ανωτέρω δύναμη την αντικαθιστούμε στη σχέση του Hertz και με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε το επιθυμητό μέτρο διάτμησης.

$$P = \frac{16}{3} a^2 \varepsilon G \quad (2.12)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{r} \quad (2.13)$$

Έτσι λοιπόν, με τη συμπλήρωση του πίνακα λαμβάνονται οι τιμές του μέτρου διάτμησης G για τα υπό δοκιμή υλικά και κατ' επέκταση μπορούν να προσδιοριστούν τα μέτρα ελαστικότητας για τα παραπάνω δείγματα.

Γνωρίζοντας λοιπόν, ότι τα παραπάνω δείγματα διαθέτουν σκληρότητα κατά Shore  $S < S_{\min} = 92.5359$  για την εύρεση των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$  στην εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου αρκεί να εφαρμοστεί η μεθοδολογία του Ciavarella (1999). Οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση της ακτίνας επαφής  $a$  καθώς και της δύναμης του ελατηρίου  $P$  είναι οι ακόλουθες.

$$h = \frac{b \tan \theta}{\cos^2 \varphi_0} (1 - \sin \varphi_0 + \varphi_0 \cos \varphi_0), \cos \varphi_0 = \frac{b}{a} \quad (2.14)$$

$$\frac{AP}{4\tan\theta} = \frac{b^2}{6\cos^3\varphi_0} (4 + 3\varphi_0\cos\varphi_0 - 3\sin\varphi_0 - \sin^3\varphi_0) \quad (2.15)$$

**Πίνακας 2.5.2** Στον παραπάνω πίνακα διακρίνονται τα 7 δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό της εξίσωσης του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου. Για την εύρεση των συντελεστών A, B της εξίσωσης ακολουθήθηκε η μεθοδολογία του Ciavarella, γνωρίζοντας από προηγούμενες διεργασίες τα δεδομένα των τριών πρώτων στηλών του πίνακα. Έχοντας λοιπόν, ολοκληρώσει τις μετρήσεις με συσκευή τύπου Shore M και έχοντας ως δεδομένο πλέον τις μηχανικές ιδιότητες των δοκιμίων προσδιορίζουμε σύμφωνα με τις σχέσεις που προαναφέρθηκαν τους συντελεστές A, B. Παρατηρώντας τις τιμές του A βλέπουμε ότι κυμαίνονται γύρω από την τιμή μηδέν, πότε στα θετικά και πότε στα αρνητικά του άξονα, και επομένως συμπεραίνουμε ότι το A είναι μηδενικό και η σχέση του ελατηρίου είναι γραμμική έχοντας τη μορφή  $F = B \cdot (1.25 - h)$ . Επιπλέον, για τα τρία τελευταία δοκίμια όπως φαίνεται παραπάνω δεν λαμβάνουμε τιμές όσον αφορά τα A, B επειδή όπως αποδείχθηκε με αντικατάσταση στους τύπους δεν ισχύει για μεγάλες τιμές σκληρότητας η μεθοδολογία του Ciavarella.

δείγμα	Sm (M)	h (M) [mm]	G (ting)	$\Phi_0$ [rad]	a [mm]	P [N]	A [N]	B [N/mm]
white	28.6	0.89250	0.4868	1.01734	0.18377	0.3792	0.224553	0.432502
yellow	42.7	0.71625	0.7168	0.89322	0.15408	0.3876	0.106250	0.527144
blue	52.3	0.59625	0.9823	0.75649	0.13282	0.3875	-0.03674	0.641537
green	62.3	0.47125	1.7434	0.55445	0.11361	0.4859	0.024273	0.592726
red	72.6	0.34250	-	-	-	-	-	-
brown	81.5	0.23125	-	-	-	-	-	-
black	87.0	0.16250	-	-	-	-	-	-

Μετά την ολοκλήρωση της ανάλυσης και σύμφωνα με τον πίνακα αποδεικνύεται ότι η σχέση μεταξύ της δύναμης και της βύθισης ( $P - h$ ) για το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M είναι γραμμική και έχει τη μορφή

$F = B(1.25 - h)$ . Ειδικότερα, παρατηρώντας την τελευταία στήλη του πίνακα προκύπτει ότι οι τιμές του B κυμαίνονται γύρω από την ποσότητα 0.6 και για το λόγο αυτό συμπεραίνεται τελικά ότι ο συντελεστής

$$B = \frac{F_{max}}{h_{max}} = \frac{0.76518}{1.25} = 0.61264 \text{ N/mm}. \text{ Έτσι λοιπόν, η εξίσωση της δύναμης}$$

του ελατηρίου της συσκευής κλίμακας M ισοδυναμεί με  $F = 0.61264(1.25 - h)$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι η ανωτέρω σχέση που αφορά το εσωτερικό ελατήριο δεν είναι ακριβής για πολύ μαλακά υλικά τα οποία χαρακτηρίζονται από σκληρότητα  $S \leq 30$ , όπου τα μεγέθη A, B δείχνουν να μη συμπίπτουν με τα υπόλοιπα αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, προβλήματα όσον αφορά τον προσδιορισμό των συντελεστών με τη μέθοδο του Ciavarella εμφανίζονται και για υλικά με μεγάλη σκληρότητα  $S > 75$ . Έτσι λοιπόν, για τα τρία τελευταία δείγματα αρκεί να επαληθεύσουμε την τιμή του μέτρου διάτμησης G αντικαθιστώντας όπου χρειάζεται την τιμή της δύναμης P από την εξίσωση του ελατηρίου όπως αυτή αποδείχθηκε παραπάνω. Η μεθοδολογία αυτή ακολουθήθηκε παρακάτω όπως φαίνεται στον πίνακα.

**Πίνακας 2.5.3** Στον πίνακα διακρίνονται τα 7 δείγματα, των οποίων οι σκληρότητες κατά Shore M είναι γνωστές και δίνονται παραπάνω. Προσδιορίζοντας κατά τα γνωστά το βάθος διείσδυσης του οργάνου h (για σκληρόμετρο κλίμακας M), την ακτίνα επαφής a κατά Ting και γνωρίζοντας την επιβαλλόμενη δύναμη P από την εξίσωση του ελατηρίου προκύπτουν τα μέτρα διάτμησης G για τα τρία τελευταία δοκίμια του πίνακα. Πράγματι συγκρίνοντας τα μεγέθη αυτά με εκείνα που προέκυψαν με τη συσκευή τύπου O και εφόσον είναι παρόμοια καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ισχύει η εξίσωση της δύναμης που αποδείχθηκε παραπάνω. Προβλήματα εντοπίζονται και σε αυτή την περίπτωση για πολύ μεγάλες τιμές του S, όπως για το μαύρο (black) δοκίμιο. Η συσκευή που χρησιμοποιήθηκε για τις μετρήσεις ανήκει στην κλίμακα M και η ακτίνα του διεισδυτή ισούται με 0.1 χιλιοστά.

δοκίμιο	Sm (shore M)	h (shore M) [mm]	a (Ting) [mm]	P ( shore M ) [N]	G (Ting) [N/mm <sup>2</sup> ]
White	28.6	0.89250	-	-	-
Yellow	42.7	0.71625	-	-	-
Blue	52.3	0.59625	-	-	-
Green	62.3	0.47125	-	-	-
Red	72.6	0.34250	0.09979	0.55597	2.37517
Brown	81.5	0.23125	0.09821	0.62413	4.20350
black	87.0	0.16250	0.09391	0.66625	7.18767

Έτσι λοιπόν, μετά τη συμπλήρωση του πίνακα καταλήγουμε σε ορισμένα συμπεράσματα. Σε αυτή την περίπτωση για τιμές της σκληρότητας μεταξύ  $75 \leq S_M \leq 85$  ακολουθούμε τη μεθοδολογία της σφαίρας κατά Tīng με ακτίνα διεισδυτή  $r = 0.1 \text{ mm}$ , ενώ για τιμές του  $S > 85$  η ανάλυση είναι αδύνατο να εφαρμοστεί. Ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας τη γραμμική σχέση για την εύρεση της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$  και εφόσον προέκυψαν τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά το μέτρο διάτμησης και για τις δύο κλίμακες  $O$  και  $M$  επαληθεύεται η γραμμικότητα του ελατηρίου της συσκευής κλίμακας  $M$ .

**Γενικότερα, προβλήματα σχετικά με τη γραμμικότητα του ελατηρίου παρουσιάζονται για τις ακραίες τιμές της σκληρότητας, δηλαδή για  $S < 30$  και  $S > 85$ !**



## 2.6 Σύγκριση των σχέσεων που προτείνουν οι Lin et al. και ο Ciavarella για σκληρομετρήσεις με κωνικούς διεισδυτές

**Η** δημοσίευση των Lin et al. (2007) αναφέρεται σε στρατηγικές για το σχεδιασμό αυτοματοποιημένων καμπύλων δύναμης AFM, που προκύπτουν με δοκιμές διείσδυσης χωρίς φαινόμενα συγκολλητικότητας σε μαλακά ανομοιογενή υλικά. Το ατομικό μικροσκόπιο δύναμης (AFM) έχει ευρεία εφαρμογή σαν ένα εργαλείο νάνο-διείσδυσης έχοντας τη δυνατότητα να προσδιορίσει τοπικές ελαστικές ιδιότητες σε μαλακού τύπου υλικά. Οι Lin et al. εστιάζουν στις τεχνικές ανάλυσης του Hertz, οι οποίες είναι κατάλληλες σε περιπτώσεις γραμμικής ελαστικής διείσδυσης (γραμμική ελαστική συμπεριφορά με αμελητέα αλληλεπίδραση συγκολλησιμότητας).

Το κλασσικό πρόβλημα ενός ελαστικού υποστρώματος που δέχεται την εισχώρηση ενός αιχμηρού αντικειμένου επιλύθηκε αρχικά από το Hertz το 1881 και από τον Boussinesq το 1885. Πολλοί άλλοι συνέβαλαν στο θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα με στόχο να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα των μεθόδων διείσδυσης σε μεγάλες κλίμακες. Ακριβής επιλύσεις για τη σχέση μεταξύ δύναμης και βύθισης, την κατανομή της πίεσης στην περιοχή της επαφής και το πεδίο τάσης και μετατόπισης υπάρχουν για συμμετρικούς ως προς τη γεωμετρία διεισδυτές.

Σύμφωνα με τους Lin et al. (2007) η σχέση που προσδιορίζει την επιβαλλόμενη στο δείγμα δύναμη δίνεται από την εξίσωση:

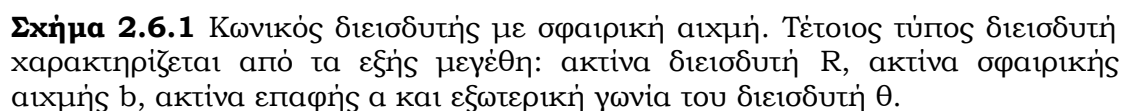
$$P = \frac{2E}{1-\nu^2} \left\{ ah - m \frac{a^2}{\tan \varphi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \right] - \frac{a^3}{3R} + (a^2 - b^2)^{1/2} \left[ m \frac{b}{\tan \varphi} + \frac{a^2 - b^2}{3R} \right] \right\} \quad (2.16)$$

Όπου  $P$  είναι η εφαρμοσμένη δύναμη στο διεισδυτή,  $2\varphi$  είναι η γωνία της αιχμής του διεισδυτή,  $b$  η ακτίνα της σφαιρικής αιχμής,  $R$  η ακτίνα του διεισδυτή,  $a$  η ακτίνα επαφής, ενώ η σταθερά  $m$  έχει διαφορετικές τιμές ανάλογα με τη γεωμετρία του διεισδυτή. Ειδικότερα, ο σταθερός συντελεστής  $m$  ισούται με  $1/2$  για κώνο και με  $2^{1/2}/\pi$  για πυραμίδα.

Η ακτίνα επαφής συσχετίζεται με το βάθος διείσδυσης σύμφωνα με τους Lin et al. και η αντίστοιχη εξίσωση δίνεται παρακάτω:

$$h + \frac{a}{R} \left[ (a^2 - b^2)^{1/2} - a \right] - n \frac{a}{\tan \varphi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \right] = 0 \quad (2.17)$$

Όπου η σταθερά  $n=1$  για κώνο και  $n=2^{3/2}/\pi$  για πυραμίδα.


$$\frac{AP}{4\theta} = \frac{b^2}{6\cos^3\varphi_0} [4 + 3\varphi_0 \cos\varphi_0 - 3\sin\varphi_0 - \sin^3\varphi_0] \quad (2.18)$$

Οι σχέσεις που αναγράφονται παραπάνω περιγράφονται με ακρίβεια σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Μετά την αναλυτική περιγραφή των σχέσεων και βασιζόμενοι στη γεωμετρία του προβλήματος προσπαθήσαμε να συγκρίνουμε τις αναλυτικές σχέσεις των Lin et al. με τις αντίστοιχες του Ciavarella. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε με στόχο την κατασκευή διαγραμμάτων της μορφής  $\{\frac{h}{b \tan \theta} - \frac{\alpha}{b}\}$  είναι η ακόλουθη και λήφθηκαν οι εξής παραδοχές.

**Για την περίπτωση μικρής εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τους Lin et al.**

- ✓  $n=1$  για κώνο
- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\tan \theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $\tan \varphi = \frac{1}{\tan \theta}$ , εφόσον οι γωνίες  $\varphi$ ,  $\theta$  είναι συμπληρωματικές.

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του βάθους διείσδυσης  $h$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{h}{b \tan \theta} = -\frac{\alpha}{b} \left[ \left( \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} - \frac{a}{b} \right] + \frac{a}{b} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{b}{a} \right) \right] \quad (2.20)$$

Για τιμές  $a/b \gg 1$  και  $b/a \ll 1$  η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{h}{b \tan \theta} \approx \frac{\alpha \pi}{b 2} \quad (2.21)$$

**Για την περίπτωση μεγάλης εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τους Lin et al.**

- ✓  $n=1$  για κώνο
- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\sin \theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $\tan \varphi = \frac{1}{\tan \theta}$ , εφόσον οι γωνίες  $\varphi$ ,  $\theta$  είναι συμπληρωματικές
- ✓ Γωνία  $\theta=75^\circ$ ,  $\sin \theta=0.966$ ,  $\tan \theta=3.732$

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του βάθους διείσδυσης  $h$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{h}{b} = -0.966 \frac{\alpha}{b} \left[ \left( \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} - \frac{a}{b} \right] + 3.732 \frac{a}{b} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{b}{a} \right) \right] \quad (2.22)$$

Για τιμές  $a/b \gg 1$  και  $b/a \ll 1$  η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{h}{b} \approx 3.732 \frac{\alpha \pi}{b 2} \quad (2.23)$$

**Για την περίπτωση μικρής εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τον Ciavarella**

- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\tan \theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $\cos \varphi_0 = \frac{b}{a}$ ,  $\varphi_0 = \arccos \frac{b}{a}$
- ✓  $\sin \varphi_0 = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{1/2}$

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του βάθους διείσδυσης  $h$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{h}{b \tan \theta} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{b}{a} \arccos \frac{b}{a} \right\} \quad (2.24)$$

**Για την περίπτωση μεγάλης εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τον Ciavarella**

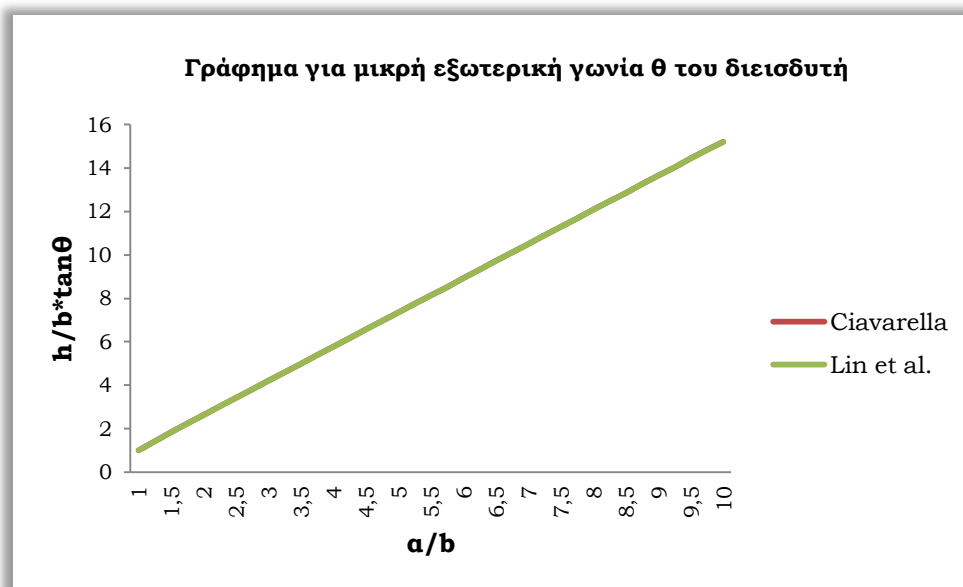
- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\tan \theta = \frac{b}{R}$
- ✓ Γωνία  $\theta = 75^\circ$ ,  $\tan \theta = 3.732$
- ✓  $\cos \varphi_0 = \frac{b}{a}$ ,  $\varphi_0 = \arccos \frac{b}{a}$
- ✓  $\sin \varphi_0 = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{1/2}$

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του βάθους διείσδυσης  $h$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

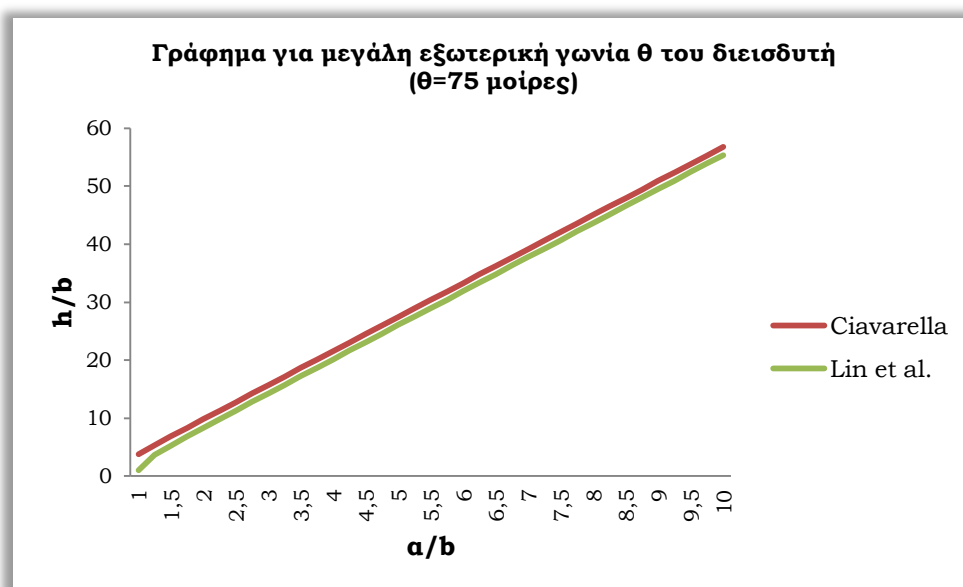
$$\frac{h}{b} = 3.732 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{b}{a} \arccos \frac{b}{a} \right\} \quad (2.25)$$

Με τον τρόπο αυτό οι εξισώσεις ανά δύο έχουν ίδια μορφή και μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους σχηματικά σε δύο κοινά διαγράμματα. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εξισώσεις που αντιστοιχούν σε μικρές γωνίες  $\theta$  καθώς και η σχέση των Lin et al. για μεγάλες γωνίες  $\theta$ . Παρατηρώντας προσεκτικά την καμπύλη του Ciavarella (1999) για μεγάλες γωνίες διακρίνουμε ότι παρουσιάζει λίγο μεγαλύτερα αποτελέσματα με την αντίστοιχη των Lin et al. Η αντικατάσταση της γωνίας  $\theta$  στη σχέση του Ciavarella στην περίπτωση μεγάλης γωνίας γίνεται με τη συνάρτηση  $\tan \theta$ , ενώ στο πρόβλημα των Lin et al. με τη

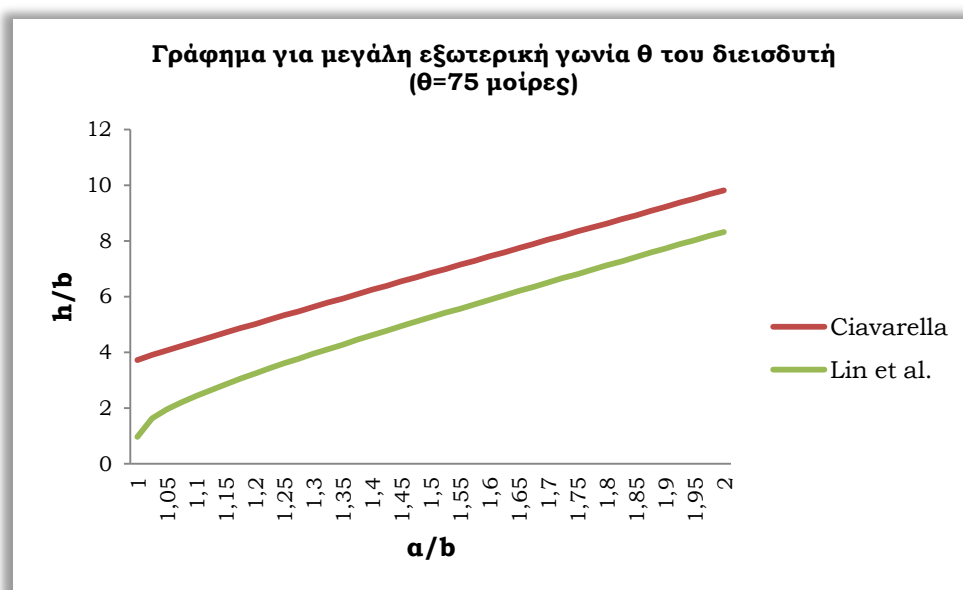
συνάρτηση  $\sin\theta$ . Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η μεθοδολογία του Ciavarella είναι ανεπαρκής για την επίλυση προβλημάτων με διεισδυτές μεγάλης εξωτερικής γωνίας.



**Γράφημα 2.6.1** Διαγραμματική απεικόνιση της σχέσης μεταξύ της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$  και του κανονικοποιημένου βάθους διείσδυσης  $h$ . Οι καμπύλες που προκύπτουν βασισμένες στις μεθοδολογίες του Ciavarella και των Lin et al. είναι γραμμικές και ταυτίζονται για οποιαδήποτε τιμή του  $a/b$ , όπως φαίνεται παραπάνω. Το γράφημα αντιστοιχεί σε μικρή εξωτερική γωνία  $\theta$  του άκαμπτου διεισδυτή και δεν αποτελεί λύση σε σκληρομετρήσεις με κωνικό διεισδυτή συσκευής Shore κλίμακας M, όπως ισχύει στη δική μας περίπτωση.



**Γράφημα 2.6.2** Στο παραπάνω γράφημα παριστάνονται οι καμπύλες που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$  και του κανονικοποιημένου βάθους διείσδυσης  $h$  για μεγάλες γωνίες  $\theta$ , σύμφωνα με τις μεθοδολογίες του Ciavarella και των Lin et al. Οι καμπύλες είναι γραμμικές και σχεδόν παράλληλες και στις δύο περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, η καμπύλη του Ciavarella παρουσιάζει λίγο μεγαλύτερα αποτελέσματα για μεγάλες γωνίες σε σχέση με την καμπύλη των Lin et al. Η μεθοδολογία του Ciavarella λαμβάνει τη γωνία  $\theta$  σε κάθε περίπτωση ως μικρή, για το λόγο αυτή η αντικατάσταση στη σχέση του Ciavarella της γωνίας  $\theta$  έγινε με  $\tan\theta$  και σε αυτή την περίπτωση. Πρόκειται λοιπόν, για μία συντηρητική σχέση που δε φαίνεται να «λειτουργεί» για μεγάλες γωνίες  $\theta$ , σε αντίθεση με εκείνη των Lin et al. **Εξαιτίας της παραλληλίας μεταξύ των δύο παραπάνω καμπύλων μπορούμε να πούμε ότι η καμπύλη των Lin et al. μπορεί να υπολογισθεί από την καμπύλη του Ciavarella αφαιρώντας την τιμή 1.5!**



**Γράφημα 2.6.3** Μεγεθυμένη εικόνα του παραπάνω διαγράμματος με εύρος τιμών  $a/b$  από 1 έως 2. Στο παραπάνω γράφημα μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα την απόκλιση μεταξύ των δύο καμπύλων καθώς και το γεγονός ότι είναι παράλληλες. Για την εύρεση της καμπύλης  $h/b$  των Lin et al. αρκεί να υπολογίσουμε την αντίστοιχη καμπύλη του Ciavarella και να αφαιρέσουμε την τιμή 1.5, που είναι η σταθερή απόσταση μεταξύ των δύο διαγραμμάτων, όπως μπορούμε να δούμε χαρακτηριστικά παραπάνω.

Μελετώντας τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν ορισμένα συμπεράσματα. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η μεθοδολογία του Ciavarella συμπίπτει με εκείνη των Lin et al. **Οι δύο καμπύλες, που οφείλονται σε δύο διαφορετικές μεθοδολογίες, και απεικονίζουν διαγραμματικά τη σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης βύθισης  $h$  και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$  ταυτίζονται για μικρή εξωτερική γωνία του διεισδυτή.** Επιπρόσθετα, οι μεθοδολογίες του Ciavarella αλλά και των Lin et al. «δίνουν» γραμμικά διαγράμματα. Στην περίπτωση μεγάλης εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του άκαμπτου κωνικού διεισδυτή η μεθοδολογία του Ciavarella δε φαίνεται να είναι σωστή,

εφόσον τα αποτελέσματα προκύπτουν με αντικατάσταση της συνάρτησης  $\tan\theta$  στη θέση της γωνίας, με αποτέλεσμα να μη λαμβάνεται η σωστή γεωμετρία στο πρόβλημα. Ειδικότερα, ο Ciavarella (1999) στη σχέση (17β) της δημοσίευσής του θεωρεί ότι ισχύει  $z(r) = \tan\theta \times r - \tan\frac{\theta}{2} \times b$ . Η

σχέση αυτή βρίσκει εφαρμογή μόνο για μικρές γωνίες  $\theta$  (όπου  $\theta$  είναι η εξωτερική γωνία του διεισδυτή), διαφορετικά αποδεικνύεται ότι για  $r=b$ ,  $z(b) = r \times \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ , εμφανίζεται ημίτονο και όχι εφαπτομένη στο δεύτερο σκέλος της εξίσωσης. Στο πρώτο σκέλος της εξίσωσης η γωνία  $\theta$  ταυτίζεται με την  $\tan\theta$ , ενώ το δεύτερο σκέλος ισοδυναμεί με  $-2r \times \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . **Έτσι,**

**μπορούμε να πούμε ότι ο Ciavarella αποτελεί μία πρώτη προσέγγιση για προβλήματα με κωνικό διεισδυτή, όπως ο Hertz για τη σφαίρα.** Αντίθετα, η μεθοδολογία των Lin et al. φαίνεται να δίνει καλύτερα αποτελέσματα για μεγάλες γωνίες  $\theta$ , τα οποία θα προσπαθήσουμε να εξακριβώσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθήθηκε με απώτερο στόχο τη δημιουργία διαγραμμάτων που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της δύναμης του ελατηρίου και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής:

**Για την περίπτωση μικρής εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τον Ciavarella**

- ✓  $\tan\theta = \theta$
- ✓  $A = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$
- ✓  $\cos\varphi_0 = \frac{b}{a}$
- ✓  $\varphi_0 = \arccos\frac{b}{a}$
- ✓  $\tan\theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $\sin\varphi_0 = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{1/2}$

Η εξίσωση του Ciavarella που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{AP}{4b^2 \tan\theta} = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \left\{ 4 + 3 \frac{b}{a} \arccos \frac{b}{a} - 3 \left[ 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]^{1/2} - \left[ 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]^{3/2} \right\} \quad (2.26)$$

Για τιμές  $a/b \gg 1$  και  $b/a \ll 1$  η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{AP}{4 \tan \theta b^2} \approx \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\pi}{4} \quad (2.27)$$

**Για την περίπτωση μικρής εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τους Lin et al.**

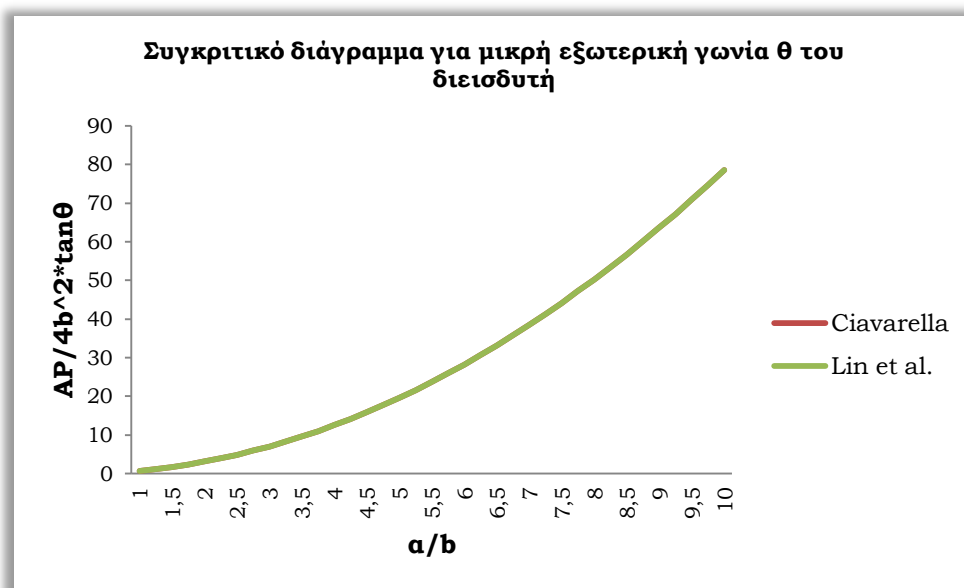
- ✓  $\tan \theta = \theta$
- ✓  $\tan \theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $n=1$
- ✓  $\tan \varphi = \frac{1}{\tan \theta}$

Η εξίσωση των Lin et al. που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$  και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{AP}{4b^2 \tan \theta} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{b}{a}\right) \right] - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2.28)$$

Τα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφουν τη σχέση μεταξύ της εφαρμοσμένης δύναμης  $P$  πάνω στον άκαμπτο διεισδυτή και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής. Στα παρακάτω γραφήματα μπορούμε να διακρίνουμε τη μη γραμμικότητα των καμπύλων που αντιστοιχούν στις δύο μεθοδολογίες. Οι εξισώσεις του Ciavarella και των Lin et al. έχουν ακριβώς την ίδια μορφή όσον αφορά τις καμπύλες που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της δύναμης του ελατηρίου και της ακτίνας επαφής και μάλιστα ταυτίζονται.





**Γράφημα 2.6.4** Συγκριτικό διάγραμμα για μικρή εξωτερική γωνία  $\theta$  του άκαμπτου κωνικού διεισδυτή. Οι καμπύλες που παριστάνονται παραπάνω εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της δύναμης του ελατηρίου και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$ . Η μορφή των διαγραμμάτων χαρακτηρίζεται από έντονη μη γραμμικότητα και όπως παρατηρούμε οι δύο καμπύλες ταυτίζονται. Έτσι λοιπόν, οι θεωρίες του Ciavarella και των Lin et al. επαληθεύονται για μικρές γωνίες  $\theta$ .

**Παρατηρώντας τα διαγράμματα που αντιστοιχούν σε μικρή εξωτερική γωνία του κωνικού διεισδυτή συμπεραίνουμε ότι οι σχέσεις των Lin et al. και του Ciavarella ταυτίζονται, έχουν δηλαδή ακριβώς την ίδια μορφή. Η ταύτιση αυτή προκύπτει από ανάλυση των σχέσεων και δεν οφείλεται σε κάποιο εύρος τιμών ούτε ισχύει για συγκεκριμένο υλικό δοκίμιο, αλλά ισχύει πάντοτε.** Το ανωτέρω συμπέρασμα που αφορά μικρές γωνίες  $\theta$  δεν αφορά την περίπτωση όπου η εξωτερική γωνία  $\theta$  είναι μέτρια ή μεγάλη. Αυτό μπορεί να φανεί παρατηρώντας τα ακόλουθα διαγράμματα μεταξύ της κανονικοποιημένης δύναμης του οργάνου και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$ . Οι παρακάτω καμπύλες προέκυψαν χρησιμοποιώντας μέτρια εξωτερική γωνία  $\theta$  του διεισδυτή ίση με  $75^\circ$ , σύμφωνα με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M.

**Για την περίπτωση μεγάλης εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τον Ciavarella**

- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\tan \theta = \frac{b}{R}$
- ✓ Γωνία  $\theta=75^\circ$ ,  $\tan \theta=3.732$
- ✓  $\cos \varphi_0 = \frac{b}{a}$ ,  $\varphi_0 = \arccos \frac{b}{a}$
- ✓  $\sin \varphi_0 = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{1/2}$

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης δύναμης  $P$  του ελατηρίου και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

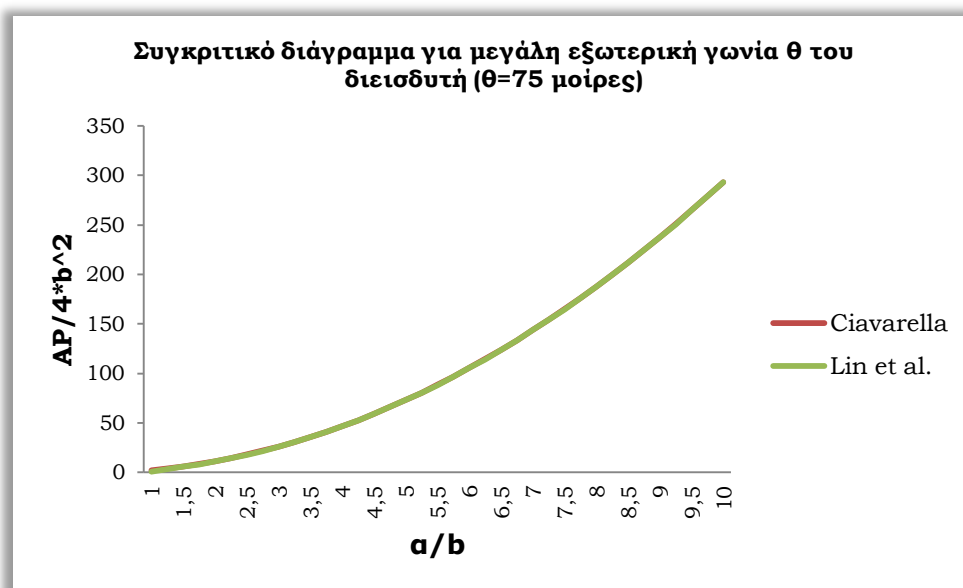
$$\frac{AP}{4b^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \tan \theta \left\{ 4 + 3 \frac{b}{a} \arccos \frac{b}{a} - 3 \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{3/2} \right\} \quad (2.29)$$

**Για την περίπτωση μεγάλης εξωτερικής γωνίας  $\theta$  του διεισδυτή σύμφωνα με τους Lin et al.**

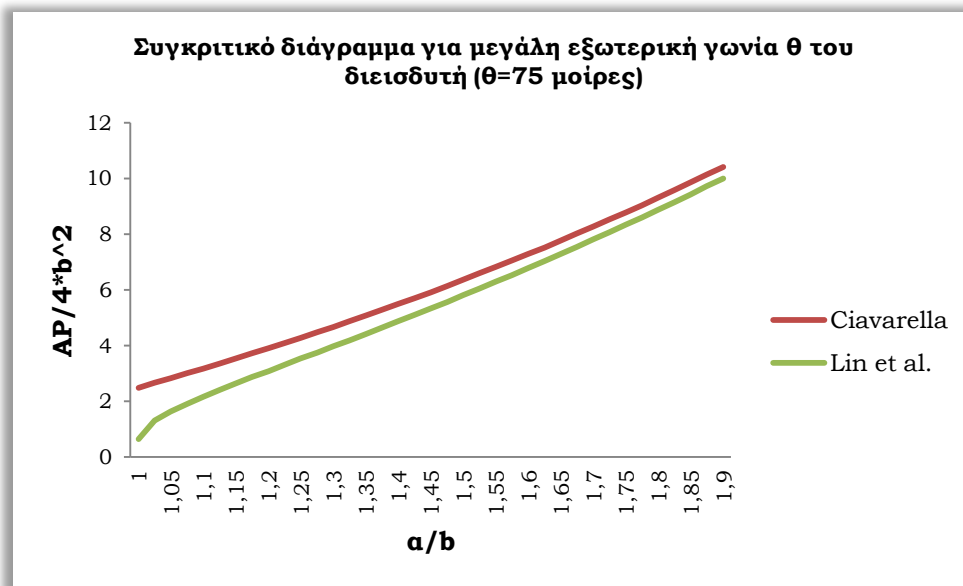
- ✓  $n=1$  για κώνο
- ✓ Από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει  $\sin \theta = \frac{b}{R}$
- ✓  $\tan \varphi = \frac{1}{\tan \theta}$ , εφόσον οι γωνίες  $\varphi$ ,  $\theta$  είναι συμπληρωματικές
- ✓ Γωνία  $\theta=75^\circ$ ,  $\sin \theta=0.966$ ,  $\tan \theta=3.732$

Η εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης δύναμης  $P$  του ελατηρίου και της ακτίνας επαφής  $a$  μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{AP}{4b^2} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin \theta \left\{ \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \tan \theta \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{b}{a}\right) \right] - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sin \theta + \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \tan \theta + \frac{1}{3} \sin \theta \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2.30)$$



**Γράφημα 2.6.5** Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι καμπύλες του Ciavarella και των Lin et al. μεταξύ της κανονικοποιημένης δύναμης  $P$  και της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a$ . Οι δύο καμπύλες αποκλίνουν ελάχιστα για μικρές τιμές του  $a/b$ , ενώ για μεγαλύτερες τιμές συγκλίνουν. Για τη δημιουργία των παραπάνω καμπύλων χρησιμοποιήθηκε γωνία  $\theta$  ίση με  $75^\circ$ .

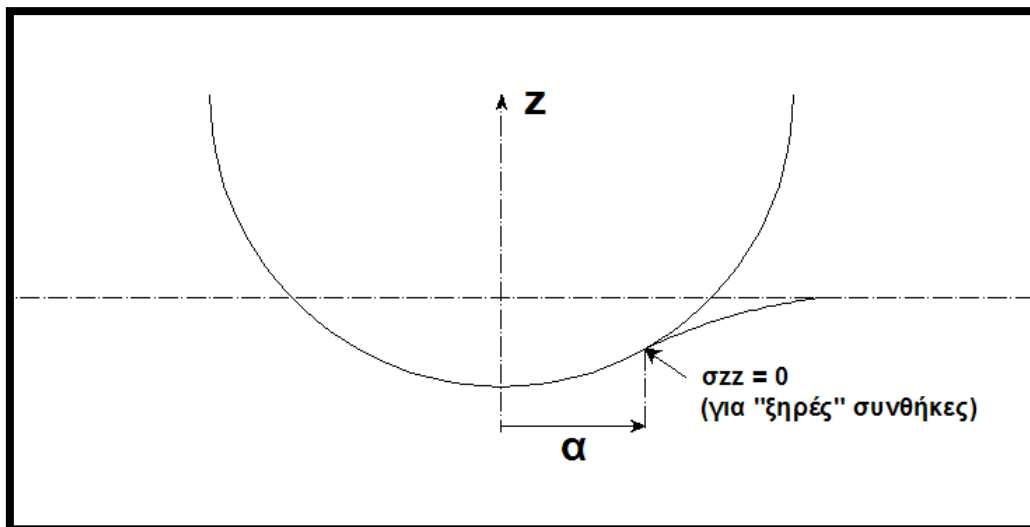


**Γράφημα 2.6.6** Πρόκειται για μεγέθυνση του προηγούμενου διαγράμματος για εύρος τιμών από 1 έως 2. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω η καμπύλη του Ciavarella παρουσιάζει ελάχιστα υψηλότερες τιμές σε σχέση με την αντίστοιχη των Lin et al. Για τις αρχικές τιμές του παραπάνω διαγράμματος η απόκλιση είναι μεγαλύτερη, ενώ στη συνέχεια τα δύο διαγράμματα συγκλίνουν μεταξύ τους.

## 2.7 Αντιμετώπιση του προβλήματος της συγκολλητικότητας μεταξύ δείγματος και διεισδυτή κατά τη σκληρομέτρηση

Γενικά το πρόβλημα των επαφών με εξαίρεση τον επίπεδο διεισδυτή (flat punch) έχει άγνωστη την ακτίνα επαφής μετά την επιβολή του φορτίου. Αυτή καθορίζεται από τις συνθήκες συνέχειας που υποθέτουμε στην περίμετρο της επαφής. Υπάρχει επομένως, το ζήτημα του αν η επαφή παρουσιάζει συγκολλητικότητα (adhesion). Επομένως, η χημική κατάσταση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή «παίζει» σημαντικό ρόλο σε αυτή την περίπτωση. **Στην παρούσα μεθοδολογία και ανάλυση θα υποθέσουμε ότι οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή δεν είναι χημικά ενεργές.** Παρόλα αυτά όμως, υπάρχει επιρροή από υψηλή θερμοκρασία και υψηλή υγρασία. Σε περίπτωση που υπάρχει ζήτημα κολλώδους επαφής (adhesive contact) θα πρέπει να εκτελέσουμε μια διαδικασία απενεργοποίησης της χημικής δράσεως. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε παρεμβάλλοντας για παράδειγμα ένα λεπτό στρώμα από πούδρα τάλκης ή εναλλακτικά ένα λεπτό στρώμα από σκόνη γραφίτη. Η ιδέα είναι να προστατευτούν και η επιφάνεια του μετρούμενου υλικού αλλά και η επιφάνεια του διεισδυτή.

Για επιφάνειες λοιπόν, που δεν είναι χημικά ενεργές αυτό που καθορίζει την ακτίνα επαφής είναι η ομαλή συνέχεια της βύθισης της επιφάνειας ή των επιφανειών που έρχονται σε επαφή και παραμορφώνονται. **Η επιβαλλόμενη ομαλότητα, σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας, μας υποχρεώνει να επιβάλλουμε στην περίμετρο της επαφής μηδενική πίεση.** Η μαθηματική αυτή συνθήκη μαζί με τη γενικευμένη λύση του προβλήματος και το ειδικό σχήμα του διεισδυτή που επιβάλλεται στο υπόστρωμα, μας οδηγεί στη σχέση της ακτίνας επαφής  $a$  με το βάθος διείσδυσης  $h$ . Στο σχήμα που ακολουθεί διακρίνεται ο βασικός περιορισμός που καθορίζει τις ξηρές συνθήκες μεταξύ των δύο επιφανειών που «έρχονται» σε επαφή κατά τη σκληρομέτρηση.



**Σχήμα 2.7.1** Άκαμπτος σφαιρικός διεισδυτής ακτίνας  $r$ . Στο σχήμα διακρίνεται η ακτίνα επαφής  $a$  μεταξύ του σφαιρικού διεισδυτή και του ελαστικού δείγματος κατά τη σκληρομέτρηση. Για να εξασφαλίσουμε «ξηρές» συνθήκες κατά τη διάρκεια του πειράματος, βασική προϋπόθεση είναι η πίεση στην περίμετρο της διεπιφάνειας μεταξύ των δύο υλικών να είναι μηδενική. Με οριζόντια διακεκομμένη γραμμή παριστάνεται η αρχική επιφάνεια του δοκιμίου πριν την έναρξη της σκληρομέτρησης, ενώ με συνεχή γραμμή η τελική κατάσταση της εξωτερικής επιφάνειας του υλικού μετά την επιβολή της δύναμης του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου.

## 2.8 Η επίδραση της γεωμετρίας του διεισδυτή πάνω σε ελαστικό ημίκωρο σύμφωνα με τους Briscoe et al.

Οι Briscoe et al. (1994) στη δημοσίευσή τους περιγράφουν ποικίλες αναλυτικές διαδικασίες για τον υπολογισμό της επιρροής της γεωμετρίας ενός άκαμπτου διεισδυτή πάνω στη μετρούμενη επιφάνεια επαφής ενός τέλεια λείου ελαστικού ημίκωρου. Οι αναλυτικές λύσεις εκφράζουν τη συσχέτιση της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$ , και της κατακόρυφης μετακίνησης  $h$ , που προκαλείται κατά τη διείσδυση, καθώς και της γεωμετρίας της επαφής αλλά και του μέτρου ελαστικότητας  $E$ . Ο γενικός τύπος είναι  $P = gE^*h^n$ , όπου τα σύμβολα  $g$  και  $n$  παριστάνουν συναρτήσεις εξαρτώμενες μόνο από τη γεωμετρία του διεισδυτή. Η σχέση αυτή δεν αποτελεί ένα γενικό τύπο, ενώ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της επίδρασης της γεωμετρίας του διεισδυτή κατά τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ενός ελαστικού δείγματος.

Η μέθοδος διείσδυσης είναι κατάλληλη να εκτιμήσει ποικίλες μηχανικές ιδιότητες των στερεών. **Σε μικρές κλίμακες, η μέθοδος είναι ουσιαστικά μη καταστρεπτική και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων της περιοχής που υποβάλλεται στο πείραμα διείσδυσης.** Η δοκιμή διείσδυσης είναι μία απλή μέθοδος μέτρησης μηχανικών ιδιοτήτων, όμως εμφανίζονται προβλήματα στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από τα πειράματα. Τα προβλήματα αυτά είναι σύνθετα εξαιτίας της πολύπλοκης γεωμετρίας του διεισδυτή και συσχετίζονται με τα πεδία παραμόρφωσης, ενώ οδηγούν συνήθως σε «παράξενες» ανωμαλίες όσον αφορά τα αποτελέσματα στα προβλήματα micro και nano διείσδυσης.

### 2.8.1 Ελαστική επαφή: Αναλυτικές σχέσεις δύναμης – μετατόπισης



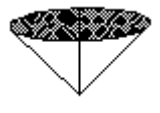


Σύμφωνα λοιπόν, με τους Briscoe et al. η σχέση μεταξύ της δύναμης και της αντίστοιχης κατακόρυφης μετατόπισης  $P(h)$  κατά τη σκληρομέτρηση για την περίπτωση τριών απλών αξονοσυμμετρικών σχημάτων διεισδυτών αλλά και δύο ειδών πυραμίδων: ένας κυλινδρικός διεισδυτής, ένας σφαιρικός διεισδυτής, ένας κωνικός διεισδυτής, ένας διεισδυτής Vickers και ένας Berkovich. Οι σχέσεις αυτές δίνονται, όπως προαναφέρθηκε, για την περίπτωση αξονοσυμμετρικών διεισδυτών από τον Sneddon (1965) και για πυραμίδες από τον Bilodeau (1992). Η αναλυτική λίστα με τις σχέσεις αναφέρεται στον πίνακα που ακολουθεί, ενώ σύμφωνα με το γενικό τύπο μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P = gE^*h^n \quad (2.31)$$

$$1 \leq n \leq 2$$

Όπου  $g$  είναι ο γεωμετρικός παράγοντας και  $n$  είναι ο δείκτης παραμόρφωσης. Και οι δύο συντελεστές  $g$  και  $n$  είναι συναρτήσεις που αφορούν τη γεωμετρία του διεισδυτή.

**Πίνακας 2.8.1.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται οι σχέσεις  $P(h)$  και  $a(h)$  για την περίπτωση ελαστικής επαφής. Στην πρώτη στήλη του πίνακα δίνεται ο τύπος και η γεωμετρία του διεισδυτή. Στη δεύτερη, δίνεται η σχέση μεταξύ της επιβαλλόμενης δύναμης  $P$  και της αντίστοιχης βύθισης  $h$ . Το  $E^*$  υπολογίζεται από την εξίσωση  $E^* = E/(1-\nu^2)$ , όπου με  $E$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας, με  $\nu$  ο λόγος του Poisson και με  $R$  η ακτίνα του διεισδυτή. Στην τρίτη στήλη, δίνονται οι σχέσεις  $a(h)$  και  $A(h)$ , όπου  $a$  είναι η ακτίνα επαφής και  $A$  η επιφάνεια επαφής. Ο συντελεστής  $b$  παριστάνει την ακτίνα της σφαιρικής αιχμής και η γωνία  $\theta$ , την εξωτερική γωνία του κωνικού διεισδυτή. Στην τελευταία στήλη μπορούμε να δούμε εικόνες που παριστάνουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διεισδυτών.

Indenter geometry	$P(h)$ relationship	$a(h)$ or $A(h)$ relationship	Indenter shape
Cylinder, radius $b$	$P = 2E^*bh$	$a = b$	
Parabolic, radius $R$	$P = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R}h^{3/2}$	$a = (Rh)^{1/2}$	
Cone, semi-included angle $\theta$	$P = \frac{2}{\pi}E^*\tan\theta h^2$	$a = \frac{2}{\pi}h\tan\theta$	
Vickers pyramid	$P = 1.845E^*h^2$	$A = 9.673h^2$	
Berkovich pyramid	$P = 1.932E^*h^2$	$A = 8.958h^2$	

## 2.9 Απόδειξη της γραμμικής σχέσης του ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M σύμφωνα με τις σχέσεις των Lin et al.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη γραμμική εξίσωση του ελατηρίου της συσκευής Shore κλίμακας M. Όπως δείχθηκε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ελατήριο χαρακτηρίστηκε ως γραμμικό με μηδενική αρχική τιμή του συντελεστή A. Για να οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα αυτό ακολουθήσαμε την αναλυτική μεθοδολογία του Ciavarella (1999) στην περίπτωση κωνικού διεισδυτή, ενώ για σφαιρικό διεισδυτή (πρόκειται ουσιαστικά για την περίπτωση όπου διεισδύει μόνο το άκρο της αιχμής του κώνου) εφαρμόστηκε η θεωρία του Ting (1966). Οι Lin et al. (2007) αναφέρουν στη δημοσίευσή τους τις σχέσεις του Briscoe et al. που εκφράζουν, όπως και στην περίπτωση του Ciavarella, το βάθος διείσδυσης  $h$  και την δύναμη του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου σε σχέση με την ακτίνα επαφής  $a$ . Συγκρίνοντας λοιπόν, τις δύο μεθοδολογίες καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα των Lin et al. για κωνικούς διεισδυτές με μεγάλη εξωτερική γωνία είναι καλύτερα από εκείνα του Ciavarella. Έτσι, στο σημείο αυτό θα επανεξετάσουμε την εξίσωση του εσωτερικού βαθμονομημένου ελατηρίου κλίμακας M εφαρμόζοντας τη θεωρία των Lin et al.

Στον πίνακα που ακολουθεί παριστάνονται τα δοκίμια που εξετάστηκαν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση του προγράμματος excel σχετικά τα μεγέθη A, B που παριστάνουν τους συντελεστές για την εύρεση της εξίσωσης του ελατηρίου.

**Πίνακας 2.9.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται τα ελαστομερή δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των συντελεστών A, B. Ειδικότερα για κάθε δοκίμιο μπορούμε να διακρίνουμε την τιμή της σκληρότητας S κατά Shore κλίμακας M, το αντίστοιχο βάθος διείσδυσης  $h$ , το μέτρο διάτμησης κατά Ting, την ακτίνα επαφής  $a$  σύμφωνα με τη θεωρία των Lin et al., το αδιάστατο μέγεθος  $a/b$  (με  $b$  συμβολίζεται η ακτίνα της αιχμής του κώνου και ισοδυναμεί στην περίπτωσή μας με 0.0966 mm) και την επιβαλλόμενη δύναμη P του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου. Παρατηρώντας λοιπόν τις τιμές των A, B για τα τρία πρώτα δοκίμια με σκληρότητα κατά Shore έως 55 περίπου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι τιμές των A, B δεν παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις. Αντίθετα, για δοκίμια με σκληρότητα μεγαλύτερη από 60 οι συντελεστές A, B δείχνουν να παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα δοκίμια με μέτρια και μεγάλη σκληρότητα εμφανίζουν ακτίνα επαφής σχεδόν ίση με την ακτίνα R (ή αλλιώς  $b$ ) της σφαιρικής αιχμής του κώνου, με αποτέλεσμα η διείσδυση να γίνεται με σφαιρικού τύπου διεισδυτή και να είναι απαραίτητη η χρήση των σχέσεων του Ting για την παραπάνω επίλυση. Επομένως, για τον προσδιορισμό της εξίσωσης χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των τριών πρώτων δοκιμών.



υλικό	Sm Shore M	h [mm] Shore M	G [N/mm <sup>2</sup> ] Ting	a [mm] Lin et al.	a/b	P [N] Lin et al.	A [N]	B [N/mm]
white	28.6	0.89250	0.48680	0.21	2.1739	0.4743	<b>0.3579</b>	<b>0.3259</b>
yellow	42.7	0.71625	0.71679	0.18	1.8634	0.5034	<b>0.3083</b>	<b>0.3654</b>
blue	52.3	0.59625	0.98229	0.16	1.6563	0.5309	<b>0.2741</b>	<b>0.3929</b>
green	62.3	0.47125	1.74339	0.14	1.4492	0.6827	-	-
red	72.6	0.34250	2.97899	0.12	1.2422	0.7698	-	-
brown	81.5	0.23125	4.98803	0.11	1.1387	0.7863	-	-
black	87.0	0.16250	9.63199	0.10	1.0352	0.9825	-	-

Τα δοκίμια white, yellow και blue εμφανίζουν σκληρότητα μικρότερη από 55, σύμφωνα με το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M. Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία των Lin et al. για τον υπολογισμό της ακτίνας επαφής  $a$  και της δύναμης του ελατηρίου  $P$ , οι τιμές των  $A$ ,  $B$  για τα τρία δοκίμια που προαναφέρθηκαν είναι σταθερές και συγκρίσιμες μεταξύ τους, όπως φαίνεται στον πίνακα, και για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι η εξίσωση του ελατηρίου κλίμακας  $M$  προκύπτει από αυτές. Για να εκφράσουμε την εξίσωση του ελατηρίου λαμβάνουμε τη μέση τιμή των αποτελεσμάτων  $A$ ,  $B$  για τα τρία πρώτα ελαστομερή δοκίμια. Έτσι προκύπτει ότι:

$$✓ A = 0.3134$$

$$✓ B = 0.3614$$

και η εξίσωση του εσωτερικού ελατηρίου του σκληρόμετρου Shore κλίμακας  $M$  εκφράζεται ως εξής:

$$P = 0.3134 + 0.3614(1.25 - h) \quad (2.32)$$

Όπου με  $h$  παριστάνεται το βάθος διείσδυσης και με  $P$  η δύναμη του ελατηρίου. Η παραπάνω ισότητα μπορεί να χαρακτηριστεί και σε αυτή την περίπτωση ως γραμμική με αρχική μη μηδενική τιμή  $A$ .

Όπως προείπαμε τα αποτελέσματα των  $A$ ,  $B$  για τα δοκίμια white, yellow και blue εμφανίζουν μικρή απόκλιση όσον αφορά το εύρος των τιμών τους και για το λόγο αυτό η προσέγγιση των συντελεστών σύμφωνα με τη θεωρία των Lin et al. αποτελεί καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με την αντίστοιχη θεωρία του Ciavarella. Αντίθετα, για τα δοκίμια green, red, brown και black, που εμφανίζουν σκληρότητα κατά Shore  $M$  μεγαλύτερη από 65, εμφανίζονται έντονες διακυμάνσεις όσον αφορά τα μεγέθη  $A$ ,  $B$ , με αποτελέσματα οι αντίστοιχες τιμές των  $A$ ,  $B$  να

θεωρούνται αναξιόπιστες. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε στον παραπάνω πίνακα η τιμή της ακτίνας επαφής για τα τέσσερα τελευταία δοκίμια μέτριας και μεγάλης σκληρότητας κατά Lin et al. είναι σχεδόν ίση με την ακτίνα  $R$  (ή  $b$ ) της σφαιρικής αιχμής του κωνικού διεισδυτή. Στην περίπτωση σκληρόμετρου Shore κλίμακας  $M$  η ακτίνα της αιχμής ισοδυναμεί με  $0.1$  χιλιοστά. Στην περίπτωση λοιπόν που  $a \approx R$  ( $a \approx b$ ) ο διεισδυτής κατά την εισχώρηση του στο δοκίμιο δεν ξεπερνά τη σφαιρική αιχμή του κώνου. Έτσι, το πρόβλημα διείσδυσης με κωνικό άκαμπτο αντικείμενο μετατρέπεται σε σκληρομέτρηση με σφαιρικό διεισδυτή. Επομένως, απαιτείται επίλυση κατά Ting για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των δοκιμίων green, red, brown και black. Στον πίνακα που ακολουθεί προσδιορίζεται το μέτρο διάτμησης  $G$  των αντίστοιχων δοκιμίων ακολουθώντας τις σχέσεις των Lin et al. και εφαρμόζονται την εξίσωση της δύναμης  $P$ , όπως προϋπολογίστηκε.

**Πίνακας 2.9.2** Στον πίνακα απεικονίζονται οι μηχανικές ιδιότητες των παραπάνω ελαστομερών υλικών που εμφανίζουν μέτρια και μεγάλη σκληρότητα κατά Shore κλίμακας  $M$ . Οι μετρήσεις των πειραμάτων εκτελέστηκαν με σκληρόμετρο τύπου  $M$ . Η ακτίνα επαφής  $a$  και το μέτρο διάτμησης  $G$  υπολογίστηκαν βασισμένα στις σχέσεις των Lin et al., ενώ η δύναμη  $P$  δίνεται από την εξίσωση του ελατηρίου τύπου  $M$  που αναγράφεται παραπάνω. Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση εφαρμογής της αναλυτικής μεθόδου του Ciavarella τα υλικά δοκίμια που δεν δείχνουν να υπακούουν στη μεθοδολογία είναι τα τρία τελευταία: red, brown, black. Τα δοκίμια επιλύθηκαν κατά Ting, δηλαδή σύμφωνα με τη θεωρία για σφαιρικού τύπου διεισδυτές. Τα μέτρα διάτμησης κατά Ting για τα υλικά red, brown και black βρέθηκαν ίσα με  $2.37 \text{ N/mm}^2$ ,  $4.20 \text{ N/mm}^2$  και  $7.18 \text{ N/mm}^2$ , αντίστοιχα. Παρατηρώντας λοιπόν, τα αποτελέσματα του πίνακα βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα κατά Lin et al. και κατά Ting είναι παρόμοια, εμφανίζοντας μικρές αποκλίσεις.

υλικό	$S_m$ shore $M$	$h$ [mm] shore $M$	$a$ [mm] Lin et al.	$P$ [N] εξίσωση ελατηρίου $M$	$G$ [N/mm <sup>2</sup> ] Lin et al.
white	28.6	0.89250	-	-	-
yellow	42.7	0.71625	-	-	-
blue	52.3	0.59625	-	-	-
green	62.3	0.47125	0.14	0.59484	1.51901
red	72.6	0.34250	0.12	0.64137	2.48193
brown	81.5	0.23125	0.11	0.68157	4.32383
black	87.0	0.16250	0.10	0.70642	6.92523

## 2.10 Σκληρομέτρηση ελαστομερών δοκιμίων με συσκευή Shore κλίμακας M

**Η** μέτρηση των ελαστομερών δοκιμίων που στάλθηκαν από την εταιρία Shore πραγματοποιήθηκε με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M. Τα δοκίμια αυτά διαθέτουν ίδιο πάχος 10 χιλιοστών, αλλά διαφορετικό χρώμα ανάλογα με τη σκληρότητα τους. Εκτός από τα δοκίμια αυτά υπολογίστηκε η σκληρότητα κατά Shore για τα δοκίμια Blue Xo 120974 καθώς και για το ελαστικό G&T. Για κάθε δείγμα πραγματοποιήθηκαν 5 μετρήσεις και στην συνέχεια υπολογίστηκε ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων αυτών. Κάθε μέτρηση είχε διάρκεια περίπου 1 με 2 δευτερόλεπτα, έτσι ώστε να αποφευχθούν τα φαινόμενα βισκοελαστικότητας (ερπυσμός ή χαλάρωση). Σε κάθε περίπτωση η «μεταλλική πλάκα» της συσκευής λειτουργεί ως υπόστρωμα των παραπάνω δοκιμίων και μπορεί να θεωρηθεί άκαμπτη συγκριτικά με τα ελαστομερή υλικά. Για να έχουμε ακριβέστερη εικόνα των μετρήσεων ακολουθώντας παρατίθενται τα αποτελέσματα των πειραμάτων για κάθε υλικό δοκίμιο με ταυτόχρονη παράθεση εικόνων που λήφθηκαν κατά τη διάρκεια των σκληρομετρήσεων.

Οι τιμές της σκληρότητας κατά Shore S για τα διάφορα δοκίμια είναι οι εξής:

### **White:**

- ✓  $S_1 = 32.5$
- ✓  $S_2 = 34.0$
- ✓  $S_3 = 34.5$
- ✓  $S_4 = 34.0$
- ✓  $S_5 = 34.8$
- ✓  $S_m = 33.96$

### **Blue:**

- ✓  $S_1 = 56.0$
- ✓  $S_2 = 56.2$
- ✓  $S_3 = 56.2$
- ✓  $S_4 = 55.0$
- ✓  $S_5 = 56.0$
- ✓  $S_m = 55.88$

### **Yellow:**

- ✓  $S_1 = 47.2$
- ✓  $S_2 = 47.0$
- ✓  $S_3 = 47.0$
- ✓  $S_4 = 47.5$
- ✓  $S_5 = 47.5$
- ✓  $S_m = 47.24$

**Green:**

- ✓  $S_1 = 65.8$
- ✓  $S_2 = 64.5$
- ✓  $S_3 = 64.5$
- ✓  $S_4 = 64.0$
- ✓  $S_5 = 64.1$
- ✓  $S_m = 64.58$

**Red:**

- ✓  $S_1 = 73.0$
- ✓  $S_2 = 73.1$
- ✓  $S_3 = 73.1$
- ✓  $S_4 = 71.5$
- ✓  $S_5 = 73.5$
- ✓  $S_m = 72.84$

**Brown:**

- ✓  $S_1 = 82.0$
- ✓  $S_2 = 81.5$
- ✓  $S_3 = 81.5$
- ✓  $S_4 = 81.3$
- ✓  $S_5 = 81.1$
- ✓  $S_m = 81.48$

**Black:**

- ✓  $S_1 = 87.5$
- ✓  $S_2 = 87.1$
- ✓  $S_3 = 87.5$
- ✓  $S_4 = 87.0$
- ✓  $S_5 = 87.0$
- ✓  $S_m = 87.22$

**Blue Xo 120974:**

- ✓  $S_1 = 58.0$
- ✓  $S_2 = 58.5$
- ✓  $S_3 = 58.0$
- ✓  $S_4 = 58.5$
- ✓  $S_5 = 58.0$
- ✓  $S_6 = 58.2$
- ✓  $S_m = 58.2$

**Ελαστικό G&T:**

- ✓  $S_1 = 76.5$
- ✓  $S_2 = 74.5$
- ✓  $S_3 = 75.0$
- ✓  $S_4 = 78.0$
- ✓  $S_5 = 78.0$
- ✓  $S_m = 76.4$

Για τα δοκίμια που αναφέρθηκαν προηγουμένως εφαρμόστηκε η θεωρία του Ciavarella (1999) για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων τους και συγκεκριμένα για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας. Σύμφωνα με τη θεωρία του Ciavarella για την προσέγγιση του βάθους διείσδυσης  $h$  εφαρμόζεται η ακόλουθη εξίσωση:

$$h = \frac{b \tan \theta}{\cos^2 \varphi_0} (1 - \sin \varphi_0 + \varphi_0 \cos \varphi_0) \quad (2.33)$$

Στην παραπάνω εξίσωση με  $h$  συμβολίζεται το βάθος διείσδυσης, με  $b$  η ακτίνα της σφαιρικής αιχμής, που για τον συγκεκριμένο τύπο διεισδυτή ισοδυναμεί με 0.0966 χιλιοστά, με  $\theta$  η εξωτερική γωνία της κωνικής αιχμής, η οποία για σκληρόμετρο Shore κλίμακας  $M$  ισούται με  $75^\circ$ , ενώ η γωνία  $\varphi_0$  προσδιορίζεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\cos \varphi_0 = \frac{b}{a} \quad (2.34)$$

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει τη βύθιση  $h$ , για τον προσδιορισμό του  $A$  και κατ' επέκταση του μέτρου ελαστικότητας  $E$  προτείνεται από τον Ciavarella η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{AP}{4 \tan \theta} = \frac{b^2}{6 \cos^3 \varphi_0} (4 + 3 \varphi_0 \cos \varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 - \sin^3 \varphi_0) \quad (2.35)$$

Στην ισότητα που αναγράφεται παραπάνω με το σύμβολο  $P$  παριστάνεται η επιβαλλόμενη δύναμη του ελατηρίου, ενώ η ποσότητα  $A$  συμβολίζει μία σταθερή τιμή που εκφράζει την ανθεκτικότητα που συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας του μετρούμενου υλικού με τη σχέση:

$$\frac{A}{2} = \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (2.36)$$

Τα σύμβολα  $\nu$ ,  $E$  παριστάνουν το λόγο του Poisson και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, αντίστοιχα.

### 2.10.1 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ενός ελαστομερούς δοκιμίου εφαρμόζοντας τη θεωρία του Ciavarella

Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων ενός ελαστομερούς δοκιμίου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία που προτείνεται από τον Ciavarella (1999). Για την εύρεση λοιπόν του μέτρου ελαστικότητας αρκεί να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- ✓ Χρησιμοποιώντας συσκευή Shore κλίμακας M μετράμε τη σκληρότητα του δείγματος S
- ✓ Κάνοντας αντικατάσταση στην ισότητα  $S_M = \frac{1.25 - h(mm)}{0.0125}$ , που συμπεριλαμβάνεται στον κανονισμό ASTM D 2240 για σκληρόμετρα τύπου M, υπολογίζουμε το βάθος διείσδυσης h
- ✓ Με επαναληπτική διαδικασία στον τύπο του Ciavarella, που δίνει τη βύθιση και αναφέρεται παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία  $\varphi_0$
- ✓ Έτσι, γνωρίζοντας το μέγεθος  $\varphi_0$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\cos \varphi_0 = \frac{b}{a}$  του Ciavarella υπολογίζουμε την ακτίνα επαφής a, που αναπτύσσεται μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος
- ✓ Στο σημείο αυτό, γνωρίζουμε τα μεγέθη  $\varphi_0$ , a και P. Η σχέση του ελατηρίου κλίμακας M είναι γραμμική, όπως αποδείχθηκε, και δίνεται από την εξίσωση  $F = 0.61264(1.25 - h)$ . Με αντικατάσταση των ποσοτήτων αυτών προκύπτει ο συντελεστής A
- ✓ Γνωρίζοντας λοιπόν, τον συντελεστή A υπολογίζουμε το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος από τη σχέση  $\frac{A}{2} = \frac{1 - \nu^2}{E}$ , όπου ο συντελεστής Poisson ισούται με 0.5 για ασυμπίεστα υλικά.

Στον πίνακα που ακολουθεί έχουν υπολογισθεί, σύμφωνα με τη θεωρία του Ciavarella, τα μέτρα ελαστικότητας διάφορων ελαστομερών υλικών.

**Πίνακας 2.10.1.1** Στον παραπάνω πίνακα διακρίνονται τα μέτρα ελαστικότητας καθώς και το μέτρο διάτμησης διάφορων υλικών. Για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων εφαρμόστηκε η θεωρία του Ciavarella (1999), όσον αφορά το βάθος διείσδυσης h, τη γωνία  $\varphi_0$ , την ακτίνα επαφής a, το συντελεστή A καθώς και το μέτρο ελαστικότητας E. Όλες οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M και χρησιμοποιήθηκαν οι αντίστοιχες σχέσεις. Τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας δείχνουν να συμπίπτουν με αντίστοιχες μετρήσεις των ανώτερο δειγμάτων με σκληρόμετρο τύπου O. Το δοκίμιο G&T παρουσιάζει, σύμφωνα με τον πίνακα,

μεγαλύτερη ελαστικότητα από την αναμενόμενη (7.5 MPa). Η παραπάνω τιμή δεν έχει σημαντική απόκλιση από την πραγματική και πιθανότατα να οφείλεται στη σκληρότητα του δοκιμίου σε σχέση με τα υπόλοιπα. Εξαιτίας αυτής της σκληρότητας των δειγμάτων brown, black, G&T θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το συντελεστή  $E$  των δοκιμών που προαναφέρθηκαν χρησιμοποιώντας διαφορετική μεθοδολογία.

Δοκίμια	Sm	h [mm]	φο [rad]	$\alpha$ [mm]	A [mm <sup>2</sup> /N]	E [N/mm <sup>2</sup> ]	G [N/mm <sup>2</sup> ]
White	33.96	0.82550	0.9750	0.172141	1.305594	1.148902	0.382967
Blue	55.88	0.55150	0.7250	0.129058	0.431881	3.473177	1.157726
Yellow	47.24	0.65950	0.8375	0.144325	0.649497	2.309481	0.769827
Green	64.58	0.44275	0.5	0.110075	0.261025	5.746587	1.915529
Red	72.84	0.33950	0	0.096600	0.166048	9.033530	3.011177
Brown	81.48	0.23150	0	0.096600	0.148441	10.10505	3.368351
Black	87.22	0.15975	0	0.096600	0.138672	10.81692	3.605640
Blue xo	58.20	0.52250	0.6625	0.122518	0.369826	4.055962	1.351987
G&T	76.40	0.29500	0	0.096600	0.158311	9.475037	3.158346

**Παρατήρηση:** Σε περίπτωση που στις εξισώσεις του Ciavarella αντικαταστήσουμε με  $\theta$  το μέγεθος  $\tan\theta$ , θεωρώντας την εξωτερική γωνία του κώνου πολύ μικρή καθώς και μικρές παραμορφώσεις, θα προκύψουν εσφαλμένα αποτελέσματα!

## 2.11 Σκληρομέτρηση πολλών στρώσεων του υλικού G&T με συσκευή Shore κλίμακας M

Με τη μεθοδολογία του Ciavarella (1999) υπολογίστηκαν τα μέτρα ελαστικότητας  $E$  σε ένα σημαντικό αριθμό δοκιμίων χρησιμοποιώντας σκληρόμετρο Shore κλίμακας M, όπως δείχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Το σκληρόμετρο τύπου M προτείνεται από την εταιρία Shore για τη μέτρηση της σκληρότητας  $S$  σε δοκίμια που χαρακτηρίζονται ως λεπτά όσον αφορά το πάχος τους. Μετά την εκτέλεση των σκληρομετρήσεων και αφού υπολογίστηκαν τα μέτρα ελαστικότητας  $E$  των υλικών προέκυψε για το λεπτό στρώμα G&T μεγαλύτερη ελαστικότητα από την πραγματική. Για το λόγο αυτό αποφασίστηκε η εκτέλεση μιας σειράς νέων πειραμάτων χρησιμοποιώντας πολλές στρώσεις του ίδιου υλικού και εφαρμόζοντας στη συνέχεια για τον υπολογισμό του συντελεστή  $E$  την προτεινόμενη μεθοδολογία του Jaffar (2002). Έτσι λοιπόν, εκτελέστηκαν διαδοχικά πειράματα σκληρομέτρησης χρησιμοποιώντας πολλές στρώσεις του υλικού G&T. Οι μετρήσεις της σκληρότητας έγιναν και σε αυτή την περίπτωση με συσκευή κλίμακας M, σε θερμοκρασία περιβάλλοντος  $23^{\circ}\text{C}$  και συνθήκες υγρασίας 60%. Οι περιοχές πειραματισμού πάνω στο δοκίμιο ποικίλλουν άλλοτε στα άκρα και άλλοτε στο λαιμό και αποδεικνύουν ότι το δείγμα είναι ομογενές σε όλο το μήκος του. Κατά την εκτέλεση των πειραμάτων το δοκίμιο εδράζεται απλά πάνω στο άκαμπτο υπόβαθρο της συσκευής χωρίς κάποιο περιορισμό στην περιμέτرو του. Η αρχική επιφάνεια που διαθέτουμε είναι πάντα ίδια και προσθέτουμε υλικό από πάνω, μέχρι να προκύψουν τρεις στρώσεις του ίδιου υλικού. Το δοκίμιο G&T έχει πάχος  $t$  που ισοδυναμεί με 1.89 χιλιοστά.

Για τη μία στρώση του υλικού G&T πάχους 1.89 χιλιοστά τα αποτελέσματα της σκληρότητας κατά Shore είναι τα ακόλουθα:

- ✓  $S_1 = 79.0$
- ✓  $S_2 = 80.0$
- ✓  $S_3 = 79.0$
- ✓  $S_4 = 80.0$
- ✓  $S_5 = 80.0$
- ✓  $S_m = 79.6$

Για δύο στρώσεις του εν λόγω υλικού πάχους 3.78 χιλιοστά τα αποτελέσματα είναι ως εξής:

- ✓  $S_1 = 79.5$
- ✓  $S_2 = 79.5$
- ✓  $S_3 = 80.0$
- ✓  $S_4 = 79.5$
- ✓  $S_5 = 78.7$
- ✓  $S_m = 79.44$



Ολοκληρώνοντας τις μετρήσεις, για τις τρεις διαδοχικές στρώσεις του υλικού συνολικού πάχους 5.67 χιλιοστά οι σκληρότητες είναι οι εξής:

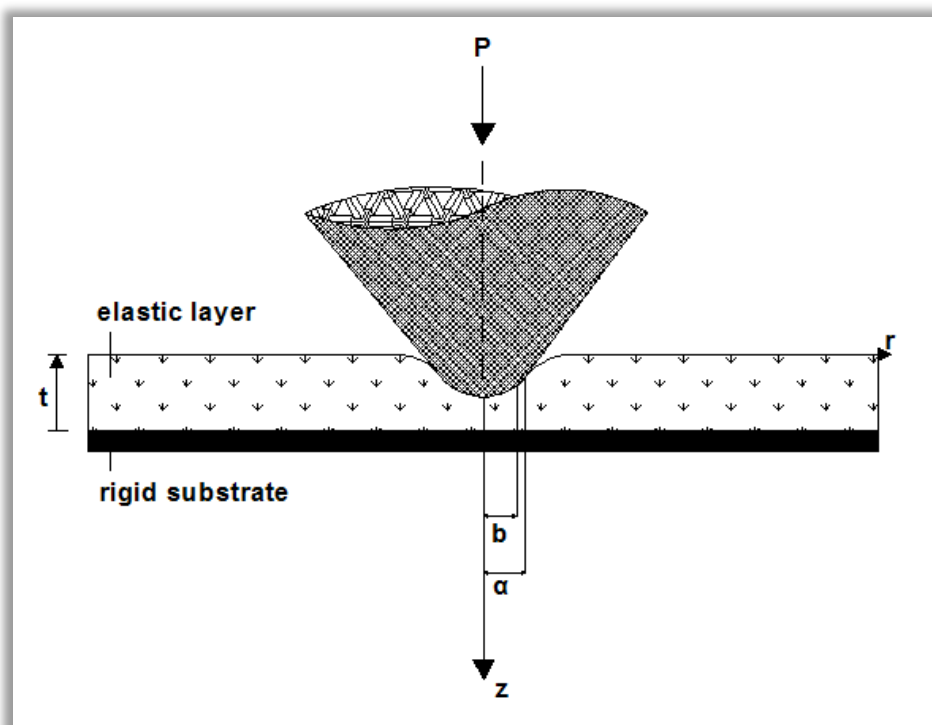
- ✓  $S_1 = 80.2$
- ✓  $S_2 = 79.5$
- ✓  $S_3 = 79.5$
- ✓  $S_4 = 79.5$
- ✓  $S_5 = 79.0$
- ✓  $S_m = 79.54$

Όπως φαίνεται παραπάνω πραγματοποιήθηκαν πέντε διαδοχικές μετρήσεις σε κάθε περίπτωση και τα αποτελέσματα που πάρθηκαν συγκλίνουν μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι πράγματι η συσκευή που προτείνεται δίνει έγκυρα αποτελέσματα για πολύ λεπτά στρώματα υλικού!

**Προσοχή:** Σε περίπτωση που λιπάνουμε την επιφάνεια του δείγματος με το ειδικό λάδι της συσκευής κλίμακας M παρατηρούμε ότι η σκληρότητα κατά Shore ισούται με 79.5, επομένως δεν υπάρχει ζήτημα λίπανσης της επιφάνειας σε αυτή την περίπτωση.

## 2.12 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων ενός ελαστικού δείγματος σύμφωνα με τη θεωρία του Jaffar

Τα δοκίμια που είναι επιθυμητό να μετρηθούν σε αρκετές περιπτώσεις δεν διαθέτουν επαρκές πάχος συγκριτικά με αυτό που απαιτεί το χρησιμοποιούμενο σκληρόμετρο. Εάν λοιπόν, το πάχος του δείγματος δεν επαρκεί τα αποτελέσματα της μέτρησης δεν θα είναι σωστά και για το λόγο αυτό χρειάζονται διορθώσεις. Για να επιλύσουμε τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη μέτρηση λεπτών στρωμάτων προσπαθούμε να αυξήσουμε το συνολικό πάχος του υπό δοκιμή υλικού τοποθετώντας πάνω από αυτό στρώσεις του ίδιου δείγματος και κάνοντας από την αρχή τις μετρήσεις. Το σκληρόμετρο Shore κλίμακας M δίνει αξιόπιστες μετρήσεις όσον αφορά τη σκληρότητα, όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, λεπτών στρωμάτων. Παρόλα αυτά όμως, ο Jaffar (2002) προτείνει μία μεθοδολογία για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας  $E$  σε ελαστομερή δοκίμια, τα οποία είναι τοποθετημένα πάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα και υποβάλλονται σε σκληρομέτρηση με συσκευή που διαθέτει κωνικό διεισδυτή σφαιρικής αιχμής, όπου το αποτέλεσμα του συντελεστή  $E$  είναι εξαρτημένο από το πάχος  $t$  του υλικού. Στην εικόνα που ακολουθεί διακρίνεται ο κωνικός διεισδυτής σφαιρικής αιχμής που χρησιμοποιείται στη μεθοδολογία του Jaffar.



**Σχήμα 2.12.1** Κωνικός διεισδυτής σφαιρικής αιχμής εισχωρεί μέσα σε ελαστικό δείγμα πάχους  $t$ . Το υπό δοκιμή υλικό επικάθεται πάνω σε άκαμπτο

υπόστρωμα. Με το σύμβολο  $P$  παριστάνεται το επιβαλλόμενο πάνω στο υλικό φορτίο, με  $b$  η ακτίνα της σφαιρικής αιχμής στο άκρο του διεισδυτή και με  $a$  η ακτίνα επαφής που αναπτύσσεται κατά τη σκληρομέτρηση ανάμεσα στα δύο υλικά, διεισδυτή και ελαστομερές δείγμα. Το μοντέλο του Jaffar (2002) βρίσκει εφαρμογή για τέτοιου είδους συσκευές, όπως δείχνεται παραπάνω.

Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία του Jaffar (2002) προτείνονται οι ακόλουθες σχέσεις για την εύρεση της ακτίνας επαφής  $a$  (σχέση λυμένη ως προς το βάθος διείσδυσης  $h$ ) και στη συνέχεια του μέτρου ελαστικότητας  $E$  (σχέση λυμένη ως προς τη δύναμη του εσωτερικού ελατηρίου  $P$ ).

$$h = \frac{\tan \theta}{12} \left( \frac{b^3}{\alpha^2} + 8\alpha - 6b \right) \quad (2.37)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, με  $h$  συμβολίζεται το βάθος διείσδυσης ( $h = 1.25 - 0.0125S_m$ ), με  $\theta$  η εξωτερική γωνία του κωνικού διεισδυτή ( $\theta = 75^\circ$ ), με  $b$  η ακτίνα της σφαιρικής αιχμής ( $b = 0.0966 \text{ mm}$ ) και με  $a$  η ακτίνα επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος. Έχοντας προσδιορίσει το μέγεθος  $a$  από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E$  κάνοντας αντικατάσταση στην εξίσωση που ακολουθεί.

$$P = \frac{\pi \tan \theta * E}{12t^3} \left( \frac{a^5}{5} + \frac{a^2b^3}{8} - \frac{b^5}{5} \right) \quad (2.38)$$

Έτσι λοιπόν, με  $P$  παριστάνεται η δύναμη του εσωτερικού ελατηρίου του οργάνου ( $P = 0.61264(1.25 - h)$ ), με  $E$  το ζητούμενο μέτρο ελαστικότητας του υλικού, με  $t$  το πάχος του μετρούμενου στρώματος, με  $a$  η ακτίνα επαφής που υπολογίστηκε προηγουμένως και με  $b$  η ακτίνα της σφαιρικής αιχμής.

**Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση και εφόσον τα μεγέθη  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $S$ ,  $h$ ,  $P$  είναι σταθερά για τις διάφορες στρώσεις του ίδιου υλικού προκύπτει μία αναλογία  $E \propto t^3$ . Αυτό δηλώνει ότι με την εκθετική αύξηση του πάχους του δείγματος αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας. Στην πραγματικότητα όμως, με την αύξηση του πάχους  $t$ , μειώνεται η επιρροή του άκαμπτου υποστρώματος στα αποτελέσματα της μέτρησης, οπότε το  $E$  θα έπρεπε να μειώνεται, πράγμα το οποίο έρχεται σε «σύγκρουση» με τα πειραματικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι οι σχέσεις του Jaffar δεν έχουν εφαρμογή στο συγκεκριμένο υλικό, γιατί εάν είχαν το μέτρο ελαστικότητας  $E$  θα αυξανόταν σαν  $t^3$ !**

## Παράρτημα Ε

### 2.13 Σκληρομέτρηση σε ελαστομερή δοκίμια



**Εικόνα 2.13.1** Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M. Κύρια όψη του οργάνου, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση πολύ λεπτών στρωμάτων. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε στην φωτογραφία, η συσκευή αποτελείται από μία αναλογική οθόνη που λαμβάνει τιμές σκληρότητας από μηδέν έως 100. Στο κατώτερο τμήμα της οθόνης υπάρχει ενσωματωμένος ένας κωνικός διεισδυτής με σφαιρική αιχμή. Σε κάποια απόσταση από το διεισδυτή βρίσκεται το επίπεδο, άκαμπτο «τραπέζι» πάνω στο οποίο επικάθεται το δείγμα. Ολοκληρώνοντας την περιγραφή, στη βάση του οργάνου βρίσκεται ο υδραυλικός κύλινδρος λαδιού, ο οποίος εξαιτίας της αντίστασης που προκαλεί η παρουσία του λαδιού μέσα στο δοχείο ρυθμίζει τη σταθερή ταχύτητα με την οποία το αιχμηρό τμήμα του διεισδυτή κατευθύνεται προς το υπό δοκιμή υλικό.



**Εικόνα 2.13.2** Πλάγια όψη του σκληρόμετρου Shore Micro O-Ring κλίμακας Μ. Στην παραπάνω εικόνα διακρίνεται η αναλογική οθόνη του οργάνου στην οποία καταγράφονται οι διάφορες ενδείξεις σκληρότητας σε κάθε περίπτωση. Το εύρος των τιμών στην αναλογική οθόνη κυμαίνεται μεταξύ 0 και 100. Η τιμή 0 αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή σκληρότητας, ενώ η μέτρηση 100 στη μέγιστη. Πίσω από την κυκλική οθόνη είναι τοποθετημένος ο μοχλός του οργάνου, με την απελευθέρωση του οποίου ο δεισδυτής κατευθύνεται προς το δείγμα, πράγμα το οποίο δηλώνει την έναρξη της σκληρομέτρησης. Κάτω από την οθόνη και το μοχλό βρίσκεται το επίπεδο, άκαμπτο «τραπέζι» του δείγματος, πάνω στο οποίο επικάθεται το υπό δοκιμή υλικό. Ακόμη χαμηλότερα από το υπόβαθρο είναι τοποθετημένος ο υδραυλικός κύλινδρος λαδιού, στο ανώτερο τμήμα του οποίου διακρίνεται το κάλυμμα-τάπα του δοχείου με κόκκινο χρώμα.



**Εικόνα 2.13.3** Πλάγια όψη του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M. Στη φωτογραφία διακρίνεται η κυκλική αναλογική οθόνη του οργάνου κλίμακας εύρους μεταξύ 0 και 100, το άκαμπτο υπόβαθρό πάνω στο οποίο επικάθεται το δείγμα και ο υδραυλικός κύλινδρος λαδιού που καθορίζει την ταχύτητα της δοκιμής. Συσκευές τέτοιου τύπου βρίσκουν εφαρμογή σε πολύ λεπτά ελαστομερή υλικά αλλά και σε δοκίμια με ιδιόμορφο σχήμα.





**Εικόνα 2.13.4** Στην εικόνα μπορούμε να διακρίνουμε την αναλογική οθόνη του οργάνου, που χρησιμοποιείται για την ένδειξη των μετρήσεων. Στο κατώτερο τμήμα της οθόνης είναι ενσωματωμένος ο κωνικός διεισδυτής γωνίας  $30^\circ$  και σφαιρικής αιχμής. Όπως φαίνεται παραπάνω ο διεισδυτής είναι καλυμμένος με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να προστατεύεται σε περίπτωση πιθανής μετακίνησης του και εφόσον δεν χρησιμοποιείται για την εκτέλεση κάποιου πειράματος. Στο πίσω μέρος της οθόνης διακρίνουμε το μοχλό του οργάνου (rawl lever), το «ξεκλείδωμα» του οποίου σημαίνει την έναρξη της σκληρομέτρησης.



**Εικόνα 2.13.5** Αναλογική οθόνη συσκευής Shore κλίμακας M. Η σκληρότητα κατά Shore έχει εύρος από μηδέν έως 100, όπως φαίνεται παραπάνω. Η ένδειξη μηδέν ισοδυναμεί με μηδενική σκληρότητα, ενώ η ένδειξη 100 με τη μέγιστη σκληρότητα. Στην πρώτη περίπτωση το υλικό δεν παρουσιάζει καμία

αντίσταση κατά τη διείσδυση, ενώ στη δεύτερη είναι τελείως άκαμπτο και δεν επιτρέπει την εισχώρηση του αιχμηρού διεισδυτή.



**Εικόνα 2.13.6** Σκληρόμετρο Shore κλίμακας M, που χρησιμοποιείται για μετρήσεις υλικών που χαρακτηρίζονται από πολύ μικρό πάχος. Προτού εκτελεστούν τα πειράματα είναι απαραίτητη η πλήρωση του υδραυλικού κυλίνδρου στη βάση του οργάνου με λάδι. Το λάδι που χρησιμοποιείται για τη πλήρωση του δοχείου, όπως φαίνεται παραπάνω, έχει κωδικό MOBIL DTE OIL LIGHT. Στην εικόνα δεξιά, διακρίνεται το πλαστικό δοχείο που εμπεριέχει το λάδι καθώς και ο σωλήνας, που τοποθετείται στην τάπα του κυλίνδρου για να επιτευχθεί με ασφαλές τρόπο η μεταφορά του λαδιού στο δοχείο του οργάνου. Μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, ο διάφανος σωλήνας απομακρύνεται, το κάλυμμα (τάπα) του κυλίνδρου «σφραγίζει» το δοχείο και απομακρύνεται κάθε ίχνος λαδιού που έχει παραμείνει στην εξωτερική επιφάνεια της συσκευής, έτσι ώστε να εκτελεστούν οι σκληρομετρήσεις.





**Εικόνα 2.13.7** Πλήρωση με λάδι του υδραυλικού κυλινδρικού δοχείου στη βάση του σκληρόμετρου Shore κλίμακας M. Το πλαστικό δοχείο που περιέχει το λάδι συνδέεται με τον διάφανο πλαστικό σωλήνα και αυτός με τη σειρά του με την τάπα στο ανώτερο τμήμα της επιφάνειας του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στην εικόνα, με στόχο την μεταφορά του λαδιού στο εσωτερικό του κυλίνδρου του οργάνου. Το πλαστικό δοχείο «πιέζεται» σε τακτά χρονικά διαστήματα, έτσι ώστε το λάδι να εισχωρήσει στον κύλινδρο.



**Εικόνα 2.13.8** Το μεταλλικό, άκαμπτο υπόβαθρο της προηγούμενης εικόνας τοποθετημένο στην υποδοχή που έχει το «τραπέζι» της συσκευής Shore

κλίμακας M. Το υπόστρωμα του οργάνου πάνω στο οποίο επικάθεται το υλικό είναι πλέον έτοιμο. Το δείγμα τοποθετείται πάνω στη μεταλλική επιφάνεια και μπορεί να ξεκινήσει η σκληρομέτρηση.



**Εικόνα 2.13.9** Μεταλλικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο επικάθεται το ελαστικό δείγμα. Το σχήμα του εν λόγω υπόβαθρου είναι κυκλικό, όπως φαίνεται στην εικόνα, η επιφάνεια του χαρακτηρίζεται λεία και θεωρείται άκαμπτο συγκριτικά με το δοκίμιο, εφόσον έχουμε εξασφαλίσει ότι διαθέτει σκληρότητα 40 φορές μεγαλύτερη από το μετρούμενο υλικό σύμφωνα με τους Stevanovic et al. (2001). Τέτοιας μορφής υπόβαθρα εφαρμόζονται σε σκληρόμετρα Shore κλίμακας M, που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση πολύ λεπτών στρωμάτων. Κάθε συσκευή τύπου M διαθέτει 6 πανομοιότυπα μεταλλικά υποστρώματα, που παρουσιάζουν διαφορές ως προς την ανώτερη επιφάνειά τους και η επιλογή τους γίνεται κάθε φορά ανάλογα με τη μορφή και το σχήμα του μετρούμενου δείγματος. Κάθε σκληρόμετρο τύπου M διαθέτει ένα άκαμπτο «τραπέζι» πάνω στο οποίο επικάθεται το υλικό. Το «τραπέζι» αυτό διαθέτει μία κυκλική σχισμή κατά μήκος του άξονα (Shaft) του οργάνου που κινείται ο διεισδυτής και στο άνοιγμα αυτό τοποθετείται το υπόβαθρο της εικόνας.



**Εικόνα 2.13.10** Το λευκό δοκίμιο (white) επικάθεται στο άκαμπτο υπόστρωμα. Πρόκειται για το μαλακότερο ελαστομερές δοκίμιο που εμπεριέχεται στην «κασετίνα» με μετρούμενη σκληρότητα S κατά Shore M ίση με 28.6, σύμφωνα με μετρήσεις της εταιρίας. Σύμφωνα με τη δικής μας μέτρηση η σκληρότητα προκύπτει ίση με 33.96, δηλαδή τα μαλακότερα δοκίμια φαίνεται να παρουσιάζουν κάποια απόκλιση όσον αφορά τα πειραματικά αποτελέσματα συγκριτικά με τις προδιαγραφές που δίνει η εταιρία.



**Εικόνα 2.13.11** Στην εικόνα βλέπουμε το μπλε (blue) δοκίμιο. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές που δίνει η εταιρία για το εν λόγω δοκίμιο η σκληρότητα του δίνεται ίση με 52.9 χρησιμοποιώντας συσκευή Shore κλίμακας M. Από τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο η σκληρότητα κατά Shore του ίδιου υλικού προκύπτει ίση με 55.88, δηλαδή και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει απόκλιση όσον αφορά τα αποτελέσματα, αλλά είναι πολύ μικρή συγκριτικά με το προηγούμενο δείγμα.



**Εικόνα 2.13.12** Το κίτρινο (yellow) δοκίμιο επικάθεται πάνω στην άκαμπτη, μεταλλική επιφάνεια του οργάνου. Η εταιρία για το εν λόγω υλικό δίνει σκληρότητα 42.7 μετρώντας με σκληρόμετρο τύπου M. Σύμφωνα με τα πειράματα που εκτελέστηκαν στο εργαστήριο η σκληρότητα κατά Shore με την ίδια συσκευή ισούται με 47.24 κατά μέσο όρο. Η διαφορά στα αποτελέσματα συνεχίζει να υπάρχει, παρόλα αυτά όμως δείχνει να μειώνεται καθώς το δοκίμιο γίνεται πιο άκαμπτο.





**Εικόνα 2.13.13** Το πράσινο (green) δοκίμιο τοποθετείται κάτω από τον άξονα που κινείται ο άκαμπτος διεισδυτής για την έναρξη της διαδικασίας της σκληρομέτρησης. Το δοκίμιο σύμφωνα με τις προδιαγραφές της εταιρίας παρουσιάζει σκληρότητα κατά Shore ίση με 62.3, ενώ από τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο η σκληρότητα με την ίδια συσκευή ισούται με 64.58. Η απόκλιση στα αποτελέσματα λοιπόν, μειώνεται σημαντικά σε αυτή την περίπτωση.



**Εικόνα 2.13.14** Στην εικόνα διακρίνουμε το κόκκινο (red) δοκίμιο. Οι προδιαγραφές δίνουν σκληρότητα κατά Shore με όργανο κλίμακας M ίση με 72.6, ενώ σύμφωνα με τα αποτελέσματα των πειραμάτων στο εργαστήριο προκύπτει σκληρότητα ίση με 72.84. Το κόκκινο δείγμα παρουσιάζει μεγαλύτερη σκληρότητα σε σχέση με τα υλικά που εξετάστηκαν παραπάνω. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δείχνουν να συγκλίνουν σημαντικά σε τέτοιου είδους υλικά.



**Εικόνα 2.13.15** Στην εικόνα φαίνεται το καφέ (brown) δοκίμιο, η σκληρότητα του οποίου δίνεται από την εταιρία 81.5 μετρούμενη με όργανο Shore κλίμακας M. Στο εργαστήριο τα πειράματα που εκτελέστηκαν επαληθεύουν τις προδιαγραφές δίνοντας σκληρότητα ίση με 81.48 χρησιμοποιώντας την ίδια συσκευή. Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση ταυτίζονται.





**Εικόνα 2.13.16** Το μαύρο (black) δοκίμιο της φωτογραφίας παρουσιάζει τη μεγαλύτερη σκληρότητα συγκριτικά με τα υπόλοιπα δοκίμια της «κασετίνας». Σύμφωνα με τη εταιρία παρουσιάζει σκληρότητα με χρήση της συσκευής τύπου M ίση με 87. Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύουν και τα πειράματα στο εργαστήριο δίνοντας σκληρότητα για το εν λόγω δοκίμιο ίση με 87.22. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η συσκευή Micro O – Ring δεν παρουσιάζει αποκλίσεις όσον αφορά τις μετρήσεις σκληρότητας για δείγματα που παρουσιάζουν σημαντική σκληρότητα, σε αντίθεση με τα υλικά που είναι ιδιαίτερα μαλακά.



**Εικόνα 2.13.17** Ελαστομερές δοκίμιου με κωδικό S/N Blue Xo Durometer 120974. Το εν λόγω δείγμα στάλθηκε αρχικά από την εταιρία με τη συσκευή Shore κλίμακας O. Έχοντας λοιπόν, μία πρώτη εκτίμηση για το μέτρο ελαστικότητας από τις μετρήσεις με το σκληρόμετρο κλίμακας O, έχουμε ως στόχο να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα αυτά και με ένα όργανο κλίμακας M όπως είναι το Micro O – Ring. Το ελαστομερές της εικόνας μετά από μία σειρά πειραμάτων που εκτελέστηκαν στο εργαστήριο παρουσιάζει σκληρότητα ίση με 58.2, κάνοντας χρήση της συσκευής τύπου M. Το ίδιο υλικό μετρούμενο με συσκευή κλίμακας O έχει σκληρότητα 65.68.



**Εικόνα 2.13.18** Ελαστικά δοκίμια G&T διαφορετικού μεγέθους. Το σχήμα των δοκιμίων είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση πειραμάτων εφελκυσμού. Η σκληρότητα του εικονιζόμενου δοκιμίου είναι δοσμένη από τον κατασκευαστή με σκληρόμετρο Shore κλίμακας A και ισοδυναμεί με 75, ενώ το μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού υπολογίστηκε από τους Giannakopoulos και Triantafyllou (2006) ίσο με 7.5 MPa. Για τα δοκίμια αυτά, αποφασίστηκε η μέτρηση της σκληρότητας με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M, εξαιτίας του πολύ μικρού πάχους που διαθέτουν τα υλικά αυτά, το οποίο είναι μόλις 1.89 χιλιοστά. Η διαδικασία αυτή έχει ως στόχο την επαλήθευση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας, έτσι ώστε να εφαρμοσθεί η μέθοδος και σε άλλα υλικά των οποίων τις μηχανικές ιδιότητες δεν τις γνωρίζουμε. Ειδικότερα, μετά από ένα πλήθος δοκιμών η μέση σκληρότητα κατά Shore M μετρήθηκε ίση με 76.4. Για την εκτέλεση των πειραμάτων τα δείγματα λόγω του ιδιόμορφου σχήματος που έχουν τοποθετήθηκαν και στα αντίστοιχα υπόβαθρα που διαθέτει η συσκευή, όπως διακρίνουμε παραπάνω.



**Εικόνα 2.13.19** Ελαστικό δοκίμιο G&T τοποθετημένο στην άκαμπτη επιφάνεια σκληρόμετρου Shore κλίμακας M. Το δείγμα, όπως φαίνεται παραπάνω, έχει ιδιόμορφο σχήμα και μαύρο χρώμα. Το μέτρο ελαστικότητας του είναι γνωστό και ισούται με 7.5 MPa. Για να επαληθεύσουμε την τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E$  επιλέξαμε να μετρήσουμε το δείγμα με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M, λόγω του λεπτού στρώματος του υλικού. Μετά από 5 διαδοχικές μετρήσεις, η μέση τιμή της σκληρότητας  $S$  προέκυψε ίση με 76.4, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη εικόνα.



## Παράρτημα Ζ

### 2.14 Σκληρομέτρηση σε ελαστικό δείγμα με κωδικό G&T



**Εικόνα 2.14.1** Δοκίμιο G&T απλά εδρασμένο πάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα. Το δείγμα μετράται με σκληρόμετρο Shore κλίμακας M. Οι μετρήσεις του υλικού πραγματοποιούνται στα ακραία τμήματα, όπως φαίνεται στην εικόνα. Παρόλα αυτά, το δείγμα αποδεικνύεται ότι είναι ομογενές.



**Εικόνα 2.14.2** Πάνω στο προηγούμενο δοκίμιο G&T επικάθεται ίδιο δοκίμιο. Το πάχος του δείγματος αυξάνεται και ισοδυναμεί με 3.78 χιλιοστά. Το δοκίμιο

είναι έτοιμο να υποβληθεί σε σκληρομέτρηση με συσκευή τύπου M. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων συμπίπτουν με εκείνα της μιας στρώσης πάχους 1.89 χιλιοστών.



**Εικόνα 2.14.3** Τρεις στρώσεις δοκιμίου G&T συνολικού πάχους 5.67 χιλιοστά. Η δοκιμή πραγματοποιείται και σε αυτή την περίπτωση με σκληρόμετρο κλίμακας M και τα αποτελέσματα συμπίπτουν με τα προηγούμενα. Η μέση σκληρότητα κατά Shore ισούται περίπου με 80.



**Εικόνα 2.14.4** Δύο στρώσεις του υλικού G&T. Το μετρούμενο υλικό ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών. Υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση με συσκευή Shore κλίμακας M. Οι δοκιμές σε αυτή την περίπτωση γίνονται στο λαιμό του δείγματος, όπως δείχνεται παραπάνω, και τα αποτελέσματα που λαμβάνονται συμπίπτουν με τα προηγούμενα εξαιτίας της ομοιογένειας του υλικού.

## Παράρτημα Η

### 2.15 Εξισώσεις που συνδέουν τη δύναμη, το βάθος διείσδυσης και την ακτίνα επαφής σε κωνικό διεισδυτή με σφαιρική αιχμή

Η σχέση μεταξύ της δύναμης  $P$  και του βάθους διείσδυσης  $h$  σε κωνικό διεισδυτή με σφαιρική αιχμή αποτελεί μία απλή μαθηματική μεθοδολογία η οποία προτείνεται από τον Shield (1967), βασισμένη σε ένα αμοιβαίο θεώρημα. Το θεώρημα αυτό αφορά την  $P(h)$  συνάρτηση, για οποιοδήποτε αξονο-συμμετρικό διεισδυτή, στην κατανομή παραγόμενης πίεσης από έναν κυλινδρικό διεισδυτή:

$$P = \int_0^a p'(r) \frac{f(r)}{h'} 2\pi r dr \quad (2.39)$$

Όπου οι ποσότητες  $p'(r)$  και  $h'$  παριστάνουν την κατανομή της πίεσης και τη βύθιση του διεισδυτή αντίστοιχα για την περίπτωση κυλινδρικού διεισδυτή, και  $f(r)$  είναι μια συνάρτηση που προσδιορίζει το προφίλ του διεισδυτή, την απόσταση του από την κατώτερη επιφάνεια ( $h = 0$ ) σαν συνάρτηση της ακτίνας,  $r$ , από τον άξονα,  $0 \leq r \leq a$ . Η κατανομή πίεσης ενός «τέλειου» κυλινδρικού διεισδυτή δίνεται από τον Sneddon (1965).

$$p'(r) = \frac{E^*}{\pi} \frac{h'}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \quad (2.40)$$

Υποκαθιστώντας την εξίσωση (2.40) στην (2.39), λαμβάνουμε τη σχέση

$$P = 2E^* \int_0^a \frac{f(r)}{(a^2 - r^2)^{1/2}} r dr \quad (2.41)$$

Για έναν «τέλειο» κωνικό διεισδυτή ισχύει η ισότητα:

$$f(r) = h - (r / \tan \theta) \quad (2.42)$$

και για έναν ελαττωματικό κώνο ισχύει ότι:

$$f(r) = h - \frac{r^2}{2R} \quad 0 \leq a \leq b$$

$$f(r) = h - \frac{r-b}{\tan \theta} - h^* \quad b \leq a \quad h^* = \frac{b^2}{2R} \quad (2.43)$$

**Όταν  $a \leq b$**

$$P = 2E^* \int_0^a \frac{h - \frac{r^2}{2R}}{(a^2 - r^2)^{1/2}} r dr = 2E^* \left( ah - \frac{a^3}{3R} \right) \quad (2.44)$$

Η ακτίνα της περιοχής επαφής προσδιορίζεται μεγιστοποιώντας την τιμή της επιβαλλόμενης δύναμης P με σεβασμό στο α, το οποίο είναι, όταν  $\partial P / \partial a = 0$ :

$$a = (Rh)^{1/2}, P = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rh}^{3/2} \quad (2.45)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εξίσωση για την περίπτωση σφαιρικού διεισδυτή (Hertzian contact), όπως δείχνεται από τον Shield (1967).

Το βάθος διεισδυσης που αντιστοιχεί στη μετάβαση από σφαιρική διείσδυση σε (ελαττωματική) κωνική διείσδυση,  $h_s$ , δίνεται από τη συντομική συνθήκη  $a = b$ , για την οποία η τιμή του h ισοδυναμεί με  $h_s = b^2 / R = 2h^*$

**Όταν  $a \geq b$**

$$P = 2E^* \left[ \int_0^b \left( h - \frac{r^2}{2R} \right) \frac{r dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} + \int_b^a \left( h - \frac{r-b}{\tan \theta} - h^* \right) \frac{r dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \right]$$

$$P = 2E^* \left[ h \int_0^a \frac{r dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} - \frac{1}{\tan \theta} \int_b^a \frac{r^2 dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} - \frac{1}{2R} \int_0^b \frac{r^3 dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} + \left( \frac{b}{\tan \theta} - h^* \right) \int_b^a \frac{r dr}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \right]$$

$$P = 2E^* \left\{ ah - \frac{a^2}{2 \tan \theta} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{b}{a} \right) \right] - \frac{a^3}{3R} + (a^2 - b^2)^{1/2} \left( \frac{b}{2 \tan \theta} + \frac{a^2 - b^2}{3R} \right) \right\} \quad (2.46)$$

Στην παραπάνω εξίσωση εάν λάβουμε υπόψη τη συνθήκη:

$$\partial P / \partial a = 0$$



θα οδηγηθούμε στη σχέση:

$$h + \frac{a}{R} \left( (a^2 - b^2)^{1/2} - a \right) - \frac{a}{\tan \theta} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{b}{a} \right) \right] = 0 \quad (2.47)$$

## Κεφάλαιο 3

### 3.1 Προένταση του ελαστικού δείγματος G&T και υπολογισμός της δύναμης τριβής για αποφυγή της ολίσθησης

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε εκτενώς στη σκληρομέτρηση ελαστομερών δοκιμίων που εδράζονται ελεύθερα πάνω σε άκαμπτη επιφάνεια σκληρόμετρου Shore. Είναι σημαντικό λοιπόν, να προσδιορίσουμε τη σκληρότητα κατά Shore και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  των υλικών που εξετάζουμε όταν αυτά έχουν υποστεί προένταση, δηλαδή «τέντωμα» κατά τη μία διεύθυνση. Για την πραγματοποίηση των πειραμάτων αυτών επιλέχθηκε το ελαστικό δοκίμιο G&T, του οποίου τις ιδιότητες γνωρίζουμε. Πρόκειται για ελαστικό δοκίμιο μαύρου χρώματος που αποτελείται από την επιφάνεια του λαιμού με διαστάσεις  $6.04 \times 20.5$  mm και τις επιφάνειες των ακραίων τμημάτων  $25 \times 25$  mm. Το δείγμα είναι λεπτό, με πάχος 1.89 mm.

Έχοντας επιλέξει το υλικό δοκίμιο που θα χρησιμοποιήσουμε για την υλοποίηση των πειραμάτων και έχοντας σχεδιάσει τη συσκευή προέντασης που θα χρησιμοποιήσουμε για να «τεντώσουμε» το δείγμα πρέπει να υπολογίσουμε πριν την σκληρομέτρηση με προένταση τη δύναμη τριβής, έτσι ώστε να αποφύγουμε πιθανή ολίσθηση των ακραίων τμημάτων, που αποτελούν τα σημεία πάκτωσης του υλικού.

Το «τέντωμα» (stretch) κατά την διεύθυνση 1 ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_1 = \frac{\text{τελικό(μήκος)}}{\text{αρχικό(μήκος)}} \quad (3.1)$$

**Για  $\lambda_1=1$  το δοκίμιο χαρακτηρίζεται ως αφόρτιστο, για  $\lambda_1>1$  το δείγμα υποβάλλεται σε εφελκυσμό, ενώ για  $\lambda_1<1$  το υλικό υποβάλλεται σε θλίψη!**

Στην περίπτωση του πειράματος που εκτελέσαμε για την περίπτωση μεγάλης αρχικής παραμόρφωσης στο δοκίμιο, το «stretch» υπολογίστηκε ίσο με:

$$\lambda_1 = \frac{2.424\text{cm}}{2\text{cm}} = 1.212$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίστηκε και για την περίπτωση μικρής αρχικής παραμόρφωσης ίσο με :

$$\lambda_1 = \frac{2.143\text{cm}}{2\text{cm}} = 1.072$$

Με το συμβολισμό  $\lambda$  παριστάνεται το «τέντωμα» του υλικού που υποβάλλεται σε προένταση προτού πραγματοποιηθεί η σκληρομέτρηση.

Το σύμβολο  $\lambda$  ορίζεται και στις τρεις διευθύνσεις του δείγματος, δηλαδή  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$ .

**Στην περίπτωση ισότροπου υλικού, δηλαδή υλικό σώμα που οι φυσικές του ιδιότητες είναι οι ίδιες προς όλες τις κατευθύνσεις, ισχύει ότι:**

$$\lambda_2 = \lambda_3$$

Όπου οι δείκτες 2, 3 παριστάνουν τις δύο από τις τρεις διευθύνσεις του υλικού. **Επιπρόσθετα, για τα ασυμπιεστα υλικά, όπως είναι τα ελαστομερή, ισχύει:**

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (3.2)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$ , εφόσον το  $\lambda_1$  είναι γνωστό.

Για την περίπτωση μεγάλης προέντασης ισχύει:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1}{1.212}} = 0.91$$

Αντίθετα όταν επιβάλλουμε μικρό αρχικό «stretch»:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1}{1.072}} = 0.97$$

Έτσι, το νέο πάχος του υλικού που έχει υποστεί προένταση ισοδυναμεί με  $t\lambda_2 = 1.89 \cdot 0.91 = 1.72 \text{ mm}$  και  $t\lambda_3 = 1.89 \cdot 0.97 = 1.83 \text{ mm}$  αντίστοιχα, για τις δύο περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν. Υποβάλλοντας λοιπόν, σε προένταση το δοκίμιο προτού πραγματοποιηθεί η σκληρομέτρηση το δείγμα παρουσιάζει μία αρχική παραμόρφωση:

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 - 1 \quad (3.3)$$

Το δοκίμιο G&T έχει αρχική παραμόρφωση  $\varepsilon_1 = 0.212$  και  $\varepsilon_1 = 0.072$ , αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση η παραμόρφωση του δείγματος είναι σημαντική, ενώ στη δεύτερη είναι αμελητέα.

Για τον υπολογισμό της δύναμης τριβής χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα μεγέθη:

- ❖ Μέτρο ελαστικότητας  $E = 22\text{MPa} = 22 \times 10^6 \text{Pa}$ . Επιλέχθηκε η τιμή του δοκιμίου που εμφανίζει τη μέγιστη ελαστικότητα, από εκείνα που έχουμε χρησιμοποιήσει σε προηγούμενα κεφάλαια για τη σκληρομέτρηση.
- ❖ Επιφάνεια  $A$  στη διεύθυνση προέντασης  

$$A = (6 \times 10^{-3}) \times (1.89 \times 10^{-3}) = 11.34 \times 10^{-6} \text{m}^2$$
- ❖ Τάση  $\sigma = E\varepsilon = 22 \times 10^6 \text{Pa} \times 0.212 = 4.664 \text{Pa}$
- ❖ Δύναμη  $P = EA\varepsilon = 22 \times 10^6 \times 11.34 \times 10^{-6} \times 0.212 \approx 53\text{N}$
- ❖ Δύναμη τριβής  $P = T = \mu_f N = 1 \times N \Rightarrow N = 53\text{N}$
- ❖ Κάθετη δύναμη στην περιοχή επαφής  

$$N = EA_c \varepsilon_c = 22 \times 10^6 \times (25 \times 10^{-3})^2 \times \varepsilon_c \approx 53\text{N} \Rightarrow \varepsilon_c \approx 0.004$$

### 3.2 Σκληρομέτρηση προεντεταμένου ελαστικού με κωδικό G&T

Μετά τον σχεδιασμό και την κατασκευή της συσκευής προέντασης ελαστομερών υλικών ακολούθησαν τα πειράματα σκληρομέτρησης χρησιμοποιώντας σκληρόμετρο Shore κλίμακας O.

Αρχικά, το υλικό δοκίμιο G&T υποβλήθηκε σε μεγάλου βαθμού προένταση με  $\lambda=1.212$  και τα αποτελέσματα της σκληρότητας κατά Shore με αρχική προένταση στο υλικό ήταν τα ακόλουθα:

- ❖  $S_1 = 84.00$
- ❖  $S_2 = 83.50$
- ❖  $S_3 = 84.00$

Η μέση σκληρότητα κατά Shore σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα ισοδυναμεί με  $S_m = 83.83$ .

Στη συνέχεια, το ίδιο δοκίμιο υποβλήθηκε σε μικρή αρχική προένταση με αντίστοιχο «τέντωμα»  $\lambda=1.072$ . Τα αποτελέσματα της σκληρομέτρησης είναι παρόμοια με τα προηγούμενα:

- ❖  $S_1 = 84.00$
- ❖  $S_2 = 83.00$
- ❖  $S_3 = 83.50$

Η μέση σκληρότητα των παραπάνω τιμών ισούται με  $S_m = 83.50$ .

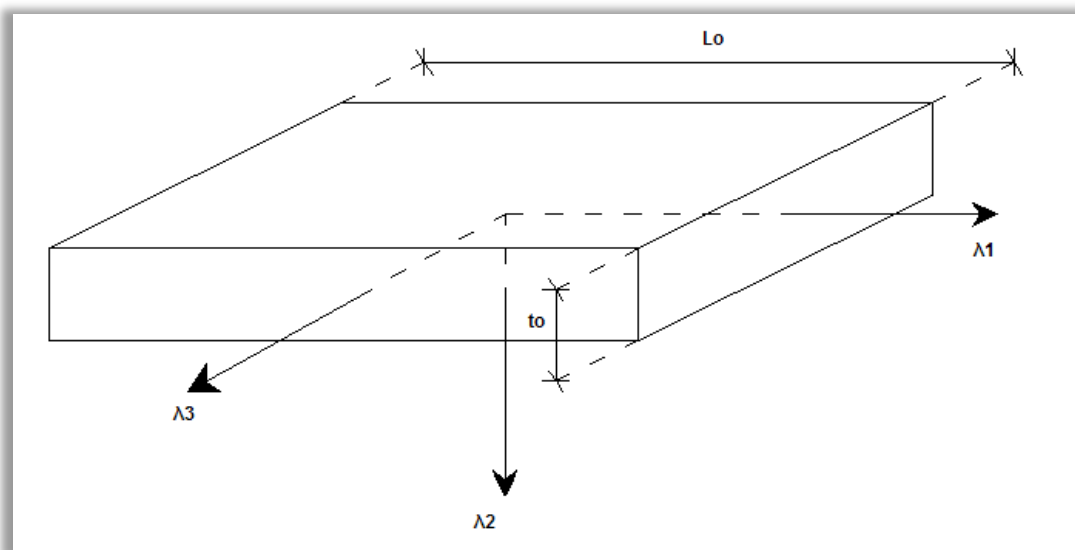
Σε προηγούμενο κεφάλαιο μετρήθηκε η σκληρότητα κατά Shore με την ίδια συσκευή, χωρίς την επιρροή της προέντασης, έχοντας το υλικό δοκίμιο τοποθετημένο τελείως ελεύθερο πάνω στο υπόβαθρο του οργάνου. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του πειράματος σε κεντρικά σημεία του λαιμού του δείγματος διαφέρουν σε σχέση με αυτά που αναγράφονται παραπάνω. Ειδικότερα, χωρίς την επιρροή της προέντασης το ίδιο δοκίμιο παρουσιάζει μέση σκληρότητα κατά Shore ίση με 80.33. **Επομένως, η επιβολή αρχικής προέντασης στο δοκίμιο αυξάνει τη σκληρότητα κατά Shore!**

Η προένταση εμφανίζει τρομακτικά πλεονεκτήματα όσον αφορά τη μετρολογία και αποτελεί ένα πολύ καλό πειραματικό έλεγχο, ιδιαίτερα υπό τη μορφή του μόνο-αξονικού ελκυσμού. Προβλήματα παρουσιάζονται κυρίως κατά την εισαγωγή θλιπτικών τάσεων, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, τα οποία είναι ευκολότερο να αντιμετωπιστούν σε ζελατινοειδή υλικά και όχι σε ελαστικά. Το φαινόμενο της προέντασης δείχνει σε πρώτη προσέγγιση να είναι ανεξάρτητο της λεπτότητας του δοκιμίου (βλέπε παράρτημα).

### 3.3 Προτεινόμενες μεθοδολογίες υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T με συσκευή Shore κλίμακας O

Το ελαστικό δοκίμιο G&T, όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, υποβλήθηκε σε μία σειρά πειραμάτων σκληρομέτρησης με απώτερο στόχο να προσδιοριστεί το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Τα πειράματα αυτά εκτελέστηκαν με συσκευές Shore κλίμακας O και M.

Μετά την ολοκλήρωση των σκληρομετρήσεων με απλή έδραση του δείγματος πάνω στη βάση του οργάνου και στη συνέχεια την ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών, με διάφορες μεθόδους, προεντείνουμε το υλικό μονοαξονικά για να εξετάσουμε τη «συμπεριφορά» του ως προς τις μηχανικές του ιδιότητες. Πράγματι, όπως θα δούμε παρακάτω, επιβάλλοντας κάποιο αρχικό «τέντωμα»  $\lambda_1$  στη διεύθυνση  $x_1$  του υλικού, το ελαστικό δοκίμιο που χαρακτηρίζεται ως ισότροπο (δηλαδή η συμπεριφορά του ελαστικού δείγματος δε μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο του υλικού) μετατρέπεται σε ανισότροπο.



**Σχήμα 3.3.1** Ελαστικό δοκίμιο που υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το δείγμα προεντείνεται κατά τη διεύθυνση  $x_1$  με αντίστοιχο «τέντωμα»  $\lambda_1$ . Το αρχικό μήκος του υλικού κατά τη διεύθυνση  $x_1$  συμβολίζεται με  $L_0$  (reference configuration). Στην αρχική του κατάσταση το υλικό είναι απαραμόρφωτο και το πάχος του παριστάνεται με  $t_0$ , όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα. Με την επιβολή της προέντασης το μήκος και το πάχος του υλικού μεταβάλλονται και αντιστοιχούν στα μεγέθη  $L$ ,  $t$  (spatial configuration).

Έτσι λοιπόν, το ελαστικό δοκίμιο G&T υποβλήθηκε σε κάποια αρχική μεταβολή του μήκους του ως προς τη διεύθυνση  $x_1$  (όπως αυτή

ορίστηκε στο παραπάνω σχήμα). Ο λόγος του τελικού μήκους του δοκιμίου  $L$  (εξαιτίας της προέντασης του υλικού) προς το αρχικό μήκος  $L_0$  στη διεύθυνση  $x_1$  ονομάζεται «τέντωμα» (stretch)  $\lambda_1 = \frac{L}{L_0} > 1$ . Με την επιβολή του «τεντώματος»  $\lambda_1$ , το υπό δοκιμή υλικό παρουσιάζει μεταβολές και στις κατευθύνσεις  $x_2$  και  $x_3$ . Στη διεύθυνση  $x_3$  παρατηρούμε ότι μεταβάλλεται το πάχος του δείγματος εξαιτίας της επιμήκυνσης του δοκιμίου κατά τη διεύθυνση  $x_1$ . Το αρχικό πάχος του υλικού συμβολίζεται με  $t_0$  (reference configuration), ενώ το τελικό με  $t$  (spatial configuration). Ο λόγος του τελικού πάχους προς το αρχικό εκφράζει το «τέντωμα» στη διεύθυνση  $x_3$  και παριστάνεται με το σύμβολο  $\lambda_3 = \frac{t}{t_0} < 1$ . Αν επιλύσουμε την παραπάνω σχέση ως προς  $t$  μπορούμε να υπολογίσουμε το τελικό πάχος του δείγματος μετά την επιβολή της προέντασης ως εξής:

$$t = t_0 \lambda_3 \quad (3.4)$$

### 3.3.1 Υπολογισμός του πάχους $t$ του ελαστικού δείγματος στην τρέχουσα κατάσταση

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, προτού υλοποιηθεί η σκληρομέτρηση το υλικό είναι τοποθετημένο πάνω σε μία συσκευή προέντασης, με άκαμπτο υπόστρωμα. Πριν ακόμη εφαρμόσουμε τις διάφορες μεθοδολογίες για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του υπό εξέταση υλικού είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε το «τέντωμα»  $\lambda_i$  στις τρεις διευθύνσεις του υλικού καθώς και το τελικό πάχος  $t$  του δείγματος, όταν αυτό επιμηκύνεται μονοαξονικά. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι η εξής:

- ❖ Το αρχικό μήκος του δοκιμίου  $L_0$  θεωρείται γνωστό (αρχική κατάσταση του υλικού)
- ❖ Το δείγμα επικάθεται σε συσκευή προέντασης και έχει επιμηκυνθεί κατά τη διεύθυνση  $x_1$ . Έτσι λοιπόν, μπορούμε να μετρήσουμε το τελικό μήκος  $L$  (τρέχουσα κατάσταση του υλικού)
- ❖ Το «τέντωμα» κατά τη διεύθυνση  $x_1$  υπολογίζεται από τη σχέση  $\lambda_1 = \frac{L}{L_0} > 1$
- ❖ Εξαιτίας της ισοτροπίας του υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση ισχύει η ισότητα  $\lambda_2 = \lambda_3$

- ❖ Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι το ελαστικό δοκίμιο G&T είναι ασυμπίεστο. Εξαιτίας λοιπόν, της ασυμπίεστότητας του δείγματος ισχύει η σχέση  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$
- ❖ Κάνοντας εφαρμογή της παραπάνω σχέσης μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» στις διευθύνσεις  $x_2$  και  $x_3$ . Έτσι προκύπτει η ισότητα  $\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$
- ❖ Έχοντας λοιπόν, υπολογίσει το «τέντωμα»  $\lambda_3$  μπορούμε να προσδιορίσουμε το τελικό πάχος του δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση, που δίνεται από τη σχέση  $t = t_0\lambda_3$ .

Το ελαστικό δοκίμιο G&T παραμορφώθηκε αρχικά κατά  $\varepsilon_1=21.2\%$  με αρχικό «τέντωμα»  $\lambda_1=1+\varepsilon_1=1.212>1$ , ενώ στη συνέχεια υποβλήθηκε σε μικρότερη παραμόρφωση  $\varepsilon_1=7.2\%$  με αντίστοιχο  $\lambda_1=1+\varepsilon_1=1.072>1$ . Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας για τις δύο περιπτώσεις προέντασης του υλικού, κάνοντας εφαρμογή των σχέσεων που προαναφέρθηκαν.

**Πίνακας 3.3.1.1** Συγκεντρωτικοί πίνακες για τις δύο περιπτώσεις προέντασης του ελαστικού G&T. Με  $L_0$  συμβολίζεται το αρχικό μήκος του δείγματος, με  $L$  το τελικό μήκος εφόσον το υλικό έχει υποστεί επιμήκυνση κατά τη μία διεύθυνση, με  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  παριστάνεται το «τέντωμα» στις αντίστοιχες διευθύνσεις  $x_1, x_2$ , και  $x_3$ , με  $t_0$  το πάχος του δοκιμίου στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση και με  $t$  το τελικό μήκος στην τρέχουσα κατάσταση εξαιτίας της προέντασης.

$L_0$ [cm]	$L$ [cm]	$\lambda_1$	$\lambda_2 = \lambda_3$	$\lambda_1\lambda_2\lambda_3$	$t_0$ [mm]	$t$ [mm]
2.000	2.424	1.212	0.908	1.000	1.890	<b>1.716</b>
2.000	2.144	1.072	0.966	1.000	1.890	<b>1.823</b>

$L_0$ [cm]	$L$ [cm]	$\lambda_1$	$\lambda_2 = \lambda_3$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$I_B = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$
2.000	2.424	1.212	0.908	1.060	0.152	3.118
2.000	2.144	1.072	0.966	1.019	0.053	3.015



### 3.3.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία υπολογισμού των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα

Στο σημείο αυτό, έχοντας προσδιορίσει το τελικό πάχος  $t$  του δοκιμίου G&T, για τις δύο περιπτώσεις μονοαξονικής προέντασης του υλικού, προχωράμε στη σκληρομέτρηση του δείγματος με συσκευή Shore κλίμακας O, που διαθέτει ενσωματωμένο σφαιρικό άκαμπτο διεισδυτή, για τη μέτρηση της σκληρότητας. Αφού μετρήσουμε τη σκληρότητα κατά Shore επιθυμούμε, εφαρμόζοντας τις μεθοδολογίες του Hertz και του Ting αντίστοιχα, να προσδιορίσουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E^*$  του προεντεταμένου υλικού. Για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του δοκιμίου G&T, εξαιτίας του λεπτού στρώματος του δείγματος, πραγματοποιήθηκε διόρθωση της ακτίνας επαφής  $a$  ως προς το πάχος  $t$  σύμφωνα με τη μεθοδολογία που προτείνουν οι Stevanovic et al. Η διαδικασία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας  $E^*$  σε προεντεταμένο δοκίμιο περιγράφεται ως εξής:

- ❖ Μέτρηση της σκληρότητας  $S$  του δείγματος με συσκευή Shore κλίμακας O (πείραμα)
- ❖ Από τις σκληρομετρήσεις προέκυψε ότι για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.212$ ,  $\lambda_1=1.072$  η μέση σκληρότητα κατά Shore ισούται με  $S_m=83.83$  και  $S_m=83.50$ , αντίστοιχα
- ❖ Υπολογισμός του βάθους διείσδυσης  $h(mm)$ , χρησιμοποιώντας σκληρόμετρο Shore κλίμακας O, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$h(mm) = 2.5 - 0.025S_m \quad (3.5)$$

- ❖ Υπολογισμός της επιβαλλόμενης δύναμης του ελατηρίου για συσκευή Shore κλίμακας O από τη σχέση:

$$P = 0.55 + 3(2.5 - h) \quad (3.6)$$

- ❖ Προσδιορισμός της ακτίνας επαφής  $a_L$  (ιδεατή ακτίνα) που αντιστοιχεί στον ημιάπειρο χώρο εφαρμόζοντας τη σχέση του Hertz ή του Ting, όπως αυτές εκφράζονται παρακάτω:

$$a_L = \sqrt{hr}, (Hertz) \quad (3.7)$$

$$h = \frac{1}{2} a_L \ln \frac{r + a_L}{r - a_L}, (Ting) \quad (3.8)$$

Όπου στην περίπτωση σκληρόμετρου Shore κλίμακας Ο η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή ισοδυναμεί με  $r=1.19 \text{ mm}$ .

- ❖ Προσδιορισμός του πάχους  $t$  του προεντεταμένου δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση, γνωρίζοντας ότι το υλικό είναι ασυμπίεστο και ισότροπο στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.212$ ,  $\lambda_2=1.072$  το τελικό πάχος του υλικού ισούται με  $t=1.716 \text{ mm}$  και  $t=1.823 \text{ mm}$ , αντίστοιχα
- ❖ Υπολογισμός της πραγματικής ακτίνας επαφής  $a$  εξαιτίας της επιρροής του υποστρώματος του δοκιμίου εφαρμόζοντας τη σχέση των Stevanovic et al.

$$\frac{a}{a_L} = 1 - c_3 \exp \left[ c_1 \left( \frac{t}{a} \right)^{c_2} \right] \quad (3.9)$$

Στην παραπάνω ισότητα οι συντελεστές  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  είναι γνωστοί και ίσοι με  $c_1 = -1.73$ ,  $c_2 = 0.734$ ,  $c_3 = 1.04$ .

- ❖ Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του προεντεταμένου δοκιμίου εφαρμόζοντας τη σχέση του Hertz ή του Ting, έχοντας υπολογίσει προηγουμένως τα μεγέθη  $a$ ,  $P$  και  $r$ . Επιπλέον, θεωρείται γνωστό ότι το υλικό είναι ασυμπίεστο και εξαιτίας αυτού ο λόγος του Poisson λαμβάνεται ίσος με  $\nu=1/2$ .

$$E^* = \frac{9}{16} \frac{Pr}{a^3}, (Hertz) \quad (3.10)$$

$$E^* = \frac{3}{2} \frac{P}{\left( (r^2 + a^2) \ln \frac{r+a}{r-a} - 2ar \right)}, (Ting) \quad (3.11)$$

### 3.3.3 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Hertz

Αρχικά, υποθέτουμε ότι δε γίνεται διόρθωση ως προς το πάχος  $t$  του δοκιμίου. Επομένως, αγνοούμε τη σχέση των Stevanovic et al. και θεωρούμε ότι  $a=a_L$ . Στη συνέχεια, παρατίθενται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας για τις δύο περιπτώσεις επιμήκυνσης του υλικού.

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.212$**

Σκληρότητα  $S_m=83.83$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.404 \text{ mm}$

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.838$  N  
Ακτίνα επαφής  $a= a_L=0.693$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=13.753$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.072$**

Σκληρότητα  $S_m=83.50$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.413$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.811$  N  
Ακτίνα επαφής  $a= a_L=0.70$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=13.235$  MPa

Τα παραπάνω αποτελέσματα που αφορούν τις δύο περιπτώσεις μονοαξονικής προέντασης του υλικού διαφέρουν. Έτσι λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επιρροή της προέντασης στο υλικό είναι εμφανής και χωρίς την επιρροή του πάχους  $t$ .

Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού λαμβάνοντας υπόψη τη διόρθωση της ακτίνας επαφής  $a$  ως προς το πάχος  $t$  ακολουθώντας τη μεθοδολογία των Stevanovic et al.

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.212$**

Σκληρότητα  $S_m=83.83$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.404$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.838$  N  
Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.693$  mm  
Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.716$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.67$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=15.219$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.072$**

Σκληρότητα  $S_m=83.50$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.413$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.811$  N  
Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.701$  mm  
Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.823$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.68$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=14.499$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1$  (δεν προεντίνεται το δοκίμιο)**

Σκληρότητα  $S_m=81.08$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.473$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.631$  N  
Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.75$  mm  
Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.89$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.725$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E_0=11.648$  MPa (για μία στρώση του υλικού)

Η τελευταία μέτρηση ( $\lambda_1=1$ ) πραγματοποιήθηκε με έδραση του εν λόγω υλικού πάνω στην αρχική βάση της συσκευής Shore κλίμακας O.

Παρατηρώντας προσεκτικά τα αποτελέσματα που αναγράφονται παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $E^*_{(\lambda_1=1.212)} > E^*_{(\lambda_1=1.072)} > E^0_{\lambda_1=1}$

### **3.3.4 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο ελαστικό δοκίμιο G&T εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting**

Αρχικά, υποθέτουμε ότι δε γίνεται η διόρθωση ως προς το πάχος  $t$  του δοκιμίου. Επομένως, αγνοούμε τη σχέση των Stevanovic et al. και θεωρούμε ότι η πραγματική ακτίνα επαφής ταυτίζεται με την ιδεατή ( $a=a_L$ ).

#### **Για «τέντωμα» $\lambda_1=1.212$**

Σκληρότητα  $S_m=83.83$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.404$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.838$  N

Ακτίνα επαφής  $a= a_L=0.654$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=14.214$  MPa

#### **Για «τέντωμα» $\lambda_1=1.072$**

Σκληρότητα  $S_m=83.50$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.413$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.811$  N

Ακτίνα επαφής  $a= a_L=0.661$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=13.664$  MPa

**Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας για το ελαστικό δοκίμιο κατά Ting με τα αντίστοιχα κατά Hertz, παρατηρούμε ότι η μεθοδολογία του Ting είναι καλύτερη.** Καταλήγουμε σε αυτό το συμπέρασμα διότι στις τιμές του μέτρου ελαστικότητας κατά Ting είναι ιδιαίτερα εμφανής η επιρροή της προέντασης του δοκιμίου, με σημαντική απόκλιση των αποτελεσμάτων για τις παραμορφώσεις  $\varepsilon=21.2\%$  αρχικά και  $\varepsilon=7.2\%$  στη συνέχεια. Επιπρόσθετα, όσον αφορά τη διόρθωση των αποτελεσμάτων ως προς το πάχος, παρατηρούμε ότι εάν δεν τη συμπεριλάβουμε στη μεθοδολογία τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε δεν είναι αντιπροσωπευτικά.

Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού λαμβάνοντας υπόψη τη διόρθωση της ακτίνας επαφής  $a$  ως προς το πάχος  $t$ , εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία των Stevanovic et al.

#### **Για «τέντωμα» $\lambda_1=1.212$**

Σκληρότητα  $S_m=83.83$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.404$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.838$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.654$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.716$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.635$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=15.675$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.072$**

Σκληρότητα  $S_m=83.50$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.413$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.811$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.661$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.823$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.645$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=14.825$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1$  (δεν προεντείνεται το δοκίμιο)**

Σκληρότητα  $S_m=81.08$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.473$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.631$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.70$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=1.89$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.68$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E_0=12.096$  MPa (για μία στρώση του υλικού)

Για πολλές στρώσεις του υλικού G&T ( $n \geq 3$ ) προκύπτει μέτρο ελαστικότητας  $E_0 \approx 7$  MPa, που έχει υπολογιστεί αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Παρατηρώντας τα ανωτέρω αποτελέσματα ισχύει η ανισότητα:

$$\lambda_1 = 1.212 > \lambda_1 = 1.072 > \lambda_1 = 1$$

$$E^*_{(\lambda_1=1.212)} > E^*_{(\lambda_1=1.072)} > E^0_{\lambda_1=1}$$

Όσον αφορά λοιπόν, τα ανωτέρω αποτελέσματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει αρκετή ευαισθησία στη μέτρηση και στην ανάλυση. Στον πίνακα που ακολουθεί απεικονίζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας για το ελαστικό G&T, εφαρμόζοντας τις δύο μεθοδολογίες (Hertz και Ting) που περιγράφηκαν εκτενώς προηγουμένως.

**Πίνακας 3.3.4.1** Συγκεντρωτικός πίνακας που απεικονίζει τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας  $E$  για το ίδιο υλικό δοκίμιο G&T, ακολουθώντας τις μεθοδολογίες του Hertz και του Ting. Στον παραπάνω πίνακα με το σύμβολο  $\lambda_1$  παριστάνεται το αρχικό «τέντωμα» του υλικού. Για την τιμή  $\lambda=1$  το υλικό είναι απαραμόρφωτο, για  $\lambda > 1$  βρίσκεται σε ελκυσμό, ενώ για  $\lambda < 1$  υποβάλλεται σε θλίψη. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας του ελαστικού δοκιμίου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι τιμές του  $E$  με τη μέθοδο του Ting, όσον αφορά τις δύο περιπτώσεις προέντασης του υλικού, παρουσιάζουν μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ τους. Συνεπώς, τα αποτελέσματα κατά Ting παρουσιάζουν μεγαλύτερη ακρίβεια. **Ολοκληρώνοντας, μπορούμε να πούμε ότι η επιμήκυνση του δείγματος, ως προς μία επιλεγμένη διεύθυνση του υλικού, αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας του, δηλαδή προσδίδει στο υλικό μεγαλύτερη ακαμψία.**

$\lambda_i$	E (Hertz) Με διόρθωση του πάχους t [MPa]	E (Ting) Με διόρθωση του πάχους t [MPa]	E (Hertz) χωρίς διόρθωση του πάχους t [MPa]	E (Ting) χωρίς διόρθωση του πάχους t [MPa]
1	11.648	12.096	-	-
1.072	14.499	14.825	13.235	13.664
1.212	15.219	15.675	13.753	14.214

### 3.4 Στερεό Neo - Hookean

Σε ένα στερεό υλικό neo-Hookean, το ελαστικό δυναμικό ανά μονάδα όγκου εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (3.12)$$

Όπου με  $\mu_0$  παριστάνεται το μέτρο διάτμησης του υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση και με  $\lambda_i$  το «τέντωμα» του δοκιμίου στη  $x_i$  κατεύθυνση. Η παραπάνω ισότητα μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού, όπου ισχύει η σχέση  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ .

Έτσι λοιπόν, προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν τις ορθές τάσεις  $S_{ii}$  με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις.

$$\{S_{11} - S_{22}, S_{22} - S_{33}, S_{33} - S_{11}\} = \mu_0 \{\lambda_1^2 - \lambda_2^2, \lambda_2^2 - \lambda_3^2, \lambda_3^2 - \lambda_1^2\} \quad (3.13)$$

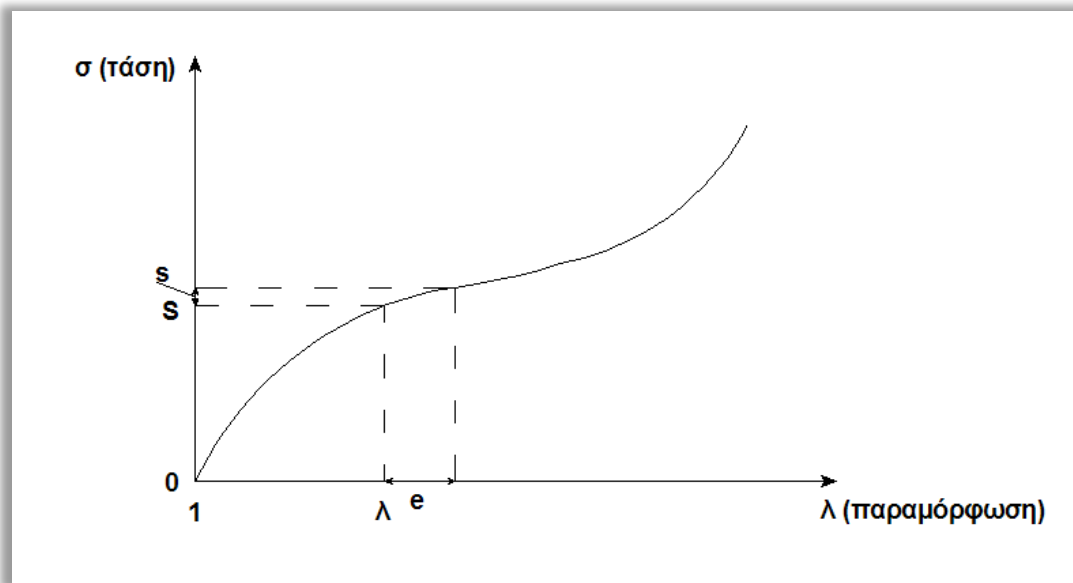
Στη συνέχεια, παρατίθενται οι σχέσεις που συνδέουν τις επαυξητικές ορθές τάσεις  $s_{ii}$  με τις αντίστοιχες τροπές  $e_{ii}$ . Επιπρόσθετα, γίνεται θεώρηση και των επαυξητικών διατμητικών παραμορφώσεων  $s_{ij}$ .

$$\{s_{11} - s_{22}, s_{22} - s_{33}, s_{33} - s_{11}\} = 2\mu_0 \{\lambda_1^2 e_{11} - \lambda_2^2 e_{22}, \lambda_2^2 e_{22} - \lambda_3^2 e_{33}, \lambda_3^2 e_{33} - \lambda_1^2 e_{11}\} \quad (3.14)$$

$$\{s_{12}, s_{23}, s_{31}\} = \mu_0 \{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) e_{12}, (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) e_{23}, (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) e_{31}\} \quad (3.15)$$

Οι ορθές τάσεις  $S_{ii}$  αφορούν το φαινόμενο της μόνο-αξονικής προέντασης του δοκιμίου. Κατά τον ελκυσμό του υλικού, το «σώμα» βρίσκεται στην κύρια διεύθυνση και εξαιτίας αυτού εμφανίζονται μόνο ορθές τάσεις. Αντίθετα, στο διεισδυτή επιβάλλονται παραμορφώσεις που δεν είναι συμμετρικές. Κατά τη διεיסδυση λοιπόν, η επιφάνεια του δείγματος εμφανίζει γωνίες που υποδηλώνουν την ύπαρξη διατμητικών τάσεων. Στις ανωτέρω σχέσεις λαμβάνουμε τις διαφορές των ορθών τάσεων, αρχικών και επαυξητικών, διότι επιθυμούμε να απαλείψουμε από το πρόβλημα την υδροστατική πίεση.

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται με τη μορφή διαγράμματος οι ορθές τάσεις κατά Cauchy και οι επαυξητικές τάσεις και παραμορφώσεις, των οποίων οι σχέσεις αναφέρονται παραπάνω.



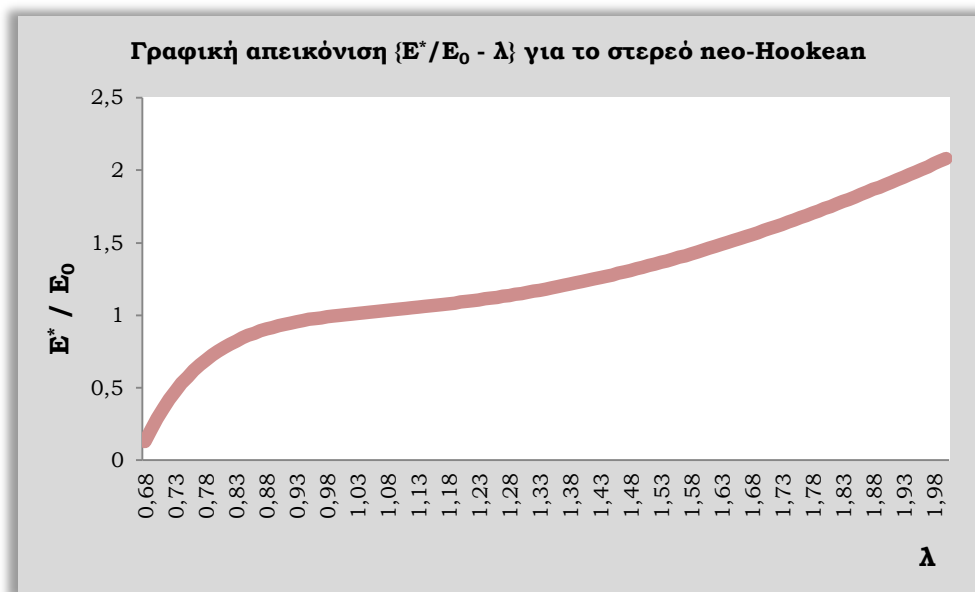
**Σχήμα 3.4.1** Σχηματική αναπαράσταση του στερεού neo-Hookean. Στο ελαστικό δοκίμιο G&T επιβάλλεται μονοαξονικός ελκυσμός κατά τη μία διεύθυνση. Το δείγμα παραμένει τεντωμένο πριν τη σκληρομέτρηση πάνω σε μία άκαμπτη συσκευή προέντασης. Τα σύμβολα  $S$  και  $\lambda$  παριστάνουν την τάση που επιβάλλεται στο υλικό λόγω προέντασης και την παραμόρφωση που δέχεται το δείγμα εξαιτίας της επιβαλλόμενης δύναμης, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, τα μεγέθη  $s$  και  $e$  συμβολίζουν την επαυξητική τάση και παραμόρφωση, αντίστοιχα, λόγω της διεύθυνσης του αιχμηρού σφαιρικού αντικειμένου μέσα στο υλικό G&T.

Εφαρμόζοντας το προσομοίωμα του neo-Hookean μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο ελαστικότητας ενός προεντεταμένου δοκιμίου  $E^*$  (τρέχουσα κατάσταση), εφόσον γνωρίζουμε το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας του ίδιου υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση  $E_0$  (αρχική απεικόνιση), μέσω μίας συνάρτησης που έχει την εξής μορφή:

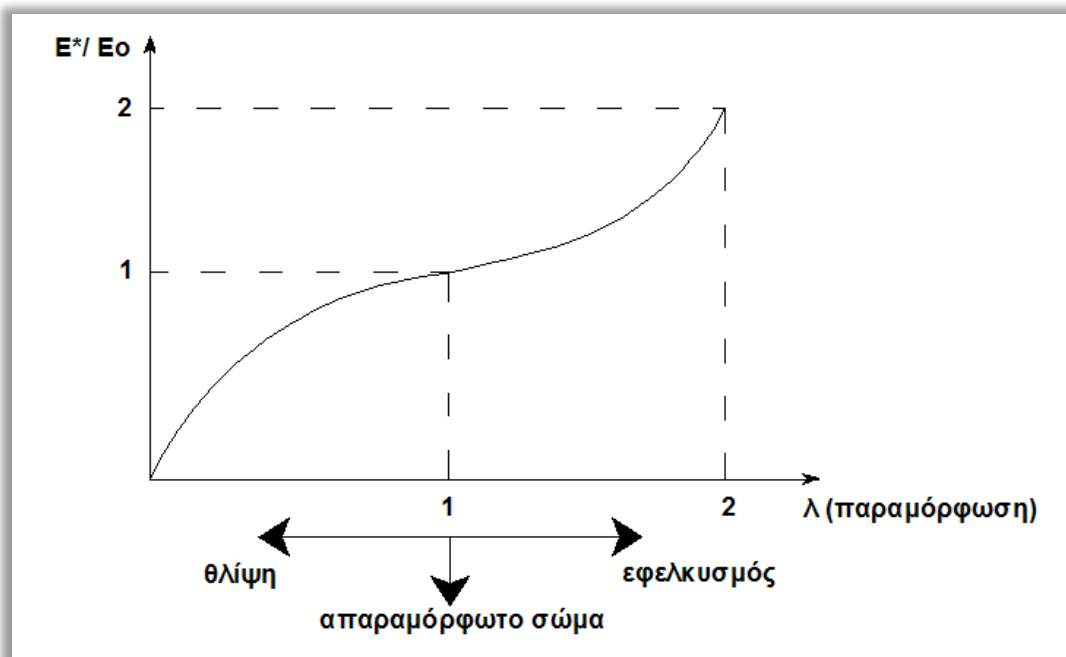
$$\frac{E^*}{E_0} = \frac{\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1}{2\lambda^4(1 + \lambda^3)} \quad (3.16)$$

Όπου με  $\lambda$  συμβολίζεται το «τέντωμα» του υλικού. Στη συνέχεια, παρατίθεται ένα γράφημα που εκφράζει τη σχέση του λόγου των μέτρων ελαστικότητας στις δύο καταστάσεις του υλικού, απαραμόρφωτη (αρχική) και παραμορφωμένη (τρέχουσα), με το «τέντωμα»  $\lambda$ . **Αξίζει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι το στερεό neo-Hookean ταυτίζεται με το «μοντέλο» του Gent για τιμές του  $\lambda \leq 1.2$  και το υλικό σώμα σε αυτό το προσομοίωμα συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά.**





**Γράφημα 3.4.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη μεταβολή του λόγου των μέτρων ελαστικότητας του υλικού, στην κατάσταση προέντασης και στην απαραμόρφωτη κατάσταση, με την επιβολή παραμόρφωσης  $\lambda$  στο υλικό. Το παραπάνω γράφημα αναφέρεται στο στερεό προσομοίωμα neo-Hookean, δεν είναι γενικό και εξαιτίας αυτού δεν μπορεί να ισχύσει για τα υπόλοιπα «μοντέλα». Το γράφημα μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μία αύξουσα καμπύλη του  $\lambda$  που για τιμές  $\lambda < 1$  παρουσιάζει ένα κρίσιμο σημείο. Η ελάχιστη τιμή του  $\lambda$  στο γράφημα λαμβάνεται λίγο μεγαλύτερη του  $2/3$ . Αυτό συμβαίνει διότι για την εν λόγω τιμή ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας μηδενίζεται. Εμφανίζεται λοιπόν, ένα κρίσιμο σημείο, όπως προαναφέρθηκε. Για το λόγο αυτό χρειάζεται προσοχή όσον αφορά το θλιπτικό φορτίο που θα επιβληθεί στο δοκίμιο. Στο σημείο  $\lambda=1$  το υλικό είναι αφόρτιστο και δεν έχει υποστεί κανενός είδους παραμόρφωση. Παρατηρούμε ότι για εφελκυστικές τιμές του  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ) η σχετική ακαμψία του δοκιμίου αυξάνει, παρόλο που δε μεταβάλλεται δραματικά έως την τιμή  $\lambda \approx 1.5$ . Για τιμές του  $\lambda > 1.5$  παρατηρούμε έντονη αύξηση της σχετικής ακαμψίας λόγω διεύδυσης. Αντίθετα, για θλιπτικές φορτίσεις ( $\lambda < 1$ ) μπορούμε να δούμε ότι η σχετική ακαμψία ελαττώνεται γρήγορα. **Έτσι λοιπόν, προτείνεται πειραματικά να αποφεύγεται η δοκιμή σε θλίψη και να επιβάλλεται έντονη προένταση του δοκιμίου σε εφελκυσμό (η δυνατόν  $\lambda > 1.5$ ).**



**Σχήμα 3.4.2** Γραφική παράσταση, αναφερόμενη στο στερεό neo-Hookean, που εκφράζει τη μεταβολή του λόγου  $E^*/E_0$  των μέτρων ελαστικότητας ενός δοκιμίου ανάλογα με την παραμόρφωση  $\lambda$  που επιβάλλεται σε αυτό. Το παραπάνω γράφημα αναφέρεται στην περίπτωση διαζονικού εφελκυσμού ή θλίψης. Πρόκειται για μία αύξουσα συνάρτηση του  $\lambda$ , που εμφανίζει κρίσιμο σημείο για τιμές του  $\lambda < 1$ .

Για να υπολογίσουμε τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  κατά Neo-Hookean και κατά Mooney-Rivlin, όπως θα δούμε παρακάτω, ακολουθήσαμε τα εξής βήματα:

- ❖ Επιβάλλουμε αρχική προένταση στο «σώμα» και λαμβάνουμε τους μη γραμμικούς νόμους που περιγράφουν την πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$
- ❖ Χρησιμοποιούμε τη θεωρία του Biot, ώστε να υπολογίσουμε τα επαπτόμενα μέτρα ελαστικότητας  $c_{ijkl}$  (ελαστικές σταθερές)
- ❖ Ολοκληρώνοντας, εφαρμόζουμε τη θεωρία του Willis, για να επιλύσουμε ένα γραμμικοποιημένο πρόβλημα επαφής.

**Σημείωση:** Οι Dhaliwal et al. (βλέπε Παράρτημα) για την περίπτωση του υλικού Neo-Hookean απέδειξαν ημιαναλυτικά ότι η διόρθωση λόγω πάχους του υλικού μπορεί να προηγηθεί της μη γραμμικότητας ως προς το μέτρο ελαστικότητας λόγω προέντασης.

### 3.5 Στερεό Mooney - Rivlin

Στη μηχανική συνεχούς μέσου, με τον όρο «στερεό Mooney-Rivlin» αποκαλείται ένα προσομοίωμα υπερελαστικού υλικού, όπου η συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αποτελούμενος από δύο αναλλοίωτες της αριστερής Cauchy-Green μετρικής παραμόρφωσης  $\mathbf{B}$ . Το «μοντέλο» αυτό προτάθηκε από το Mooney (1940) και εκφράστηκε με αναλλοίωτες από τον Rivlin (1948) και αποτελεί την πρώτη προσέγγιση όλων των υλικών.

Η συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης για ένα ασυμπίεστο Mooney-Rivlin υλικό δίνεται από τη σχέση:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (3.17)$$

ή

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3) \quad (3.18)$$

Όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι καθορισμένες σταθερές του υλικού και  $I_1, I_2$  είναι η πρώτη και η δεύτερη κύρια αναλλοίωτη της αριστερής Cauchy-Green μετρικής παραμόρφωσης  $\mathbf{B}$ . Πρόκειται ουσιαστικά για έναν τανυστή δεύτερης τάξης που ισούται με  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ .

Στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού Mooney-Rivlin, οι τάσεις κατά Cauchy με  $J=1$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I} + 2(C_1 + I_1 C_2) \mathbf{B} - 2C_2 \mathbf{B} \mathbf{B} \quad (3.19)$$

Στον καταστατικό νόμο που αναγράφεται παραπάνω με  $P$  συμβολίζεται η υδροστατική πίεση και με  $\mathbf{I}$  ο μοναδιαίος τανυστής δεύτερης τάξης.

#### 3.5.1 Μονοαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση μονοαξονικού ελκυσμού το δείγμα εμφανίζει εγκάρσια ισοτροπία. Εξαιτίας αυτού ισχύει ότι  $\lambda_1 = \lambda$  και  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Στην περίπτωση που το υλικό είναι ασυμπίεστο προκύπτει ότι  $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ .

Επομένως, η πρώτη κύρια αναλλοίωτη δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (3.20)$$

Οι τάσεις κατά Cauchy στην περίπτωση του μονοαξονικού ελκυσμού προκύπτουν από αντίστοιχες εξισώσεις που αφορούν ισότροπα και

ανισότροπα υλικά με τη χρήση του αντίστοιχου σε κάθε περίπτωση καταστατικού νόμου.

$$\sigma = \left( 2C_1 + \frac{2C_2}{\lambda} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (3.21)$$

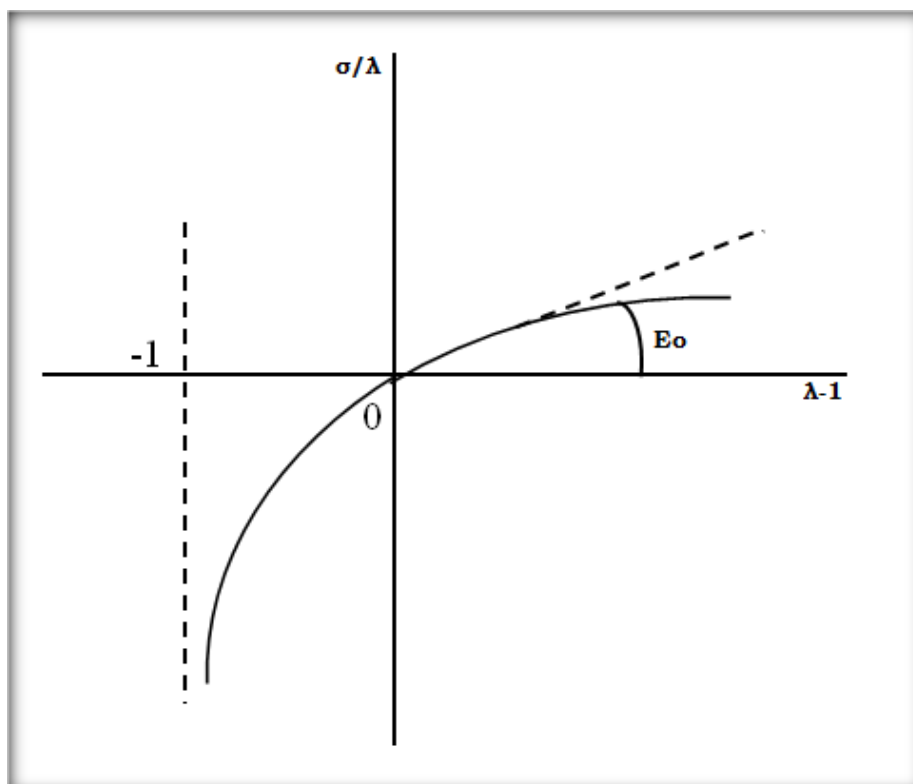
Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του «σώματος» συνδέεται με τις σταθερές του «μοντέλου» Mooney-Rivlin. Για τον υπολογισμό του αρχικού μέτρου ελαστικότητας

$E_0$  αρκεί να υπολογίσουμε την παράγωγο  $\frac{\partial(\sigma/\lambda)}{\partial(\lambda-1)}_{\lambda=1} = E_0$ . Το μέτρο

ελαστικότητας που υπολογίζουμε είναι το εφαπτομενικό και όχι το τέμνων.

$$E_0 = 6(C_1 + C_2) \quad (3.22)$$

Οι σταθερές του προσομοιώματος στην περίπτωση ενός καρδιακού ιστού λαμβάνουν τις τιμές  $C_1=29.5$  kPa και  $C_2=5$  kPa. Στο σημείο αυτό παραθέτουμε το διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για το «μοντέλο» Mooney-Rivlin.



**Σχήμα 3.5.1.1** Γράφημα τάσης-παραμόρφωσης για το «μοντέλο» Mooney-Rivlin. Το ανωτέρω διάγραμμα μπορεί να κατασκευαστεί εάν διαιρέσουμε την εξίσωση που περιγράφει τις τάσεις  $\sigma$  ως προς  $\lambda$  και στη συνέχεια επιλέγουμε διαδοχικές τιμές για το επιβαλλόμενο «τέντωμα»  $\lambda$ .

### 3.5.2 Διαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση διαξονικού ελκυσμού στις κατευθύνσεις  $\mathbf{n}_1$  και  $\mathbf{n}_2$ , οι κύριες τιμές του «τεντώματος» (principal stretches) είναι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Εξαιτίας της ασυμπίεστοτητας του υλικού (ισχύει για ελαστομερή υλικά) ισχύει η ισότητα  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Κάνοντας λοιπόν, αντικατάσταση στις σχέσεις που προαναφέρθηκαν προκύπτει ότι  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$ . Έτσι λοιπόν, οι ορθές τάσεις κατά Cauchy  $S_{ii}$ , οφειλόμενες στην προένταση του υλικού πριν τη σκληρομέτρηση, μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$S_{11} - S_{22} = 0 \quad (3.23)$$

$$S_{22} - S_{33} = 2C_1(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_3^2}\right) \quad (3.24)$$

$$S_{33} - S_{11} = 2C_1(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda_3^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \quad (3.25)$$

Για να προσδιορίσουμε τις επιπρόσθετες (επαυξητικές) ορθές τάσεις  $s_{ii}$  εξαιτίας της διεύδυσης στην επιφάνεια του προεντεταμένου υλικού, χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις του Biot (1965):

$$s_{11} - s_{22} = \left(4C_1\lambda_1^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_2^2}\right)e_{11} - \left(4C_1\lambda_2^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_1^2}\right)e_{22} \quad (3.26)$$

$$s_{22} - s_{33} = \left(4C_1\lambda_2^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_1^2}\right)e_{22} - \left(4C_1\lambda_3^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_3^2}\right)e_{33} \quad (3.27)$$

$$s_{33} - s_{11} = \left(4C_1\lambda_3^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_3^2}\right)e_{33} - \left(4C_1\lambda_1^2 + 4C_2\frac{1}{\lambda_2^2}\right)e_{11} \quad (3.28)$$

Αντίστοιχες σχέσεις του Biot (1965) χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των επαυξητικών διατμητικών τάσεων  $s_{ij}$ :

$$s_{12} = 0 \quad (3.29)$$

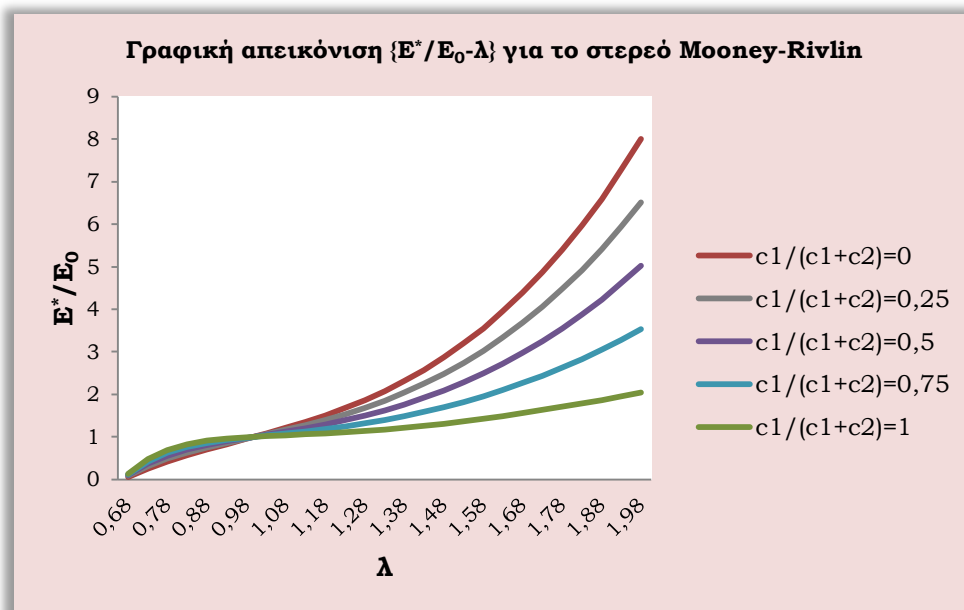
$$s_{23} = \left(\left(2C_1 + 2C_2\frac{1}{\lambda_1^2}\right)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right)e_{23} \quad (3.30)$$

$$s_{31} = \left( \left( 2C_1 + 2C_2 \frac{1}{\lambda_2^2} \right) (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \right) e_{31} \quad (3.31)$$

Εφαρμόζοντας το προσομοίωμα του Mooney-Rivlin μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο ελαστικότητας ενός προεντεταμένου δοκιμίου  $E^*$  (τρέχουσα κατάσταση), εφόσον γνωρίζουμε το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας του ίδιου υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση  $E_0$  (αρχική απεικόνιση), μέσω μίας συνάρτησης που έχει την εξής μορφή:

$$\frac{E^*}{E_0} = \frac{\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1}{2\lambda^4(1 + \lambda^3)} \left\{ \frac{C_1}{C_1 + C_2} (1 - \lambda^2) + \lambda^2 \right\} \quad (3.32)$$

Όπου με  $\lambda$  συμβολίζεται το «τέντωμα» του υλικού. Στη συνέχεια, παρατίθεται ένα γράφημα που εκφράζει τη σχέση του λόγου των μέτρων ελαστικότητας στις δύο καταστάσεις του υλικού, απαραμόρφωτη (αρχική) και παραμορφωμένη (τρέχουσα), με το «τέντωμα»  $\lambda$ . **Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι το στερεό Mooney-Rivlin ταυτίζεται με το «μοντέλο» neo-Hookean για  $C_2 = 0$ .**



**Γράφημα 3.5.2.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη μεταβολή του λόγου των μέτρων ελαστικότητας του υλικού, στην κατάσταση προέντασης και στην απαραμόρφωτη κατάσταση, με την επιβολή παραμόρφωσης  $\lambda$  στο υλικό. Το παραπάνω γράφημα αναφέρεται στο στερεό προσομοίωμα Mooney-Rivlin, ενώ για  $C_2$  ίσο με μηδέν το εν λόγω «μοντέλο» ταυτίζεται με το στερεό neo-Hookean. Οι καμπύλες του γραφήματος αντιστοιχούν σε διαφορετικές σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  του υλικού και όπως μπορούμε να δούμε όλες χαρακτηρίζονται από αύξουσα μορφή. **Η πράσινη καμπύλη που αντιστοιχεί με  $C_1/(C_1+C_2)=1$  απεικονίζει το στερεό neo-Hookean.**

Η καμπύλη που περιγράφεται παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον χαρακτηρισμό του υλικού προσδιορίζοντας τις σταθερές του  $C_1$  και  $C_2$ . Μελετώντας προσεκτικά τα υπόλοιπα κεφάλαια έχουμε καταγράψει μεθοδολογίες με τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας τόσο σε απαραμόρφωτο όσο και σε προεντεταμένο δείγμα.

Έτσι λοιπόν, για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας  $E_0$  και  $E^*$  μπορούμε να εφαρμόσουμε τις προτεινόμενες μεθοδολογίες των Hertz (συντηρητική), Ting (περίπλοκη, αλλά ακριβής) και Waters (απλουστευμένη μέθοδος), με την προϋπόθεση ότι ο διεισδυτής του οργάνου είναι σφαιρικός. Γνωρίζοντας λοιπόν τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού στην αρχική και στην τρέχουσα κατάσταση και επιλέγοντας τον επιθυμητό καταστατικό νόμο μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές του υλικού. Η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η εξής:

- ✓ το λόγο  $E^* / E_0$
- ✓ Το «τέντωμα»  $\lambda$ , που είναι μετρήσιμο και θεωρείται γνωστό σε κάθε περίπτωση
- ✓ Την ποσότητα  $2(C_1 + C_2) = G_0$  για  $\lambda=1$ , δηλαδή ισούται με το μέτρο διάτμησης  $G_0 = \frac{E_0}{3}$ !

Αρκεί λοιπόν, να προσδιορίσουμε την ποσότητα  $C_1 / (C_1 + C_2)$  εφαρμόζοντας την καμπύλη Mooney-Rivlin για  $\lambda > 1$  και να λύσουμε το σύστημα που προκύπτει.

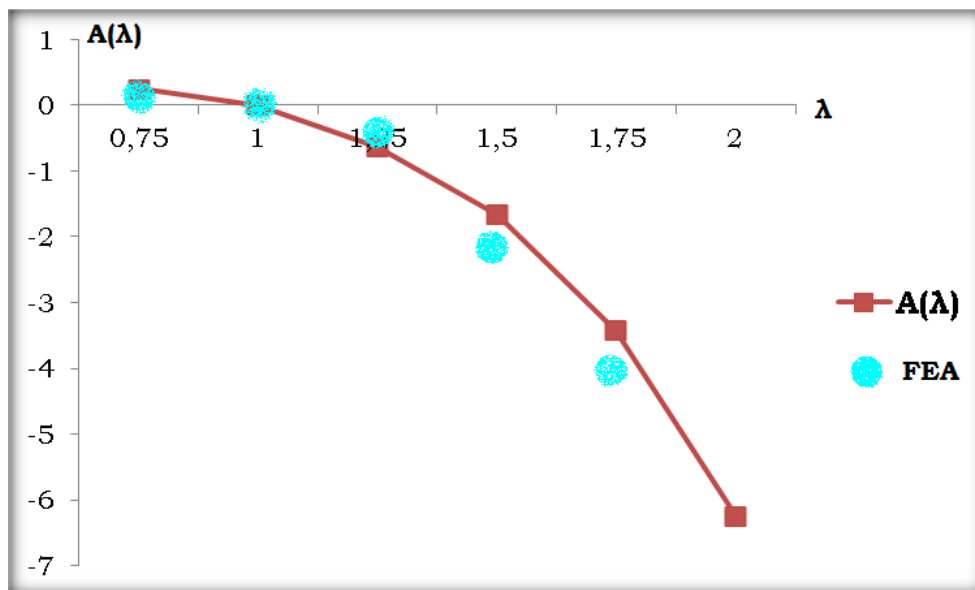
Η εξίσωση που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$ , σύμφωνα με το προσομοίωμα Mooney-Rivlin μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$N(\lambda) = A(\lambda) \frac{C_1}{C_1 + C_2} + B(\lambda)$$

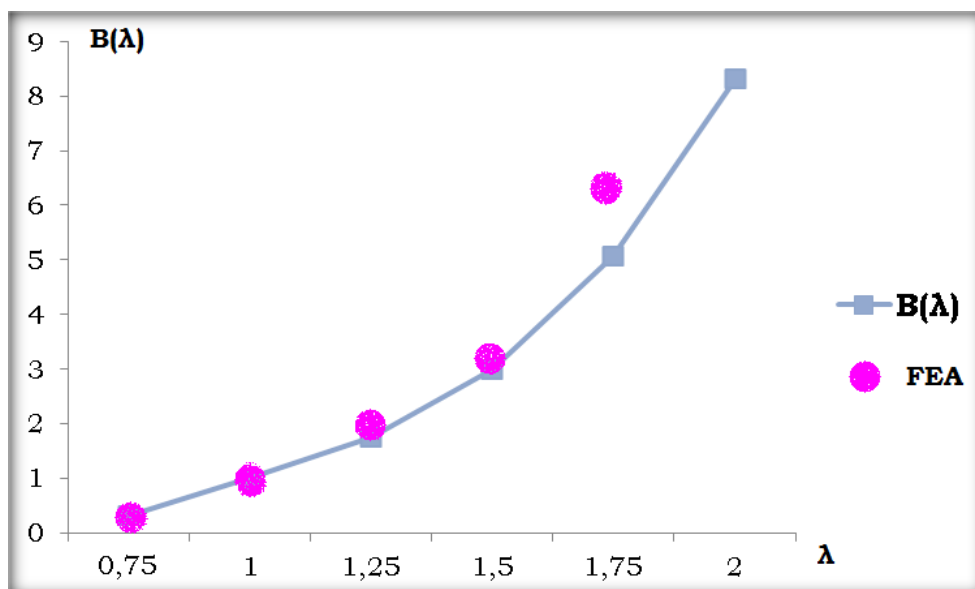
$$A(\lambda) = \frac{(\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1)(1 - \lambda^2)}{2\lambda^4(1 + \lambda^3)}$$

$$B(\lambda) = \frac{(\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1)}{2\lambda^2(1 + \lambda^3)}$$

Μπορούμε λοιπόν, να απεικονίσουμε γραφικά τη σχέση των παραμέτρων  $A(\lambda)$  και  $B(\lambda)$  με το «τέντωμα»  $\lambda$ . Αντίστοιχα γραφήματα μπορούμε να δούμε παρακάτω.



**Γράφημα 3.5.2.2** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση της παραμέτρου  $A(\lambda)$  σε σχέση με την παραμόρφωση  $\lambda$ . Οι τιμές του «τεντώματος» κυμαίνονται από 0.75 έως 2. Στην περίπτωση που το υλικό είναι απαραμόρφωτο, δηλαδή το «τέντωμα» ισούται με  $\lambda=1$ , προκύπτει ότι  $A(1)=0$ . Στο διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε τη σχέση  $A(\lambda)$ - $\lambda$  όπως προέκυψε από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία του Zisis. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του διαγράμματος καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανάλυση επαληθεύεται από τα πεπερασμένα στοιχεία, αφού οι τιμές εμφανίζουν μικρή απόκλιση.

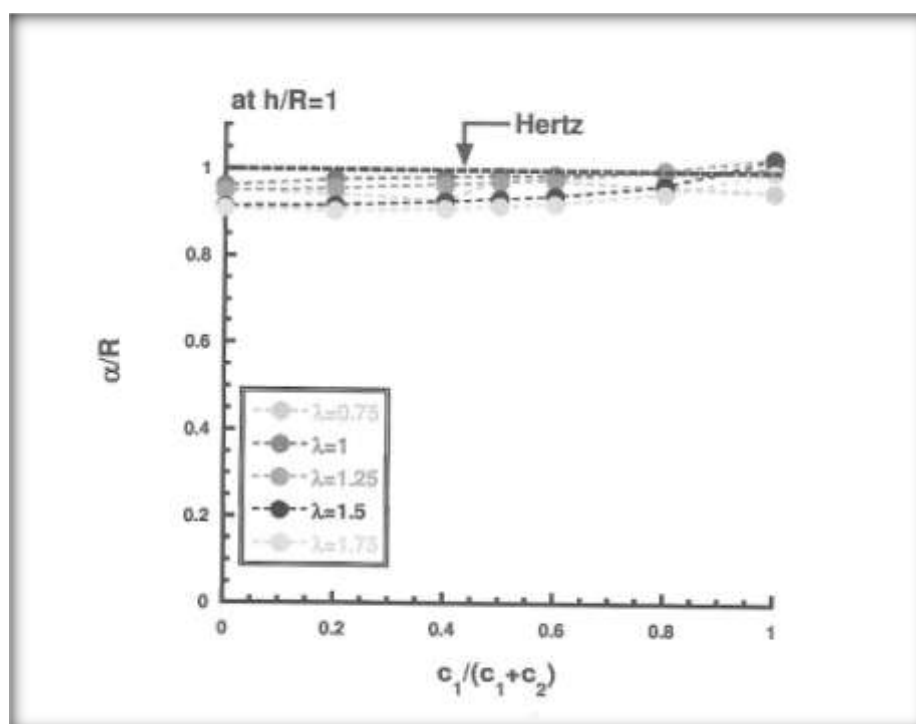


**Γράφημα 3.5.2.3** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση της παραμέτρου  $B(\lambda)$  σε σχέση με την παραμόρφωση  $\lambda$ . Οι τιμές του «τεντώματος» κυμαίνονται από 0.75 έως 2. Στην περίπτωση που το υλικό είναι απαραμόρφωτο, δηλαδή το «τέντωμα» ισούται με  $\lambda=1$ , προκύπτει ότι  $B(1)=1$ . Στο διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε τη σχέση  $B(\lambda)$ - $\lambda$  όπως προέκυψε από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία του Zisis. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του διαγράμματος καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανάλυση επαληθεύεται από

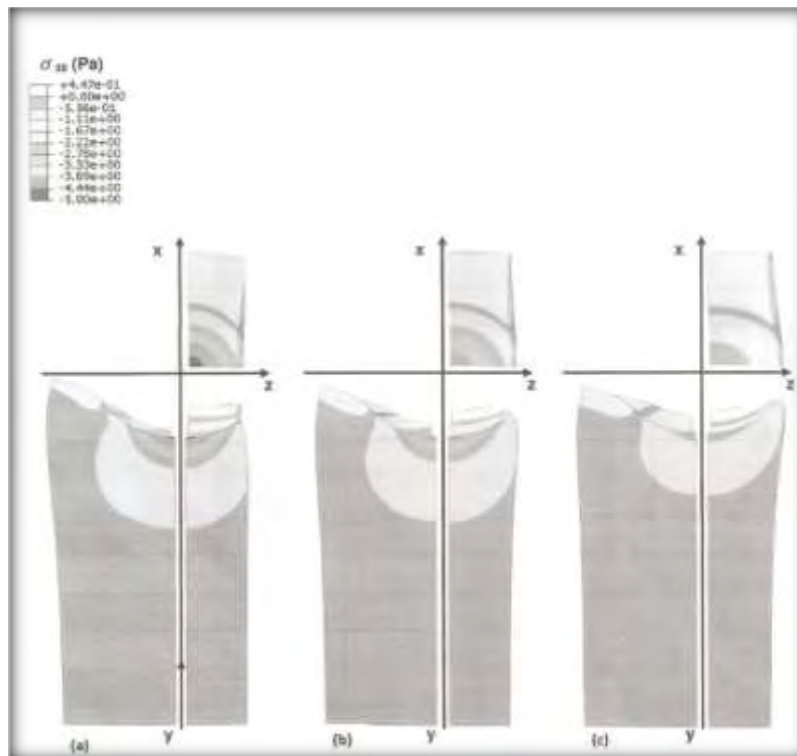


τα πεπερασμένα στοιχεία και σε αυτή την περίπτωση, αφού οι τιμές εμφανίζουν μικρή απόκλιση.

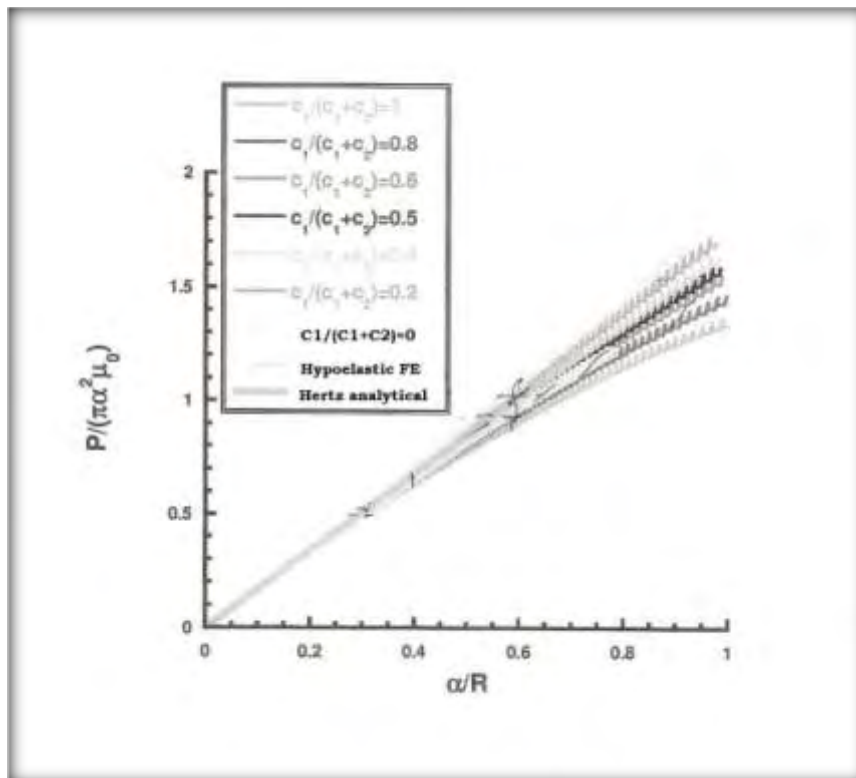
Στη συνέχεια, παραθέτουμε διαγράμματα και εικόνες που αφορούν το πείραμα της διείδυσης σε ελαστικό ημίσωρο, όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία του Zisis. Για την ανάλυση επιλέχθηκε το «μοντέλο» των Mooney-Rivlin. Τα αποτελέσματα όμως έχουν προέκταση και σε άλλους καταστατικούς νόμους.



**Γράφημα 3.5.2.4** Αποτελέσματα από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $\alpha/R$  σαν συνάρτηση της παραμέτρου του υλικού  $C_1/(C_1+C_2)$ . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για διαφορετικά επίπεδα του αρχικού «τενώματος»  $\lambda$ , το μέγεθος της κανονικοποιημένης διείδυσης  $h/R$  παραμένει σταθερό και ίσο με ένα ( $h/R=1$ ). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος υπολογίστηκαν σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz. Παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν γενικά για την περίπτωση του ίσο-διαξονικού ελκυσμού (equibiaxial stretch).



**Εικόνα 3.5.2.1** Απεικόνιση των κύριων τάσεων  $\sigma_{22}$  όταν στο υλικό έχει εισχωρήσει το μέγιστο βάθος του διεισδυτή. Τα αποτελέσματα δείχνουν την παραμορφωμένη κατάσταση. Στην περίπτωση (α)  $C_1=0$  και  $C_2=0.5$ . Σε αυτή την περίπτωση που  $C_1=0$  και  $I_1=0$ , στον καταστατικό νόμο εμφανίζεται μόνο η κύρια αναλλοίωτη  $I_2$  και επομένως η εκκεντρότητα είναι μηδενική. Από την εικόνα μπορούμε να διακρίνουμε το αποτύπωμα του κύκλου στην περίπτωση (α). Στην εικόνα (β)  $C_1=0.25$  και  $C_2=0.25$ . Το αποτύπωμα της επιφάνειας επαφής λαμβάνει σταδιακά τη μορφή έλλειψης. Ολοκληρώνοντας, στην περίπτωση (γ)  $C_1=0.5$  και  $C_2=0$ . Εμφανίζεται μόνο  $I_1$  στον καταστατικό νόμο και παρατηρούμε την ισχυρότερη δυνατή έλλειψη. **Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν, ότι στην περίπτωση που ο καταστατικός νόμος που προσομοιάζει το υλικό εμφανίζει μόνο  $I_2$  η εκκεντρότητα είναι ίση με μηδέν. Στα εμβιοϋλικά όμως έχουμε πάντα  $I_1$ , με αποτέλεσμα να εμφανίζεται πάντα εκκεντρότητα.** Οι τάσεις που εμφανίζονται κάτω από το διεισδυτή είναι θλιπτικές και εμφανίζουν μέγιστες τιμές στην περίπτωση (α)  $C_1/(C_1+C_2)=0$ ! Στους άξονες  $x, z$  βλέπουμε σε κάτοψη της επιφάνειας επαφής κατά τη διεύθυνση, ενώ στους άξονες  $y, z$  απεικονίζεται η όψη του υλικού καθώς εισχωρεί σε αυτό το αιχμηρό αντικείμενο. Στην κάτοψη της διεπιφάνειας παριστάνεται η ακτίνα επαφής  $a$ . Η ακτίνα επαφής  $a$  εκτείνεται έως το σημείο που υπάρχουν καμπύλες στο σχήμα. Εάν ολοκληρώσουμε λοιπόν, τις τάσεις που αναπτύσσονται στην επιφάνεια θα προκύψει η συνολική δύναμη. **Το σημείο του σχήματος που παύουν να υπάρχουν καμπύλες είναι αφόρτιστο.**



**Γράφημα 3.5.2.5** Αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση κανονικοποιημένου φορτίου  $P/(\pi a^2 \mu_0)$  σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης ακτίνας επαφής  $a/R$ . Τα αποτελέσματα του διαγράμματος αντιστοιχούν σε διάφορους συνδυασμούς των σταθερών του υλικού  $C_1$  και  $C_2$  σε μονάδες Pa. Πάντα το άθροισμα των παραμέτρων  $C_1$  και  $C_2$  είναι σταθερό και ίσο με 0.5 Pa. Να επισημάνουμε ότι η επίλυση κατά Hertz είναι έγκυρη μόνο στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων  $a \ll R$ .

Αν παρατηρήσουμε το ανωτέρω γράφημα θα μπορούσε να πει κανείς ότι εφόσον οι τιμές διαφοροποιούνται για μεγάλες διεισδύσεις και το πρόβλημα είναι μη γραμμικό θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις σταθερές του «μοντέλου» που αφορούν το υλικό χωρίς να επιβάλλουμε προένταση στο «σώμα». Αν όμως επιχειρήσουμε να διεισδύσουμε σε πολύ μεγάλο βαθμό μέσα στο υλικό, για να υπολογίσουμε τη δεύτερη σταθερά, υπάρχει ο κίνδυνος αποδιοργάνωσης και πιθανής διάτρησης του υλικού. Ακολουθώντας το ανωτέρω διάγραμμα, μπορούμε να επιχειρήσουμε διεισδύσεις έως  $a/R=0.4$ , όπου ισχύει η σχετική γραμμικότητα. Έτσι λοιπόν, μεγάλο ποσοστό της ποσότητας  $h/R$  αντιστοιχεί σε υψηλό επίπεδο παραμόρφωσης. Σε αυτή την περίπτωση διείσδυσης είναι πιθανό το μετρούμενο «σώμα» να θραυστεί σε μικρότερα τμήματα του ίδιου υλικού. **Οι Nomani και Simha (2009) επιχειρήσαν να προσδιορίσουν τις σταθερές του υλικού επιβάλλοντας μικρές και μεγάλες διεισδύσεις, αντίστοιχα. Η προσπάθειά τους αυτή απέτυχε καθώς τα αποτελέσματα τους εμφάνιζαν μεγάλα σφάλματα. Ειδικότερα, στην περίπτωση του «μοντέλου» Mooney-Rivlin είχαν σφάλματα της τάξεως του 75%. Όταν επέλεξαν πολυωνυμικό «μοντέλο» το σφάλμα ήταν ίσο με 33%, ενώ τα σφάλματα του εκθετικού προσομοιώματος «άγγιζαν» το 400%!**

### 3.6 Επιφανειακή διείσδυση σε ασυμπίεστο υλικό που έχει υποστεί αρχικά ίσο-διαξονικό ελκυσμό (Green, Rivlin, Shield)

Σε προηγούμενο κεφάλαιο, προτείναμε μεθοδολογίες για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε αρχικά απαραμόρφωτο «σώμα». Το δοκίμιο εδράζεται απλά σε μία άκαμπτη επιφάνεια και με τη βοήθεια ενός αιχμηρού αντικειμένου διεισδύουμε μέσα στο δείγμα. Τα υλικά που έχουμε επιλέξει να μελετήσουμε είναι ισότροπα. Αντίθετα, εάν προεντείνουμε μονοαξονικά ένα ισότροπο υλικό, η εξωτερική του επιφάνεια στην οποία πραγματοποιείται η διείσδυση χαρακτηρίζεται από έντονη ανισοτροπία. Παρόλα αυτά στην περίπτωση που το «τέντωμα» που επιβάλλουμε είναι ίσο-διαξονικό η επιφάνεια του δείγματος στην οποία γίνεται η διείσδυση είναι ισότροπη. Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν, ότι η προένταση εισάγει ανισοτροπία σε ένα υλικό που είναι αρχικά ισότροπο.

Μετά τη σκληρομέτρηση ενός εφελκυσμένου δείγματος μπορούμε με τις κατάλληλες θεωρίες (Waters ή Stevanovic et al.) να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού λόγω του «τεντώματος». Για το λόγο αυτό οφείλουμε να διορθώσουμε το αποτέλεσμα διασπώντας τη διόρθωση αυτή σε ένα συμμετρικό και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος. Η διόρθωση του συμμετρικού μέρους σχετίζεται με το προσομοίωμα που έχουμε επιλέξει, ενώ η αντίστοιχη διόρθωση του αντισυμμετρικού μέρους με την εκκεντρότητα (γραφήματα κατά Vlassak et al. και Willis).

Στο σημείο αυτό προτείνουμε μία διαδικασία σύμφωνα με τους Green, Rivlin και Shield, ώστε να προσδιορίσουμε τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους. Η μεθοδολογία αυτή εφαρμόζεται και στα «μοντέλα» Yeoh, Fung και Gent, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια.

$$W_i = \partial W / \partial I_i \quad (3.33)$$

$$W_{ij} = \partial^2 W / \partial I_i \partial I_j \quad (3.34)$$

$$N(\lambda) = \frac{(k_1 b + a) \sqrt{k_1 (1 + k_2)} - (k_2 b + a) \sqrt{k_2 (1 + k_1)}}{2(k_1 - k_2)} \quad (3.35)$$

$$a = \frac{2}{\lambda^4} (W_1 + \lambda^2 W_2) \quad (3.36)$$

$$b = 2\lambda^2 (W_1 + \lambda^2 W_2) \quad (3.37)$$

$$c = 4\lambda^2 \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + (\lambda^2 - \lambda^{-4}) (W_{11} + W_{22} \lambda^2 (\lambda^4 + \lambda^2)) + W_{12} (\lambda^4 + 2\lambda^2) \right] \quad (3.38)$$

$$d = 4\lambda^4 \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + (\lambda^4 - \lambda^2)(W_{11} + 2W_{22}\lambda^4 + 3W_{12}\lambda^2) \right] \quad (3.39)$$

$$k_{1,2} = \frac{-(a+b-c-d) \pm \sqrt{(a+b-c-d)^2 - 4ab}}{2b} \quad (3.40)$$

Στην περίπτωση που η υπόριζη ποσότητα είναι μηδέν προκύπτει  $K_1=K_2$ . Για να επιλύσουμε το πρόβλημα που εμφανίζεται κατά τον υπολογισμό της ποσότητας  $N(\lambda)$  σε αυτή την περίπτωση πρέπει να πάρουμε το όριο. Η διαδικασία είναι η εξής:

$$K_1 = K_2$$

$$(a+b-c-d)^2 - 4ab = 0$$

Στο σημείο αυτό για να επιλύσουμε το πρόβλημα θέτουμε:

$$K_1 = K_1 + \varepsilon$$

$$K_2 = K_1$$

Η διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  μετατρέπεται ως εξής:

$$N(\lambda) = \frac{(k_1 b + a)\sqrt{k_1}(1+k_2) - (k_2 b + a)\sqrt{k_2}(1+k_1)}{2(k_1 - k_2)}$$

$$N(\lambda) = \frac{((k_1 + \varepsilon)b + a)\sqrt{k_1 + \varepsilon}(1+k_1) - (k_1 b + a)\sqrt{k_1}(1+(k_1 + \varepsilon))}{2\varepsilon}$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε ως προς  $\varepsilon$ :

$$\frac{\frac{\partial((k_1 + \varepsilon)b + a)\sqrt{k_1 + \varepsilon}(1+k_1) - (k_1 b + a)\sqrt{k_1}(1+(k_1 + \varepsilon))}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varepsilon}} = \frac{\left( \frac{3}{2}(k_1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}b + a \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k_1 + \varepsilon}} \right)(1+k_1) - (k_1 b + a)\sqrt{k_1}}{2}$$

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, θέτουμε  $\varepsilon=0$  και προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{k_1}b + \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{k_1}}\right)(1+k_1) - (k_1b+a)\sqrt{k_1}}{2}$$

Για να ελέγξουμε το αποτέλεσμα μπορούμε να θέσουμε «τένωμα»  $\lambda=1$  και πρέπει να προκύψει διόρθωση  $N(1)=1$ !

### 3.7 «Μοντέλο» Yeoh

Στο «μοντέλο» του Yeoh, το ελαστικό δυναμικό ανά μονάδα όγκου εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3 \quad (3.41)$$

Όπου με  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  παριστάνονται οι σταθερές του υλικού και με  $I_1$  η πρώτη κύρια αναλλοίωτη. Για την ποσότητα  $I_1$  ισχύει γενικά η ισότητα  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ .

#### 3.7.1 Μονοαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση του μονοαξονικού ελκυσμού οι τάσεις κατά Cauchy στο «μοντέλο» του Yeoh εκφράζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (3.42)$$

Με την επιβολή μονοαξονικού ελκυσμού σε ένα ισότροπο δοκίμιο προκύπτει ένα νέο «σώμα» που χαρακτηρίζεται ως εγκάρσια ισότροπο. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι το «τέντωμα» στις κατευθύνσεις  $x_2$  και  $x_3$  είναι το ίδιο. Επομένως, η πρώτη κύρια αναλλοίωτη που ορίστηκε παραπάνω δίνεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (3.43)$$

Το μέτρο ελαστικότητας ενός απαραμόρφωτου «σώματος» στο προσομοίωμα του Yeoh δίνεται από τη σχέση:

$$E_0 = 6C_1 \quad (3.44)$$

#### 3.7.2 Διαξονικός ελκυσμός

Με την επιβολή ίσο-διαξονικού ελκυσμού σε ένα υλικό το αρχικά ισότροπο «σώμα» μετατρέπεται σε ανισότροπο. Το παραμορφωμένο δοκίμιο σε αυτή την περίπτωση διατηρεί την ισοτροπία του μόνο στο επίπεδο που πραγματοποιείται η διεύθυνση. Έτσι λοιπόν, σε ένα δοκίμιο που είναι ασυμπίεστο και ο ελκυσμός που επιβάλλουμε στο υλικό είναι ίσο-διαξονικός ισχύουν οι σχέσεις  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$  και  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , αντίστοιχα. Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση που εκφράζει την πρώτη

αναλλοίωτη προκύπτει τελικά  $I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}$ . Οι συμβολισμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  παριστάνουν το αρχικό «τέντωμα» που επιβάλλουμε στο δείγμα, ενώ ο δείκτης εκφράζει την κατεύθυνση, στην οποία πραγματοποιείται η παραμόρφωση του υλικού. Για να κατασκευάσουμε το γράφημα που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  κατά Yeoh πρέπει να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία και να υπολογίσουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 + 2C_2(I_1 - 3) + 3C_3(I_1 - 3)^2$$

$$W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

$$W_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = 2C_2 + 6C_3(I_1 - 3)$$

$$W_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} = 0$$

$$W_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_1} = 0$$

$$W_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} = 0$$

$$a = 2 \frac{1}{\lambda^4} (W_1 + \lambda^2 W_2) = \frac{2W_1}{\lambda^4}$$

$$b = 2\lambda^2 (W_1 + \lambda^2 W_2) = 2\lambda^2 W_1$$

$$c = 4\lambda^2 \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( W_{11} + W_{22} \lambda^2 \left( \frac{1}{\lambda^4} + \lambda^2 \right) \right) + W_{12} \left( \frac{1}{\lambda^4} + 2\lambda^2 \right) \right] = 4\lambda^2 \left[ W_1 + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) W_{11} \right]$$

$$d = 4 \frac{1}{\lambda^4} \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) (W_{11} + 2W_{22} \lambda^4 + 3W_{12} \lambda^2) \right] = \frac{4}{\lambda^4} \left[ W_1 + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) W_{11} \right]$$

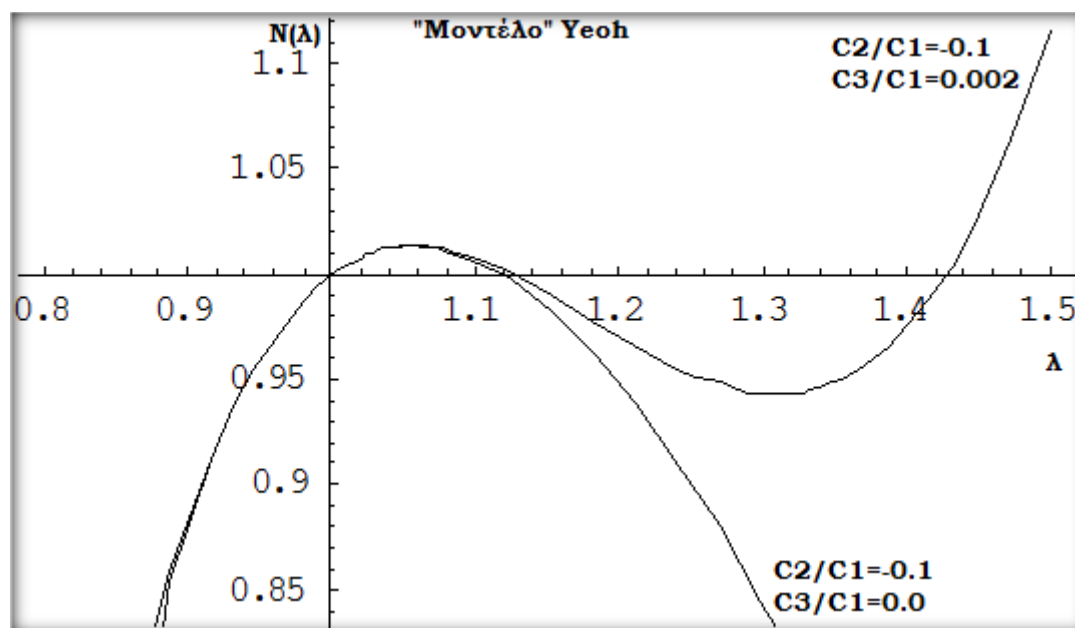
$$K_{1,2} = \frac{-(a+b-c-d) \pm \sqrt{(a+b-c-d)^2 - 4ab}}{2b}$$



$$N(\lambda) = \frac{(K_1 b + a) \sqrt{K_1} (1 + K_2) - (K_2 b + a) \sqrt{K_2} (1 + K_1)}{2(K_1 - K_2)}$$

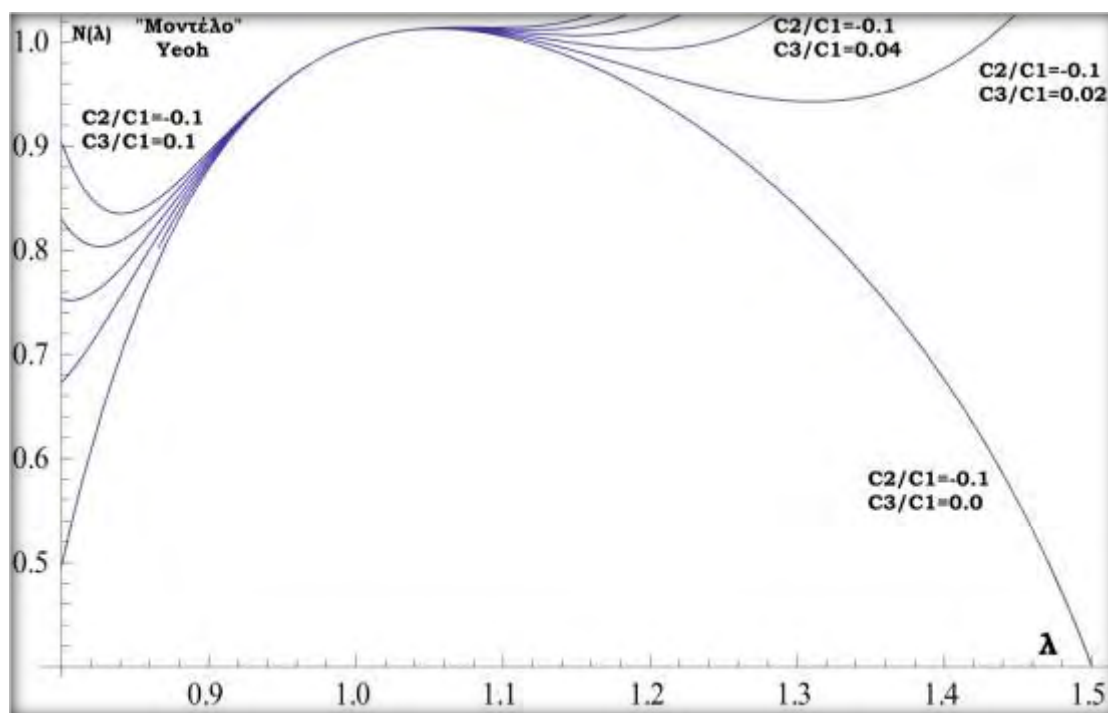
Εάν υπολογίσουμε λοιπόν, τις ποσότητες  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $K_1$  και  $K_2$  λαμβάνοντας τις σταθερές του «μοντέλου»  $C_1=0.5$ ,  $C_2=-0.05$  και  $C_3=0.01$  που αντιστοιχούν σε ένα ελαστικό δοκίμιο αποτελούμενο από άνθρακα (Carbon-filled rubber) μπορούμε εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση να δημιουργήσουμε μία καμπύλη  $\left\{ \frac{E^*}{E_0} - \lambda \right\}$  που αντιστοιχεί στο

συγκεκριμένο προσομοίωμα. Στη συνέχεια, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη γράφημα επιλέγοντας για τη σταθερή ποσότητα  $C_3$  τιμή ίση με μηδέν ( $C_3=0$ ). Το διάγραμμα που θα προκύψει διαφέρει σημαντικά από το προηγούμενο (για  $C_3=0.01$ ). Παρόλο που η ποσότητα  $C_3$  λαμβάνει τιμή πολύ κοντά στο μηδέν, το γράφημα της διόρθωσης  $N(\lambda)$  για επιβαλλόμενο «τέντωμα» μεγαλύτερο του 1.05 χαρακτηρίζεται από μία αύξουσα καμπύλη. Αντίθετα, για την περίπτωση που η σταθερά του «μοντέλου» ισούται με μηδέν ( $C_3=0$ ) το τμήμα της καμπύλης για παραμορφώσεις μεγαλύτερες του 1.05 φθίνει, όπως μπορούμε να δούμε χαρακτηριστικά στο σχήμα που ακολουθεί.

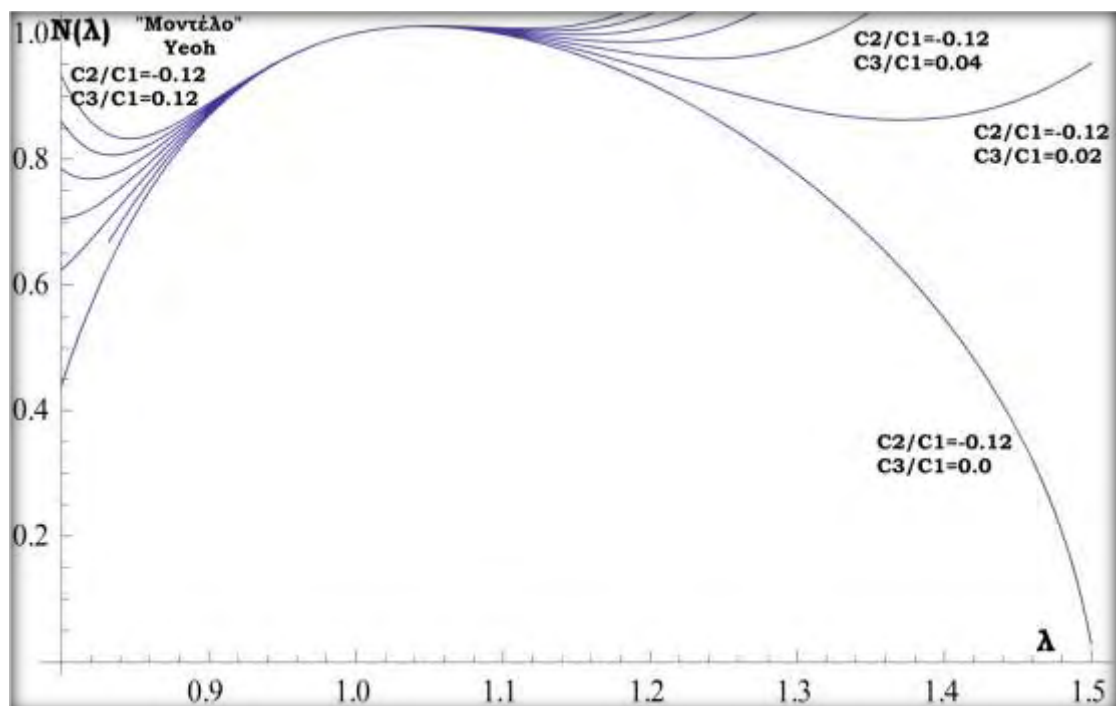


**Γράφημα 3.7.2.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σύμφωνα με το «μοντέλο» του Yeoh. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά το γράφημα βλέπουμε ότι για την περίπτωση που η σταθερά  $C_3=0$  η εικόνα της καμπύλης μεταβάλλεται σημαντικά ακολουθώντας φθίνουσα πορεία. Τα αποτελέσματα δείχνουν να συμπίπτουν για παραμορφώσεις μικρότερες του 1.05, ενώ το «τέντωμα» λαμβάνει μέγιστη τιμή ίση με  $\lambda=1.5$ . Σε περίπτωση που ξεπεράσουμε την οριακή αυτή τιμή του  $\lambda$  το προσομοίωμα του Yeoh εμφανίζει κάποιας μορφής αστάθεια. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε εύρος τιμών του  $\lambda$  μεταξύ του 0.85 και του 1.5 ( $0.85 < \lambda < 1.5$ ).

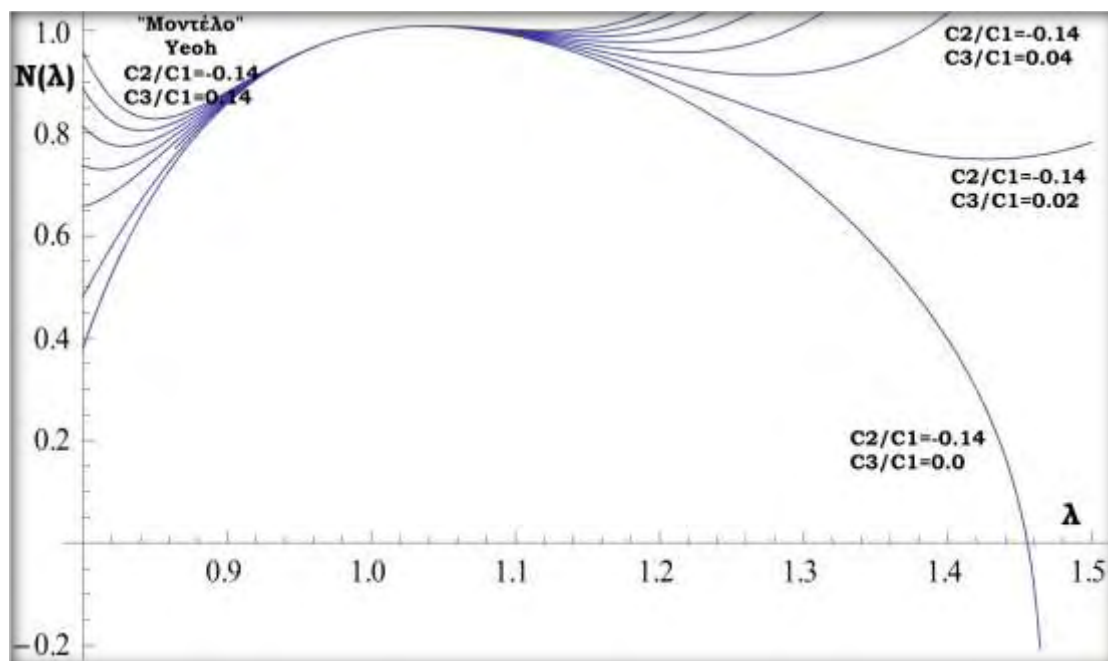
Στη συνέχεια, παραθέτουμε τρία διαγράμματα που απεικονίζουν τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σύμφωνα με το προσομοίωμα του Yeoh σαν συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\lambda$ . Το εν λόγω «μοντέλο» αποτελείται από τρεις σταθερές  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$ . Για να κατασκευάσουμε τα γραφήματα που ακολουθούν, ορίζουμε τις τιμές των  $C_1$ ,  $C_2$ , ώστε να παραμένουν αμετάβλητες, και επιλέγουμε διάφορες τιμές για την τρίτη παράμετρο  $C_3$ .



**Γράφημα 3.7.2.2** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σύμφωνα με το «μοντέλο» του Yeoh. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά το γράφημα μπορούμε να δούμε ότι για την περίπτωση που ο λόγος  $C_3/C_1=0$  η εικόνα της καμπύλης μεταβάλλεται σημαντικά ακολουθώντας φθίνουσα πορεία για τιμές του  $\lambda \geq 1.1$ . Ενώ λοιπόν, η ακαμψία του υλικού με την επιβολή εφελκυστικής δύναμης δείχνει αρχικά να αυξάνεται (για την περίπτωση που ο λόγος  $C_3/C_1=0$ ), εμφανίζεται ένα κρίσιμο «τέντωμα»  $\lambda=1.1$  με αποτέλεσμα η ακαμψία να μειώνεται σημαντικά (φθίνουσα πορεία την καμπύλης). Για τις περιπτώσεις όπου η παράμετρος  $C_3 \neq 0$  οι καμπύλες για  $\lambda \geq 1.3$  είναι αύξουσες. Στο ανωτέρω γράφημα έχουμε επιλέξει σταθερή τιμή για τις παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$ . Ειδικότερα,  $C_1=0.5$  και  $C_2=-0.05$ , ενώ η τρίτη παράμετρος  $C_3$  λαμβάνει τιμές στο «διάστημα»  $0.0 \leq C_3 \leq 0.05$  επιλέγοντας βήμα ίσο με 0.01.



**Γράφημα 3.7.2.3** Αντίστοιχο γράφημα με το προηγούμενο, απεικονίζοντας τη διόρθωση  $N(\lambda)$  σαν συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\lambda$ , σύμφωνα με το «μοντέλο» του Yeoh. Στην περίπτωση αυτή, οι ποσότητες  $C_1=0.5$  και  $C_2=-0.06$  παραμένουν σταθερές, ενώ η τρίτη παράμετρος  $C_3$  λαμβάνει τιμές στο «διάστημα»  $0.0 \leq C_3 \leq 0.06$  επιλέγοντας βήμα ίσο με 0.01.

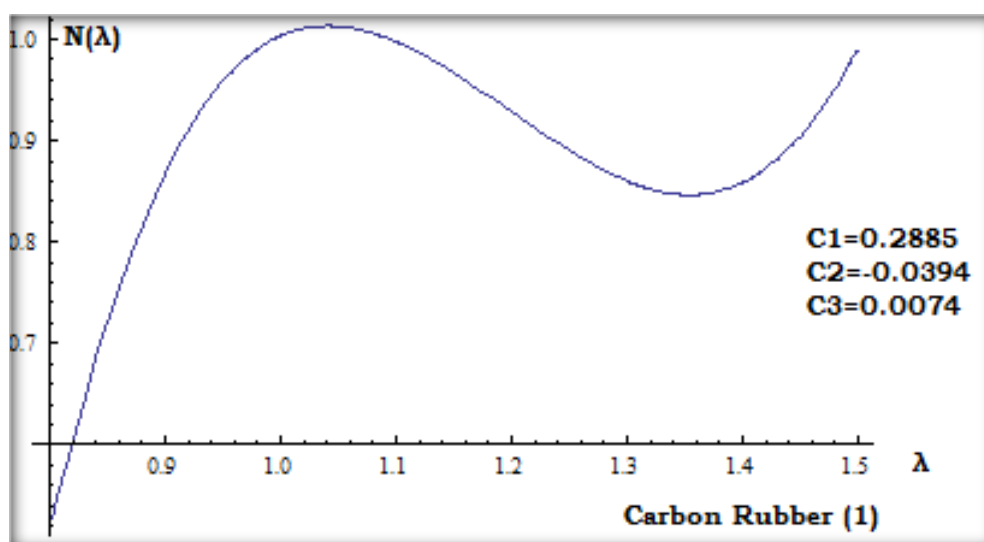


**Γράφημα 3.7.2.4** Αντίστοιχο γράφημα με το προηγούμενο, απεικονίζοντας τη διόρθωση  $N(\lambda)$  σαν συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\lambda$ , σύμφωνα με το «μοντέλο» του Yeoh. Στην περίπτωση αυτή, οι ποσότητες  $C_1=0.5$  και  $C_2=-0.07$  παραμένουν σταθερές, ενώ η τρίτη παράμετρος  $C_3$  λαμβάνει τιμές στο «διάστημα»  $0.0 \leq C_3 \leq 0.07$  επιλέγοντας βήμα ίσο με 0.01.

Το «μοντέλο» του Yeoh χρησιμοποιείται για να προσομοιάσει ελαστομερή υλικά, που ανήκουν στην κατηγορία των ελαστικών (rubbers). Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι τρεις σταθερές  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  του προσομοιώματος του Yeoh για τέσσερα ελαστικά δείγματα. Στη συνέχεια, εφόσον γνωρίζουμε τις σταθερές παραμέτρους του «μοντέλου» για τα τέσσερα ελαστικά υλικά μπορούμε να κατασκευάσουμε τα διαγράμματα που εκφράζουν τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$ .

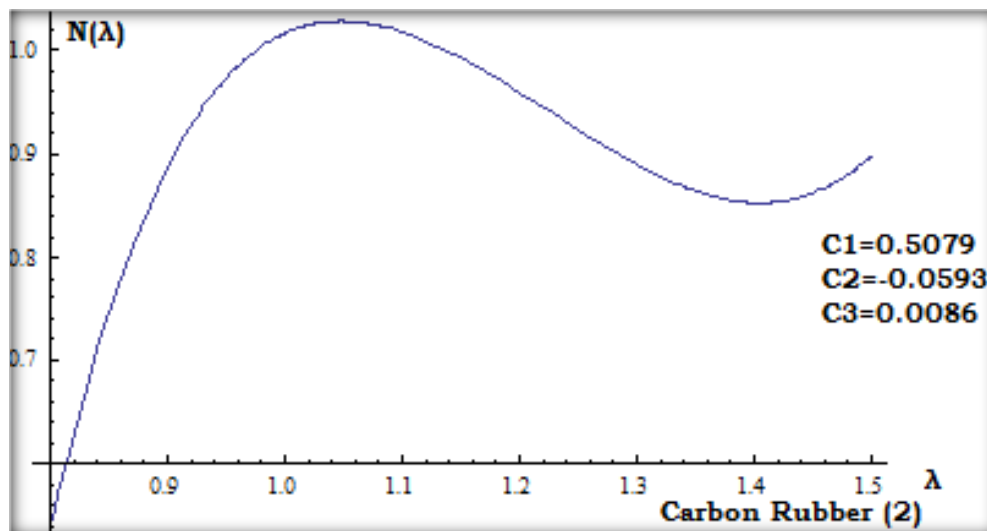
**Πίνακας 3.7.2.1** Στον πίνακα μπορούμε να διακρίνουμε τις τρεις σταθερές του προσομοιώματος Yeoh  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  που αφορούν τέσσερα ελαστικά δείγματα.

material	$C_1$ [MPa]	$C_2$ [MPa]	$C_3$ [MPa]
Rubber (1)	0.28850	-0.03940	0.00740
Rubber (2)	0.50790	-0.05930	0.00860
Rubber (3)	1.05430	-0.07790	0.02410
Rubber (4)	0.29800	-0.01400	0.00016

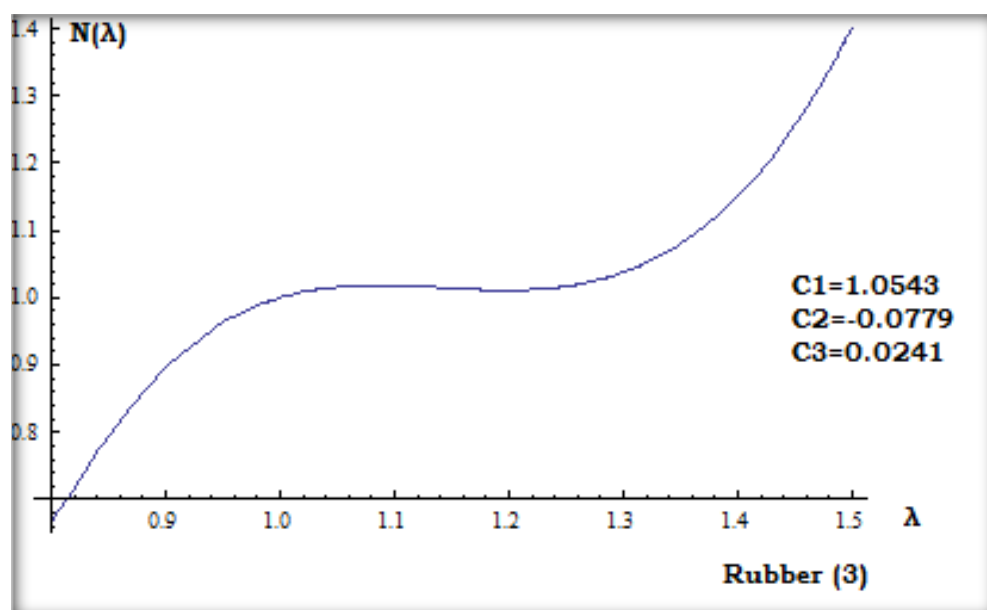


**Γράφημα 3.7.2.5** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$  για το ελαστικό δοκίμιο με κωδικό (1). Όταν δεν υπάρχει αρχική παραμόρφωση ( $\lambda=1$ ) στο δείγμα η

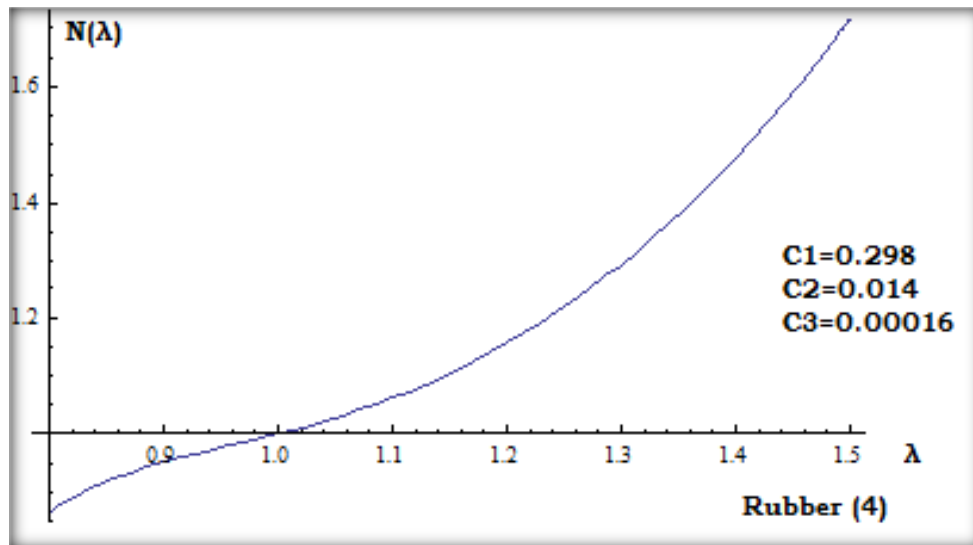
διόρθωση ισούται με ένα ( $N(\lambda)=1$ ). Όταν η σταθερά  $C_2$  είναι αρνητική η καμπύλη εμφανίζει ακρότατο και στη συνέχεια αρχίζει να φθίνει.



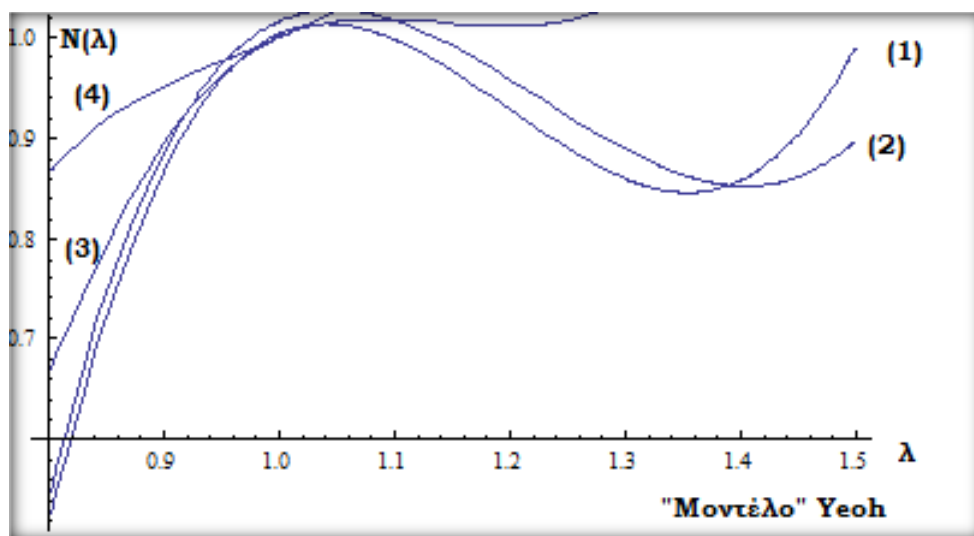
**Γράφημα 3.7.2.6** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$  για το ελαστικό δοκίμιο με κωδικό (2).



**Γράφημα 3.7.2.7** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$  για το ελαστικό δοκίμιο με κωδικό (3).



**Γράφημα 3.7.2.8** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$  για το ελαστικό δοκίμιο με κωδικό (4). Για το εν λόγω ελαστικό η σταθερά  $C_2$  του προσομοιώματος είναι θετική, με αποτέλεσμα η καμπύλη να είναι αύξουσα και να μην εμφανίζει τοπικό ακρότατο.



**Γράφημα 3.7.2.9** Ταυτόχρονη απεικόνιση όλων των προηγούμενων διαγραμμάτων για τα τέσσερα ελαστικά δοκίμια.

### 3.8 Υπέρ-ελαστικό προσομοίωμα του Gent

Το προσομοίωμα του Gent αποτελείται από ένα υπερελαστικό υλικό. Πρόκειται για ένα ελαστικό δείγμα που χαρακτηρίζεται από ελαστική συμπεριφορά, βασισμένο στην αρχή της περιορισμένης επεκτασιμότητας. Σε αυτό το «μοντέλο», η συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  είναι σχεδιασμένη ώστε να είναι μοναδική όταν η πρώτη κύρια αναλλοίωτη της αριστερής μετρικής παραμόρφωσης Cauchy-Green φτάσει μία οριακή τιμή  $I_m$ .

Η συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης για το προσομοίωμα του Gent στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W = -\frac{\mu_0 J_m}{2} \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (3.45)$$

Όπου με  $\mu$  συμβολίζεται το μέτρο διάτμησης του υλικού, με  $I_1$  η πρώτη κύρια αναλλοίωτη του  $\mathbf{B}$  και η ποσότητα  $J_m = I_m - 3$ .

Οι τάσεις κατά Cauchy στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού για το προσομοίωμα του Gent εκφράζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\underline{\sigma} = -P \underline{I} + \frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3} \underline{B} \quad (3.46)$$

Στην ισότητα που αναγράφεται παραπάνω, με  $P$  συμβολίζεται η υδροστατική πίεση, με  $\underline{I}$  ο μοναδιαίος τανυστής και με  $\underline{B}$  η αριστερή μετρική παραμόρφωση Cauchy-Green που ισούται με  $\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T$ .

#### 3.8.1 Μονοαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση μονοαξονικού ελκυσμού οι τάσεις κατά Cauchy στο προσομοίωμα του Gent εκφράζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = \frac{\mu_0 J_m}{J_m - I_1 + 3} (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (3.47)$$

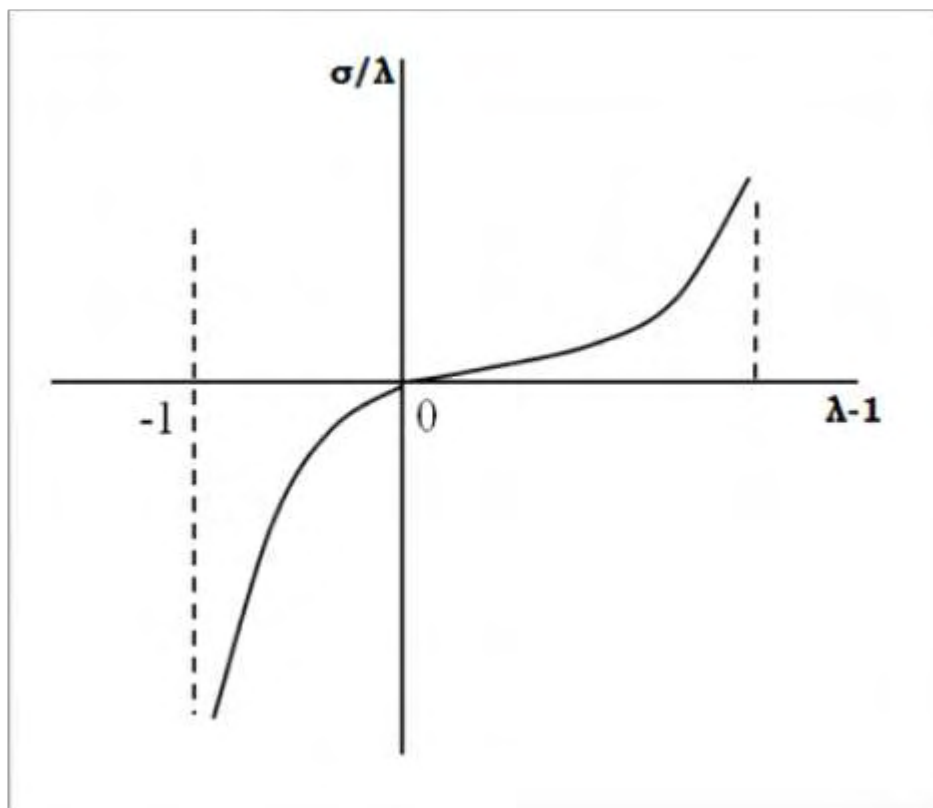
Όπου με  $\mu_0$  συμβολίζεται το αρχικό μέτρο διάτμησης του υλικού, με  $I_1$  η πρώτη κύρια αναλλοίωτη του  $\mathbf{B}$ , με  $\lambda$  το επιβαλλόμενο «τέντωμα» κατά τη διεύθυνση  $x_1$  και με  $J_m$  η σταθερά του υλικού ( $J_m \gg 1$ ). Η μονοαξονική προένταση του δοκιμίου μετατρέπει το υλικό σε ένα εγκάρσια ισότροπο «σώμα». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το «τέντωμα» στις διευθύνσεις  $x_2$  και  $x_3$  να είναι το ίδιο. Εφόσον  $\lambda_2 = \lambda_3$  η πρώτη κύρια αναλλοίωτη δίνεται από την ισότητα:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (3.48)$$

Το μέτρο διάτμησης στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση ενός ασυμπίεστου υλικού (reference configuration) εκφράζεται ως εξής:

$$\mu_0 = \frac{E_0}{3} \quad (3.49)$$

Η γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης στο «μοντέλο» του Gent είναι μία αύξουσα καμπύλη και έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 3.8.1.1** Γράφημα τάσης-παραμόρφωσης για το «μοντέλο» του Gent.

### 3.8.2 Διαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση διαξονικού ελκυσμού στις κατευθύνσεις  $\mathbf{n}_1$  και  $\mathbf{n}_2$ , οι κύριες τιμές του «τεντώματος» (principal stretches) είναι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Εξαιτίας της ασυμπίεστότητας του υλικού (ισχύει για ελαστομερή υλικά) ισχύει η ισότητα  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Κάνοντας λοιπόν, αντικατάσταση στις σχέσεις που προαναφέρθηκαν προκύπτει ότι  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2}$ . Η πρώτη κύρια αναλλοίωτη  $I_1$  του  $\mathbf{B}$  δίνεται από τη σχέση:



$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad (3.50)$$

Η αριστερή μετρική παραμόρφωση Cauchy-Green μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \lambda^2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \frac{1}{\lambda^4} \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \quad (3.51)$$

Σε περίπτωση που οι κατευθύνσεις των κύριων τιμών  $\lambda_i$  είναι προσανατολισμένες, οι ορθές τάσεις κατά Cauchy  $S_{ii}$ , οφειλόμενες στην προένταση του δοκιμίου, για το «μοντέλο» του Gent δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$S_{11} - S_{22} = 0 \quad (3.52)$$

$$S_{22} - S_{33} = \left( \frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3} \right) (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \quad (3.53)$$

$$S_{33} - S_{11} = \left( \frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3} \right) (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \quad (3.54)$$

Για να προσδιορίσουμε τις επιπρόσθετες ορθές τάσεις  $s_{ii}$  εξαιτίας της διεύθυνσης στην επιφάνεια του προεντεταμένου υλικού, χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις του Biot (1965):

$$s_{11} - s_{22} = \left\{ 2\mu J_m \lambda_1^2 \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \left( 1 + \frac{\lambda_1^2}{J_m - I_1 + 3} - \frac{\lambda_2^2}{J_m - I_1 + 3} \right) \right\} e_{11} - \left\{ 2\mu J_m \lambda_2^2 \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \left( 1 + \frac{\lambda_2^2}{J_m - I_1 + 3} - \frac{\lambda_1^2}{J_m - I_1 + 3} \right) \right\} e_{22} \quad (3.55)$$

$$s_{22} - s_{33} = \left\{ 2\mu J_m \lambda_2^2 \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \left( 1 + \frac{\lambda_2^2}{J_m - I_1 + 3} - \frac{\lambda_1^2}{J_m - I_1 + 3} \right) \right\} e_{22} - \left\{ 2\mu J_m \lambda_3^2 \frac{1}{J_m - I_1 + 3} + 2\mu J_m \lambda_3^4 \frac{1}{(J_m - I_1 + 3)^2} \right\} e_{33} \quad (3.56)$$

$$s_{33} - s_{11} = \left\{ 2\mu J_m \lambda_3^2 \frac{1}{J_m - I_1 + 3} + 2\mu J_m \lambda_3^4 \frac{1}{(J_m - I_1 + 3)^2} \right\} e_{33} - \left\{ 2\mu J_m \lambda_1^2 \frac{1}{(J_m - I_1 + 3)} \left( 1 + \frac{\lambda_1^2}{J_m - I_1 + 3} - \frac{\lambda_2^2}{J_m - I_1 + 3} \right) \right\} e_{11} \quad (3.57)$$

Αντίστοιχες σχέσεις του Biot (1965) χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων  $s_{ij}$ :

$$s_{12} = 0 \quad (3.58)$$

$$s_{23} = \left\{ \left( \mu J_m \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \right) (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right\} e_{23} \quad (3.59)$$

$$s_{31} = \left\{ \left( \mu J_m \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \right) (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \right\} e_{31} \quad (3.60)$$

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το γράφημα που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σύμφωνα με το προσομοίωμα του Gent μεταβάλλοντας την ποσότητα  $J_m$ . Στην περίπτωση που το δοκίμιο είναι ασυμπιέστο και ο ελκυσμός που επιβάλλουμε στο υλικό είναι ίσο-διαξονικός ισχύουν οι σχέσεις  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$  και  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , αντίστοιχα. Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση που εκφράζει την πρώτη αναλλοίωτη προκύπτει τελικά  $I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}$ , όπως αναφέραμε και προηγουμένως. Οι συμβολισμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  παριστάνουν το αρχικό «τέντωμα» που επιβάλλουμε στο δείγμα, ενώ ο δείκτης εκφράζει την κατεύθυνση, στην οποία πραγματοποιείται η παραμόρφωση του υλικού. Για να υπολογίσουμε τη διόρθωση  $N(\lambda)$  κατά Gent χρειάστηκε να προσδιορίσουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{J_m}{J_m - (I_1 - 3)}$$

$$W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

$$W_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{J_m}{[J_m - (I_1 - 3)]^2}$$

$$W_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} = 0$$

$$W_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_1} = 0$$

$$W_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} = 0$$

$$a = 2 \frac{1}{\lambda^4} (W_1 + \lambda^2 W_2) = \frac{2W_1}{\lambda^4}$$

$$b = 2\lambda^2 (W_1 + \lambda^2 W_2) = 2\lambda^2 W_1$$

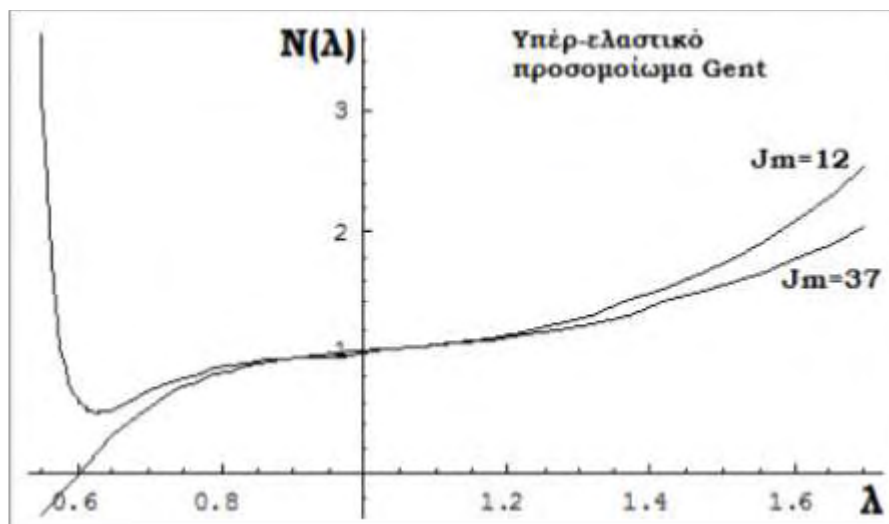
$$c = 4\lambda^2 \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( W_{11} + W_{22} \lambda^2 \left( \frac{1}{\lambda^4} + \lambda^2 \right) \right) + W_{12} \left( \frac{1}{\lambda^4} + 2\lambda^2 \right) \right] = 4\lambda^2 \left[ W_1 + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) W_{11} \right]$$

$$d = 4 \frac{1}{\lambda^4} \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) (W_{11} + 2W_{22} \lambda^4 + 3W_{12} \lambda^2) \right] = \frac{4}{\lambda^4} \left[ W_1 + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) W_{11} \right]$$

$$K_{1,2} = \frac{-(a+b-c-d) \pm \sqrt{(a+b-c-d)^2 - 4ab}}{2b}$$

$$N(\lambda) = \frac{(K_1 b + a) \sqrt{K_1} (1 + K_2) - (K_2 b + a) \sqrt{K_2} (1 + K_1)}{2(K_1 - K_2)}$$

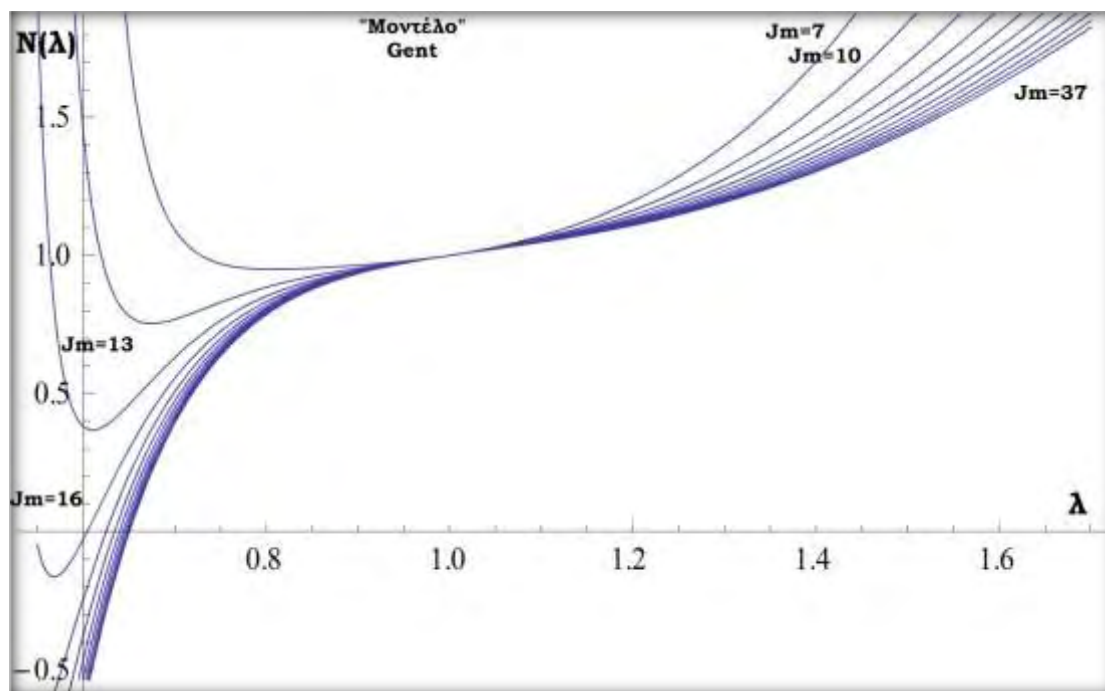
Εάν υπολογίσουμε λοιπόν, τις ποσότητες  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $K_1$  και  $K_2$  λαμβάνοντας τη σταθερή ποσότητα του «μοντέλου»  $J_m=12$  αρχικά και  $J_m=37$  στη συνέχεια μπορούμε με χρήση της τελευταίας σχέσης να δημιουργήσουμε μία καμπύλη  $\left\{ \frac{E^*}{E_0} - \lambda \right\}$  που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο προσομοίωμα.



**Σχήμα 3.8.2.1** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  κατά Gent. Στην περίπτωση που δεν επιβάλλουμε κάποια αρχική προένταση, δηλαδή  $\lambda=1$ , πρέπει να ισχύει  $N(1)=1$ , όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω. Στο παραπάνω διάγραμμα η σταθερά του «μοντέλου»  $J_m$  λαμβάνει τις τιμές 12 και 37. Εάν μελετήσουμε προσεκτικά το γράφημα βλέπουμε ότι για

θλιπτικά φορτία, όπου το stretch προσεγγίζει την τιμή  $\lambda=0.6$ , το προσομοίωμα του Gent εμφανίζει προβλήματα.

Ολοκληρώνοντας την περιγραφή του προσομοιώματος του Gent, παραθέτουμε ένα συνολικό γράφημα της διόρθωσης  $N(\lambda)$ . Η μεταβλητή  $J_m$  κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $7 \leq J_m \leq 37$ , με βήμα ίσο με τρία.



**Γράφημα 3.8.2.1** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  για το προσομοίωμα του Gent. Για την κατασκευή του διαγράμματος επιλέξαμε η ποσότητα  $J_m$  να κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $7 \leq J_m \leq 37$ , με βήμα ίσο με τρία. Για εφελκυστικά φορτία παρατηρούμε ότι οι καμπύλες είναι αύξουσες, ενώ για θλιπτικά είναι φθίνουσες. **Το εν λόγω γράφημα μπορούμε να πούμε ότι παρουσιάζει μία ιδιαιτερότητα. Καταλήγουμε σε αυτό το συμπέρασμα διότι στην περίπτωση επιβολής θλιπτικής φόρτισης για τιμές του  $J_m \leq 16$  οι καμπύλες αναστρέφονται και η ακαμψία του υλικού δείχνει να αυξάνεται!** Στο προσομοίωμα του Gent και σε όλα τα διπαραμετρικά «μοντέλα» η σταθερά  $\mu_0$  ενσωματώνεται στη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$ . Το «μοντέλο» Gent δείχνει να έχει πολύ καλή συμπεριφορά για μεγάλες παραμορφώσεις!

### 3.9 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung

Το «μοντέλο» του Fung, που εφαρμόζεται σε ασυμπίεστα και ορθότροπα «σώματα», χρησιμοποιείται κυρίως για να προσομοιάσουμε υλικά που ανήκουν στην κατηγορία των έμβιο-υλικών, όπως είναι για παράδειγμα οι ιστοί. Η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης για το προσομοίωμα του Fung, η οποία μπορεί να περιγράψει την παραμόρφωση ενός άθικτου τοιχώματος μίας αρτηρίας, στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W = d_1 \{ \exp[d_2 (I_1 - 3)] - 1 \} \quad (3.61)$$

Όπου με  $I_1$  συμβολίζεται η πρώτη κύρια αναλλοίωτη, ενώ με  $d_1$  και  $d_2$  οι σταθερές του υλικού, τις οποίες επιδιώκουμε να υπολογίσουμε σε κάθε δοκίμιο. Στο σημείο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες  $W_1$  και  $W_{11}$  που παριστάνουν την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  ως προς την πρώτη κύρια αναλλοίωτη  $I_1$ .

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = d_1 d_2 \exp[d_2 (I_1 - 3)]$$

$$W_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = d_1 d_2^2 \exp[d_2 (I_1 - 3)]$$

#### 3.9.1 Μονοαξονικός ελκυσμός

Οι τάσεις κατά Cauchy στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού για το προσομοίωμα του Fung, έχοντας υποβάλλει το «σώμα» σε μονοαξονικό εφελκυσμό, εκφράζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = 2d_1 d_2 \exp[d_2 (I_1 - 3)] (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (3.62)$$

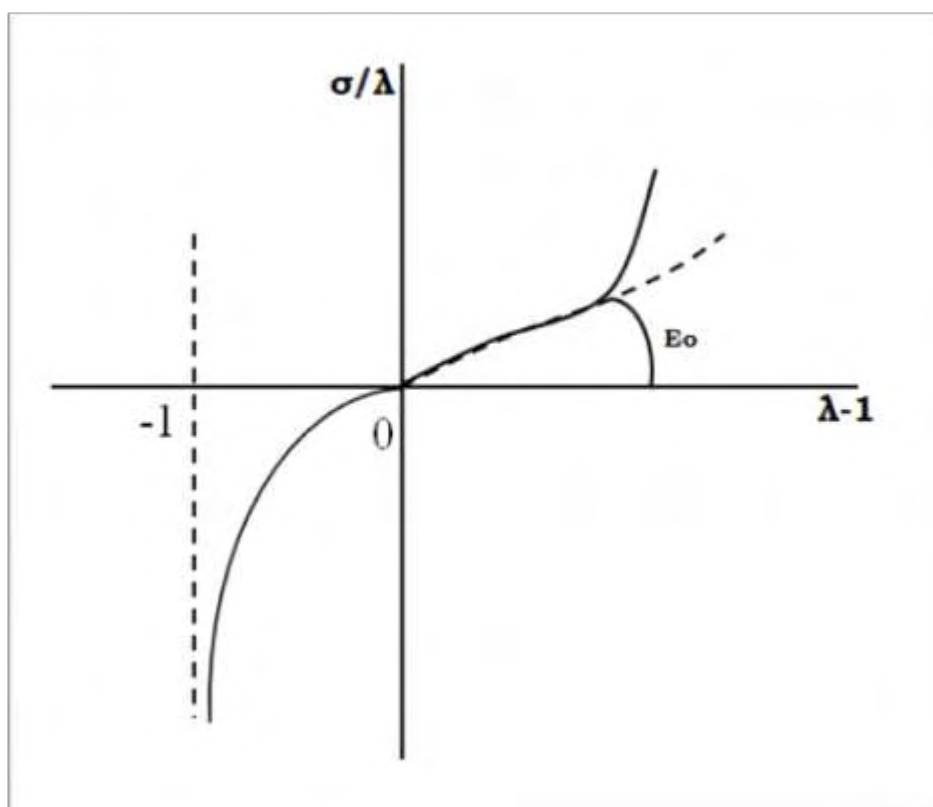
Στην ισότητα που αναγράφεται παραπάνω, με  $\lambda$  συμβολίζεται το «τέντωμα» που επιβάλλουμε στο δείγμα στην περίπτωση του μονοαξονικού ελκυσμού. Η πρώτη κύρια αναλλοίωτη  $I_1$ , αν λάβουμε υπόψη την εγκάρσια ισοτροπία του δείγματος και το γεγονός ότι το «σώμα» είναι ασυμπίεστο, δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (3.63)$$

Ενώ το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$E_0 = 6d_1d_2 \quad (3.64)$$

Η γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση τάσης-παραμόρφωσης για το προσομοίωμα του Fung είναι αύξουσα και η μορφή της παριστάνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 3.9.1.1** Γράφημα τάσης-παραμόρφωσης για το «μοντέλο» του Fung.

### 3.9.2 Διαξονικός ελκυσμός

Στην περίπτωση ίσο-διαξονικού ελκυσμού η επιφάνεια του υλικού στην οποία υλοποιείται η διεύθυνση χαρακτηρίζεται ως ισότροπη. Παρόλα αυτά όμως το «σώμα» εξαιτίας της προέντασης είναι ανισότροπο. Έτσι λοιπόν, πρέπει να διορθώσουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει λόγω της προέντασης. Η διόρθωση αυτή διασπάται ως εξής: (α) διόρθωση συμμετρικού μέρους και (β) διόρθωση αντισυμμετρικού μέρους, στην οποία θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε επόμενα κεφάλαια. Όσον αφορά τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το γράφημα που εκφράζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  σύμφωνα με το προσομοίωμα του Fung επιλέγοντας σταθερή τιμή για την ποσότητα  $d_1$  και μεταβάλλοντας την ποσότητα  $d_2$ . Στην περίπτωση που το δοκίμιο είναι ασυμπίεστο και ο ελκυσμός που επιβάλλουμε στο υλικό είναι ίσο-διαξονικός ισχύουν οι σχέσεις  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$  και  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ , αντίστοιχα. Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση που εκφράζει την

πρώτη αναλλοίωτη προκύπτει τελικά  $I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}$ . Οι συμβολισμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  παριστάνουν το αρχικό «τέντωμα» που επιβάλλουμε στο δείγμα, ενώ ο δείκτης εκφράζει την κατεύθυνση, στην οποία πραγματοποιείται η παραμόρφωση του υλικού. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε το γράφημα της διόρθωσης  $N(\lambda)$ -λ κατά Fung.

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = d_1 d_2 \exp[d_2 (I_1 - 3)]$$

$$W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$$

$$W_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = d_1 d_2^2 \exp[d_2 (I_1 - 3)]$$

$$W_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} = 0$$

$$W_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_1} = 0$$

$$W_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} = 0$$

$$a = 2 \frac{1}{\lambda^4} (W_1 + \lambda^2 W_2) = \frac{2W_1}{\lambda^4}$$

$$b = 2\lambda^2 (W_1 + \lambda^2 W_2) = 2\lambda^2 W_1$$

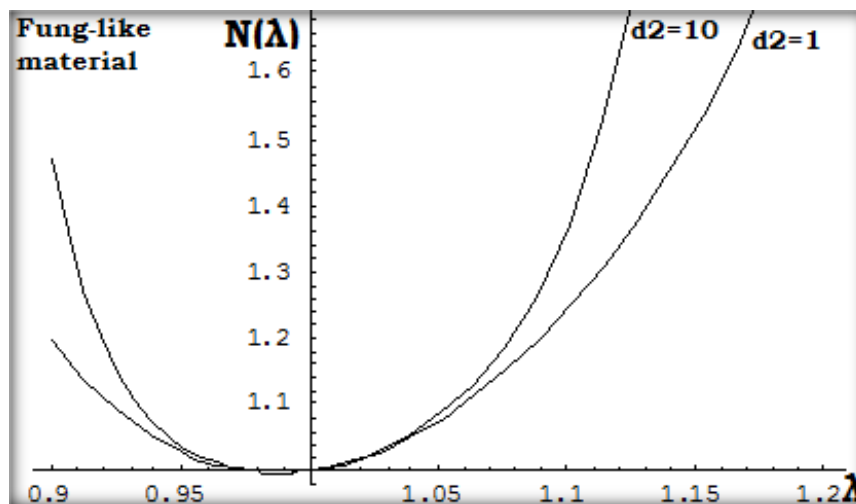
$$c = 4\lambda^2 \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( W_{11} + W_{22} \lambda^2 \left( \frac{1}{\lambda^4} + \lambda^2 \right) \right) + W_{12} \left( \frac{1}{\lambda^4} + 2\lambda^2 \right) \right] = 4\lambda^2 \left[ W_1 + \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) W_{11} \right]$$

$$d = 4 \frac{1}{\lambda^4} \left[ (W_1 + \lambda^2 W_2) + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) (W_{11} + 2W_{22} \lambda^4 + 3W_{12} \lambda^2) \right] = \frac{4}{\lambda^4} \left[ W_1 + \left( \frac{1}{\lambda^4} - \lambda^2 \right) W_{11} \right]$$

$$K_{1,2} = \frac{-(a+b-c-d) \pm \sqrt{(a+b-c-d)^2 - 4ab}}{2b}$$

$$N(\lambda) = 2.5 \frac{(K_1 b + a) \sqrt{K_1} (1 + K_2) - (K_2 b + a) \sqrt{K_2} (1 + K_1)}{(K_1 - K_2)}$$

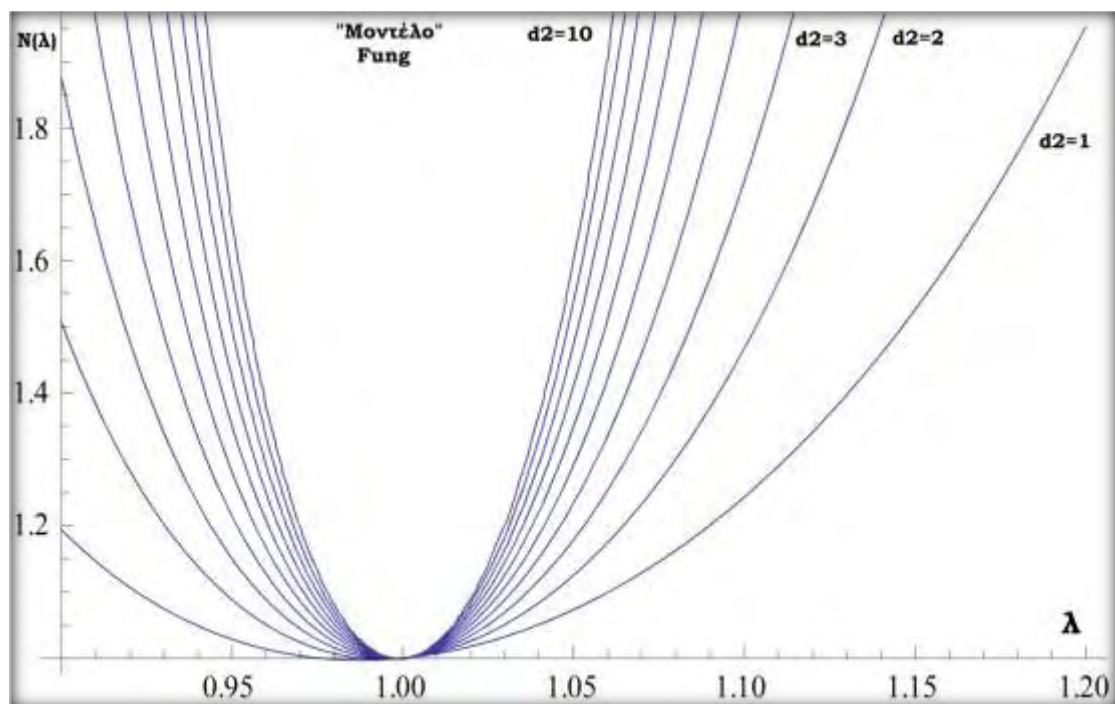
Εάν υπολογίσουμε λοιπόν, τις ποσότητες  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $K_1$  και  $K_2$  λαμβάνοντας τις σταθερές του «μοντέλου» αρχικά  $d_1=0.1$  kPa και  $d_2=1$  και στη συνέχεια  $d_1=0.1$  kPa και  $d_2=10$  μπορούμε εφαρμόζοντας την τελική εξίσωση να δημιουργήσουμε μία καμπύλη  $\left\{ \frac{E^*}{E_0} - \lambda \right\}$  που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο προσομοίωμα.



**Γράφημα 3.9.2.1** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  για το προσομοίωμα του Fung. Για την κατασκευή του διαγράμματος επιλέξαμε την ποσότητα  $d_1=0.1$  kPa, ενώ για τη σταθερά του «μοντέλου»  $d_2$  λάβαμε διαφορετικές τιμές σε κάθε περίπτωση. **Στην περίπτωση του δεν επιβάλλουμε «τέντωμα» στο δείγμα ( $\lambda=1$ ) πρέπει η διόρθωση  $N(1)=1$ , όπως φαίνεται χαρακτηριστικά παραπάνω!**

Χαρακτηριστικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι οι σταθερές ποσότητες του μοντέλου για έναν καρδιακό ιστό ισοδυναμούν με  $d_1=0.115$  KPa και  $d_2=9.665$ , αντίστοιχα. Ολοκληρώνοντας την περιγραφή του προσομοιώματος του Fung, παραθέτουμε ένα συνολικό γράφημα της διόρθωσης  $N(\lambda)$ . Η ποσότητα  $d_1$  παραμένει σταθερή και ίση με 0.1, ενώ η ποσότητα  $d_2$  κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $1 \leq d_2 \leq 10$ , με βήμα ίσο με τη μονάδα. Οι Delfino et al. (1997) χρησιμοποίησαν τον εκθετικό νόμο του Fung για καρωτίδες όπου  $d_1=2.65$  kPa και  $d_2=8.35$ .





**Γράφημα 3.9.2.2** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  για το προσομοίωμα του Fung. Για την κατασκευή του διαγράμματος επιλέξαμε την ποσότητα  $d_1=0.1$  kPa, ενώ για τη σταθερά του «μοντέλου»  $d_2$  λάβαμε διαφορετικές τιμές σε κάθε περίπτωση ( $1 \leq d_2 \leq 10$ , με βήμα ίσο με τη μονάδα). Το γράφημα μπορεί να παρομοιαστεί με μία «βεντάλια»! Όσο αυξάνεται η παράμετρος  $d_2$  τόσο πιο κλειστή είναι η «βεντάλια» του διαγράμματος.

Όλοι οι καταστατικοί νόμοι που προαναφέρθηκαν (Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Gent, Yeoh, Fung) προσομοιάζουν ασυμπιεστα ισότροπα ελαστικά υλικά!

### 3.10 Σκληρομέτρηση προεντεταμένου ελαστικού G&T αποτελούμενο από δύο στρώματα του ίδιου υλικού με συσκευή Shore κλίμακας O

**Ε**πιθυμώντας να μελετήσουμε καλύτερα την επιρροή της προέντασης σε ελαστομερή υλικά υποβάλλαμε το ελαστικό «σώμα» G&T σε μονοαξονικό ελκυσμό. Αρχικά, το δείγμα προεντίνεται και στη συνέχεια υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση.

Το δοκίμιο ανήκει στην κατηγορία των ελαστομερών. Αποτελείται από δύο στρώματα ίσου πάχους που το καθένα ισούται με 1.89 χιλιοστά. Έτσι, το συνολικό πάχος του υλικού που εδράζεται πάνω στη συσκευή προέντασης ισούται με 3.78 χιλιοστά. **Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι μόνο το ανώτερο στρώμα που τελικά έρχεται σε επαφή με το διεισδυτή προεντίνεται.** Το αρχικό μήκος του δείγματος ισούται με 1.7 χιλιοστά και συμβολίζεται με  $L_0$ .

Αρχικά, το δείγμα είναι απλά εδρασμένο πάνω στη συσκευή προέντασης. Ο σφαιρικός διεισδυτής του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O εισχωρεί στο υλικό και τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι τα ακόλουθα:

- ❖  $S_1 = 78$
- ❖  $S_2 = 78$
- ❖  $S_3 = 77$
- ❖  $S_4 = 78$

Η μέση τιμή σκληρότητας των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 77.75$ .

Στη συνέχεια, το δοκίμιο υποβάλλεται σε κάποια αρχική προένταση πριν τη σκληρομέτρηση. Σε αυτή την περίπτωση το τελικό μήκος του δείγματος ισούται με 2.1 χιλιοστά και συμβολίζεται με  $L$ . Το «τέντωμα» κατά την 1 διεύθυνση δίνεται από τη σχέση  $\lambda_1 = \frac{L}{L_0} = 1.235$ . Τα

αποτελέσματα σκληρότητας είναι τα ακόλουθα:

- ❖  $S_1 = 80$
- ❖  $S_2 = 80$
- ❖  $S_3 = 80$

Η μέση τιμή σκληρότητας των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 80$ .

Με την ολοκλήρωση των πειραμάτων, το δοκίμιο υποβλήθηκε πριν τη σκληρομέτρηση σε μεγαλύτερη προένταση. Το τελικό μήκος του δοκιμίου σε αυτή την περίπτωση μετρήθηκε ίσο με 2.6 χιλιοστά. Το «τέντωμα» κατά την 1 διεύθυνση ισούται με  $\lambda_1 = 1.53$  και τα αποτελέσματα σκληρότητας είναι τα ακόλουθα:

- ❖  $S_1 = 83$

$$\diamond S_2 = 83$$

$$\diamond S_3 = 84$$

Η μέση τιμή σκληρότητας των παραπάνω μετρήσεων ισούται με  $S_m = 83.33$ .

Παρατηρώντας με προσοχή τα ανωτέρω αποτελέσματα βλέπουμε ότι η επιβολή της προέντασης σε ελαστικό δείγμα αυξάνει τη σκληρότητα. **Ειδικότερα, όσο μεγαλύτερο «τέντωμα» επιβάλλουμε σε ένα ελαστομερές τόσο μεγαλύτερη θα είναι η σκληρότητά του.**

### 3.10.1 Προσδιορισμός του πάχους $t$ του προεντεταμένου δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση

Όπως προαναφέρθηκε, το ελαστικό G&T υποβλήθηκε αρχικά σε «τέντωμα»  $\lambda_1=1.235$  και στη συνέχεια σε μεγαλύτερη προένταση με  $\lambda_1=1.53$ . Στο σημείο αυτό, θα υπολογίσουμε το πάχος  $t$  του δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση για τις δύο περιπτώσεις προέντασης. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Το δοκίμιο και στις δύο περιπτώσεις αποτελείται από δύο στρώματα του ίδιου υλικού με αρχικό πάχος 1.89 mm το καθένα. Το κατώτερο στρώμα παραμένει अपαραμόρφωτο χωρίς να μεταβάλλεται το πάχος του, ενώ το στρώμα που έρχεται σε επαφή με το διεισδυτή είναι αυτό που τελικά προεντείνεται.

Εξαιτίας της ισοτροπίας του υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση ισχύει η ισότητα  $\lambda_2 = \lambda_3$  και λόγω της ασυμπίεστότητας του δείγματος ισχύει ότι  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Κάνοντας εφαρμογή της τελευταίας σχέσης μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» στις διευθύνσεις  $x_2$  και

$x_3$ . Έτσι προκύπτει η ισότητα  $\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$  και το τελικό πάχος του

δοκιμίου στην τρέχουσα κατάσταση δίνεται από τη σχέση  $t = t_0 \lambda_3$ . Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας για τις δύο περιπτώσεις προέντασης του υλικού, κάνοντας εφαρμογή των σχέσεων που προαναφέρθηκαν.

**Πίνακας 3.10.1.1** Συγκεντρωτικοί πίνακες για τις δύο περιπτώσεις προέντασης του ελαστικού G&T. Με  $L_0$  συμβολίζεται το αρχικό μήκος του δείγματος, με  $L$  το τελικό μήκος εφόσον το υλικό έχει υποστεί επιμήκυνση κατά τη μία διεύθυνση, με  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  παριστάνεται το «τέντωμα» στις αντίστοιχες διευθύνσεις  $x_1, x_2$ , και  $x_3$ , με  $t_0$  το πάχος του δοκιμίου στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση και με  $t$  το τελικό πάχος στην τρέχουσα κατάσταση εξαιτίας της προέντασης. Παρατηρώντας τον ανωτέρω πίνακα μπορούμε να δούμε ότι όσο μεγαλύτερο ελκυσμό επιβάλλουμε στο δοκίμιο τόσο ελαττώνεται το πάχος του  $t$  στην τρίτη διεύθυνση.

$L_0$ [cm]	$L$ [cm]	$\lambda_1$	$\lambda_2 = \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$t_0$ [mm]	$t$ [mm]
1.700	2.100	1.235	0.899	1.000	3.780	<b>3.589</b>
1.700	2.600	1.530	0.808	1.000	3.780	<b>3.417</b>

$L_0$ [cm]	$L$ [cm]	$\lambda_1$	$\lambda_2 = \lambda_3$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$I_B = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$
1.70 0	2.100	1.235	0.899	1.067	0.168	3.142
1.70 0	2.600	1.530	0.808	1.169	0.361	3.647

### 3.10.2 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα G&T εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Ting

Στο σημείο αυτό, έχοντας προσδιορίσει το τελικό πάχος  $t$  του δοκιμίου G&T, για τις δύο περιπτώσεις μονοαξονικής προέντασης του υλικού, προχωράμε στη σκληρομέτρηση του δείγματος με συσκευή Shore κλίμακας O, που διαθέτει ενσωματωμένο σφαιρικό άκαμπτο διεισδυτή, για τη μέτρηση της σκληρότητας. Αφού μετρήσουμε τη σκληρότητα κατά Shore επιθυμούμε, εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Ting, να προσδιορίσουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E^*$  του προεντεταμένου υλικού. Για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του δοκιμίου G&T, εξαιτίας του λεπτού στρώματος του δείγματος (αρχικό πάχος  $t=3.78$  χιλιοστά), πραγματοποιήθηκε διόρθωση της ακτίνας επαφής  $a$  ως προς το πάχος  $t$  σύμφωνα με τη μεθοδολογία που προτείνουν οι Stevanović et al.

Η διαδικασία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας  $E^*$  σε προεντεταμένο δοκίμιο περιγράφεται αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ακολουθώντας λοιπόν, τη διαδικασία αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.235$**

Σκληρότητα  $S_m=80.00$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.500$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.550$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.717$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.589$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.735$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=9.161$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1.530$**

Σκληρότητα  $S_m=83.33$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.417$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.799$  N  
Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.663$  mm  
Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.417$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.675$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=12.714$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1$  (δεν προεντείνεται το δοκίμιο)**

Σκληρότητα  $S_m=77.75$   
Βάθος διείσδυσης  $h=0.556$  mm  
Δύναμη ελατηρίου  $P=6.382$  N  
Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.750$  mm  
Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.780$  mm  
Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.750$  mm  
Μέτρο ελαστικότητας  $E_0=8.320$  MPa (για δύο στρώσεις του υλικού)

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\lambda_1 = 1.530 > \lambda_1 = 1.235 > \lambda_1 = 1$$

$$E^*_{(\lambda_1=1.530)} > E^*_{(\lambda_1=1.235)} > E^0_{(\lambda_1=1)}$$

Καταλήγουμε λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η επιβολή μεγάλης προέντασης σε ένα ελαστικό δείγμα προκαλεί μεταβολές στις μηχανικές του ιδιότητες. **Επιβάλλοντας μονοαξονικό ελκυσμό σε ένα υλικό αυξάνεται η σκληρότητά του, ελαττώνεται το πάχος του και αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του!**

**Πίνακας 3.10.2.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας προεντεταμένου δοκιμίου εφαρμόζοντας τις εξισώσεις που προτείνει ο Ting. Στην πρώτη στήλη αναγράφεται ο βαθμός προέντασης του ελαστικού δείγματος, στη δεύτερη στήλη η σκληρότητα του κατά Shore O και στην τελευταία στήλη το υπολογισμένο μέτρο ελαστικότητας κατά Ting. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι όσο μεγαλύτερο ελκυσμό επιβάλλουμε σε ένα δείγμα τόσο αυξάνεται η σκληρότητά του και κατ'επέκταση το μέτρο ελαστικότητας του.

«Τέντωμα» $\lambda_1$	Σκληρότητα $S_m$	Μέτρο ελαστικότητας $E^*$ [MPa] $T_{ing}$
1.000	77.750	8.320
1.235	80.000	9.161
1.530	83.330	12.714

### 3.10.3 Υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων σε προεντεταμένο δείγμα G&T εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Hertz

Σε προηγούμενο κεφάλαιο, υπολογίσαμε τις μηχανικές ιδιότητες ενός ελαστικού δείγματος σύμφωνα με τις εξισώσεις που προτείνει ο Hertz. Η μεθοδολογία του είναι πιο συντηρητική σε σχέση με εκείνη του Ting, όπως έχουμε δει σε προηγούμενες περιπτώσεις. Παρόλα αυτά θα εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία του Hertz για να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας σε προεντεταμένο δοκίμιο G&T αρχικού πάχους  $t=3.78$  χιλιοστά. Στη μεθοδολογία πραγματοποιήθηκε διόρθωση της ακτίνας επαφής  $a$  ως προς το πάχος  $t$  σύμφωνα με τη μεθοδολογία που προτείνουν οι Stevanovic et al. Η διαδικασία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας  $E^*$  σε προεντεταμένο δοκίμιο περιγράφεται αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ακολουθώντας λοιπόν, τη διαδικασία αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

#### **Για «τέντωμα» $\lambda_1=1.235$**

Σκληρότητα  $S_m=80.00$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.500$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.550$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.771$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.589$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.775$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=9.419$  MPa

#### **Για «τέντωμα» $\lambda_1=1.530$**

Σκληρότητα  $S_m=83.33$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.417$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.799$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L=0.704$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.417$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.700$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E^*=13.268$  MPa

**Για «τέντωμα»  $\lambda_1=1$  (δεν προεντείνεται το δοκίμιο)**

Σκληρότητα  $S_m=77.75$

Βάθος διείσδυσης  $h=0.556$  mm

Δύναμη ελατηρίου  $P=6.382$  N

Ιδεατή ακτίνα επαφής  $a_L= 0.813$  mm

Πάχος προεντεταμένου υλικού  $t=3.780$  mm

Πραγματική ακτίνα επαφής  $a=0.810$  mm

Μέτρο ελαστικότητας  $E_0=8.038$  MPa (για δύο στρώσεις του υλικού)

**Πίνακας 3.10.3.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας προεντεταμένου δοκιμίου εφαρμόζοντας τις εξισώσεις που προτείνει ο Hertz. Στην πρώτη στήλη αναγράφεται ο βαθμός προέντασης του ελαστικού δείγματος, στη δεύτερη στήλη η σκληρότητα του κατά Shore O και στην τελευταία στήλη το υπολογισμένο μέτρο ελαστικότητας κατά Hertz. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι όσο μεγαλύτερο ελκυσμό επιβάλλουμε σε ένα δείγμα τόσο αυξάνεται η σκληρότητά του και κατ'επέκταση το μέτρο ελαστικότητας του.

«Τέντωμα» $\lambda_1$	Σκληρότητα $S_m$	Μέτρο ελαστικότητας $E^*$ [MPa] Hertz
1.000	77.750	8.038
1.235	80.000	9.419
1.530	83.330	13.268

**Πίνακας 3.10.3.2** Συγκριτικός πίνακας που απεικονίζει τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο δοκίμιο G&T (αποτελούμενο από δύο στρώματα του ίδιου υλικού πάχους 3.78 χιλιοστών) όπως αυτά υπολογίστηκαν σύμφωνα με τις μεθοδολογίες των Ting και Hertz με ταυτόχρονη διόρθωση της ακτίνας επαφής α εφαρμόζοντας την επαναληπτική σχέση των Stevanovic et al. Αν παρατηρήσουμε τον πίνακα μπορούμε να δούμε ότι τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συγκλίνουν μεταξύ τους.

«Τέντωμα» $\Delta_1$	Μέτρο ελαστικότητας $E^*$ [MPa] Ting	Μέτρο ελαστικότητας $E^*$ [MPa] Hertz
1.000	8.320	8.038
1.235	9.161	9.419
1.530	12.714	13.268

Η προένταση σε συνδυασμό με τη διείδυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των σταθερών παραμέτρων ενός υλικού (πλήθος καταστατικών νόμων με δύο ή τρεις σταθερές παραμέτρους). Οι σταθερές ενός υλικού συνδέονται με άλλες φυσικές ιδιότητες που εμπεριέχουν πληροφορίες για τη μικροδομή του «σώματος» και για τον τρόπο κατασκευής του. Πιο συγκεκριμένα οι σταθερές σχετίζονται με:

- ❖ Τη δομή των μακρομορίων
- ❖ Το άμεσο περιβάλλον των μορίων (βαθμός ενυδάτωσης)
- ❖ Τον τρόπο σύναψης των μορίων (βουλκανισμένα ή όχι)
- ❖ Την ύπαρξη μικρό-σωματιδίων σε διασπορά (κόκκοι από κάρβουνο και πούδρα τάλκης)



### 3.11 Συσχέτιση της εκκεντρότητας με την παραμόρφωση και το αποτύπωμα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Vlassak et al.

**Κ**άνοντας μία γρήγορη ανασκόπηση στο κεφάλαιο που αναφέρεται στην προένταση του ελαστικού δοκιμίου G&T, μπορούμε να δούμε μία αναλυτική μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας του υλικού άλλοτε εφαρμόζοντας τις σχέσεις του Hertz και άλλοτε του Ting. **Με τον όρο «προένταση» ουσιαστικά εννοούμε το μονοαξονικό ελκυσμό του δείγματος, με απώτερο στόχο να εξετάσουμε πιθανές μεταβολές ως προς τις μηχανικές του ιδιότητες.**

Προεντείνοντας λοιπόν, το υπό δοκιμή υλικό κατά τη διεύθυνση  $x_1$  μετράμε το αντίστοιχο «τέντωμα»  $\lambda_1$ . Εξαιτίας της ασυμπίεστότητας του ελαστομερούς υπολογίζουμε, εφαρμόζοντας την ισότητα  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ , την παραμόρφωση  $\lambda_2$  του υλικού στη διεύθυνση  $x_2$ .

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{1/\sqrt{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \quad (3.65)$$

Κάνοντας εφαρμογή της σχέσης των Vlassak et al. (2000), εφόσον γνωρίζουμε τα μεγέθη  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την εκκεντρότητα  $e$ .

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = \frac{A}{B} = \frac{K(e^2) - E(e^2)}{(E(e^2)/(1-e^2)) - K(e^2)} \quad (3.66)$$

Οι συναρτήσεις  $K(e)$  και  $E(e)$  αποτελούν τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτης και δεύτερης τάξης, αντίστοιχα.

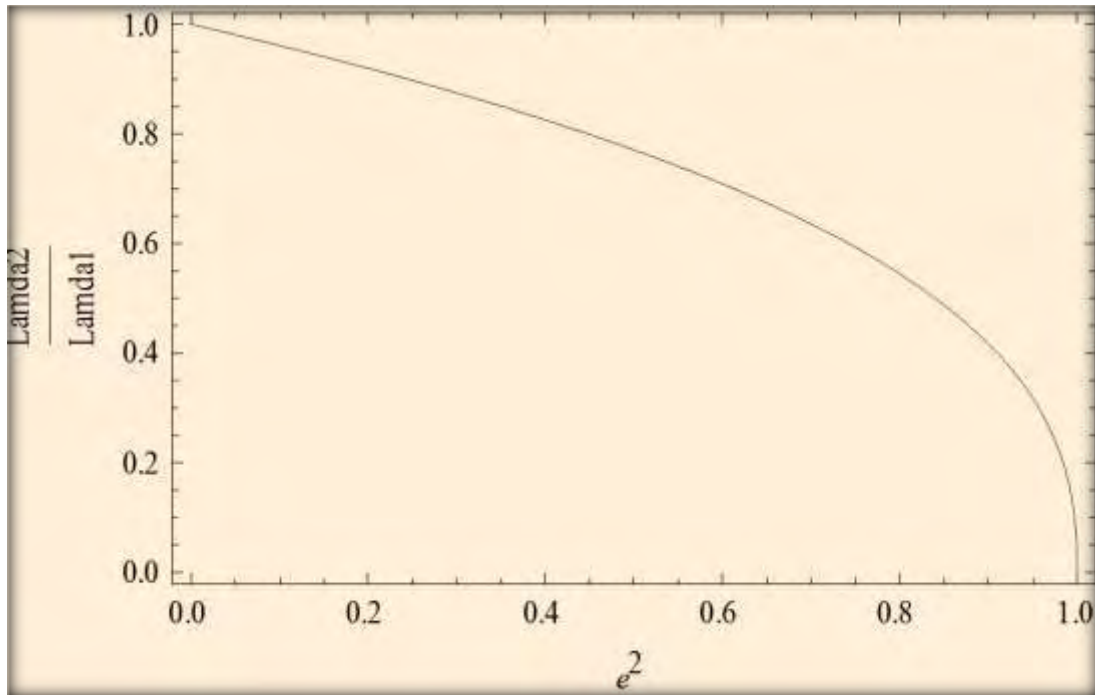
$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} d\theta \quad (3.67)$$

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} (1-e^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (3.68)$$

Γνωρίζοντας λοιπόν, τη σχέση που συνδέει την εκκεντρότητα  $e$  με το λόγο παραμόρφωσης στις δύο κατευθύνσεις του υλικού μπορούμε να σχεδιάσουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Η ισότητα στην οποία αναφερόμαστε έχει την εξής μορφή:

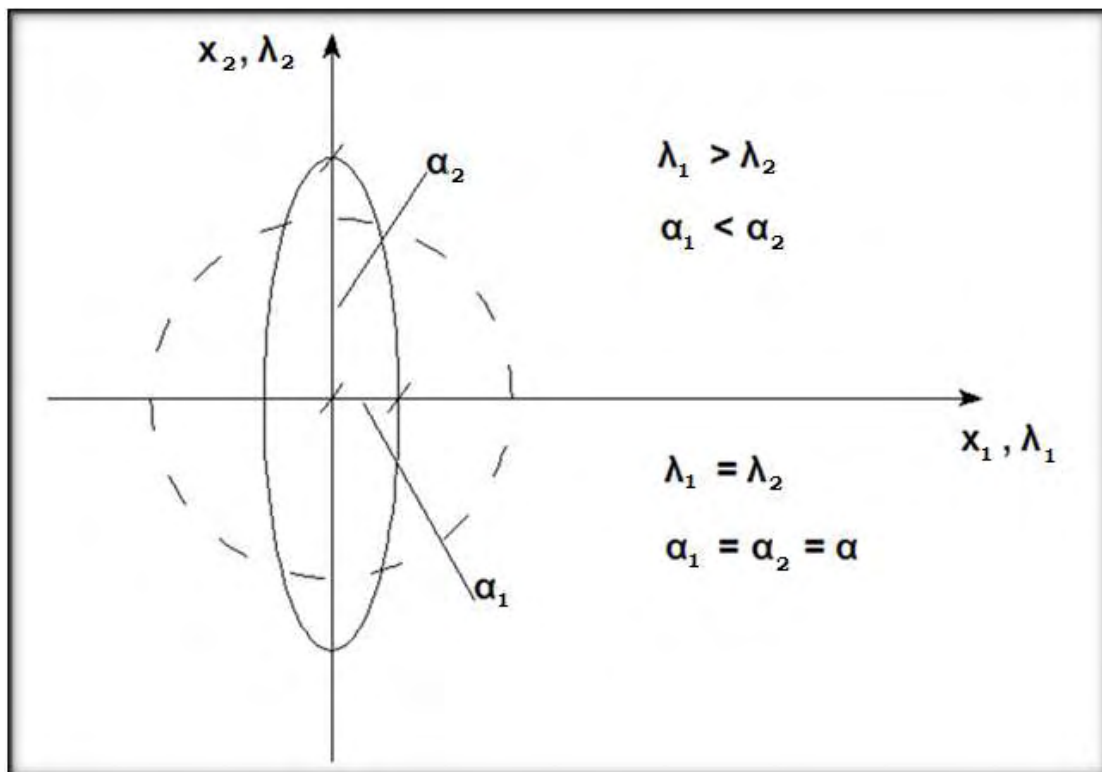
$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = \frac{A}{B} = \frac{K(e^2) - E(e^2)}{(E(e^2)/(1-e^2)) - K(e^2)} \quad (3.69)$$

Η καμπύλη που προκύπτει για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας παρατίθεται παρακάτω.



**Γράφημα 3.11.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του λόγου παραμόρφωσης του δοκιμίου στις κατευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$  και της εκκεντρότητας  $e$ . Στον κατακόρυφο άξονα αντιστοιχεί η ποσότητα  $\lambda_2/\lambda_1$  και στον οριζόντιο το τετράγωνο της εκκεντρότητας  $e^2$ . Παρατηρώντας το διάγραμμα, μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα ότι για  $\lambda_1 = \lambda_2$  (δεν επιβάλλεται αρχική προένταση ή ίσο-διαξονικός ελκυσμός) η εκκεντρότητα μηδενίζεται, ενώ όταν  $e^2=1$  μηδενίζεται ο λόγος  $\lambda_2/\lambda_1$ . **Στην περίπτωση που η εκκεντρότητα γίνει ίση με  $e=1$ , το αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στην επιφάνεια του δείγματος λαμβάνει τη μορφή του κυλίνδρου!** Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει το «τέντωμα» στη διεύθυνση  $x_1$  να είναι πολύ μεγάλο. Ουσιαστικά, το «τέντωμα»  $\lambda_1$  τείνει στο  $\infty$ . Η εκκεντρότητα λοιπόν, δε συνδέεται σε μεγάλο βαθμό με το υλικό, αλλά με το επιβαλλόμενο «τέντωμα», αρκεί η πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  να είναι συνάρτηση τουλάχιστον της πρώτης κύριας αναλλοίωτης του μητρώου  $\mathbf{B}$   $I_1$  εφόσον με αυτό τον τρόπο ενεργοποιείται η ανισοτροπία. Η ανισοτροπία γενικά ενεργοποιείται για μία ποσότητα που περιλαμβάνει  $I_1$  και ποτέ για μία ποσότητα που περιλαμβάνει μόνο  $I_2$ .

Οι παραπάνω διαδοχικοί υπολογισμοί έγιναν με απώτερο στόχο των προσδιορισμό των αποτυπωμάτων  $a_1$  και  $a_2$  της έλλειψης στις κατευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$ , αντίστοιχα. Το αποτύπωμα αυτό, στην επιφάνεια προεντεταμένου ελαστομερούς υλικού, οφείλεται στην εισχώρηση του άκαμπτου σφαιρικού διεισδυτή στο σώμα.

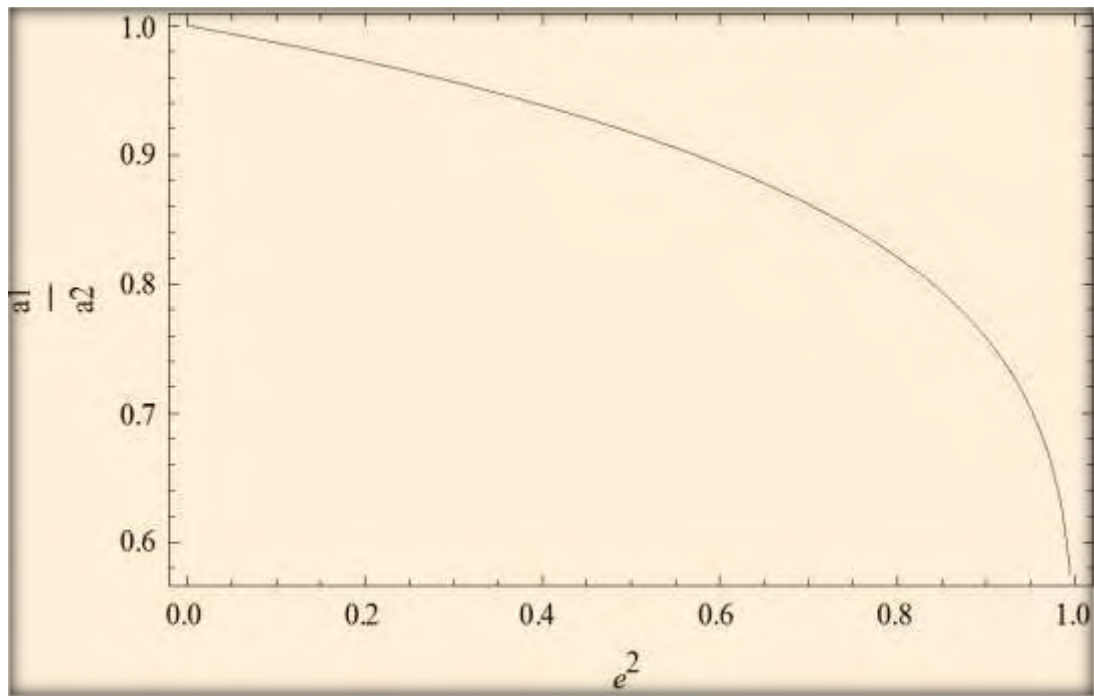


**Σχήμα 3.11.1** Αποτύπωμα σφαιρικού διεισδυτή πάνω σε επιφάνεια προεντεταμένου ελαστομερούς. Στην ανωτέρω εντατική κατάσταση, το δείγμα επιμηκύνεται κατά τη διεύθυνση  $x_1$ , ισχύει δηλαδή η ανισότητα  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Έτσι λοιπόν, για τις ακτίνες που αντιστοιχούν στους άξονες  $x_1$  και  $x_2$  ισχύει ότι  $\alpha_1 < \alpha_2$  (το αποτύπωμα έχει τη μορφή έλλειψης). Αντίθετα, σε περίπτωση που το δοκίμιο είναι απαραμόρφωτο ισχύει η ισότητα  $\lambda_1 = \lambda_2$ , οι ακτίνες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  είναι ίσες και το αποτύπωμα στην επιφάνεια του δοκιμίου έχει κυκλικό σχήμα με ακτίνα  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

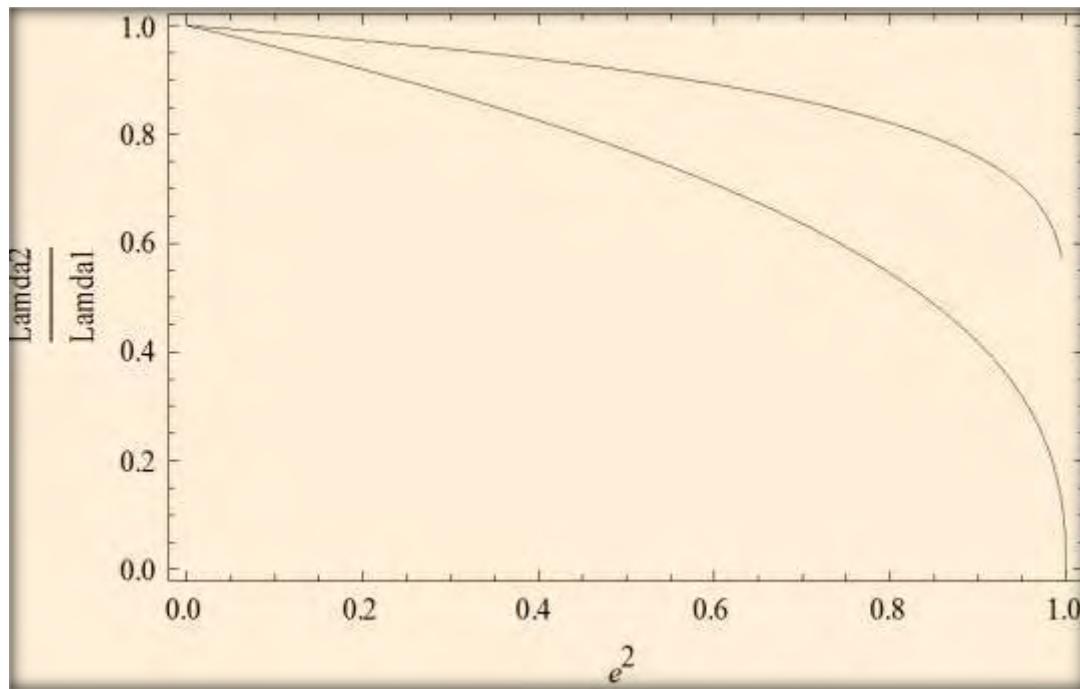
Η σχέση που συνδέει την εκκεντρότητα  $e$  με το λόγο των ακτινών  $\alpha_1 / \alpha_2$  του αποτυπώματος ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = (1 - e^2)^{1/2} \quad (3.70)$$

Η γραφική παράσταση που συνδέει το λόγο των ακτινών του αποτυπώματος στις δύο κάθετες διευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$  με την εκκεντρότητα  $e$ , σύμφωνα με την ισότητα που αναγράφεται παραπάνω, παρατίθενται παρακάτω.



**Γράφημα 3.11.2** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη σχέση μεταξύ του αποτυπώματος του διεισδυτή στην επιφάνεια του προεντεταμένου ελαστομερούς δοκιμίου και της εκκεντρότητας. Στο κατακόρυφο άξονα παριστάνεται ο λόγος των ακτίνων  $a_1/a_2$ , ενώ στον οριζόντιο άξονα το τετράγωνο της εκκεντρότητας. Στην περίπτωση που οι ακτίνες του αποτυπώματος είναι ίσες, η εκκεντρότητα μηδενίζεται και το αποτύπωμα έχει το σχήμα κύκλου με ακτίνα  $a=a_1=a_2$ . Αντίθετα, όταν η εκκεντρότητα λάβει τιμή ίση με τη μονάδα ο λόγος των ακτίνων μηδενίζεται.



**Γράφημα 3.11.3** Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι δύο καμπύλες που περιγράφηκαν προηγουμένως. Ειδικότερα, πάνω και δεξιά βλέπουμε την καμπύλη που συνδέει το αποτύπωμα του διεισδυτή με την εκκεντρότητα, ενώ κάτω και αριστερά παριστάνεται γραφικά η σχέση μεταξύ της παραμόρφωσης και της εκκεντρότητας. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε οι δύο καμπύλες εμφανίζουν παρόμοια μορφή και μάλιστα ταυτίζονται όταν η εκκεντρότητα λαμβάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της.

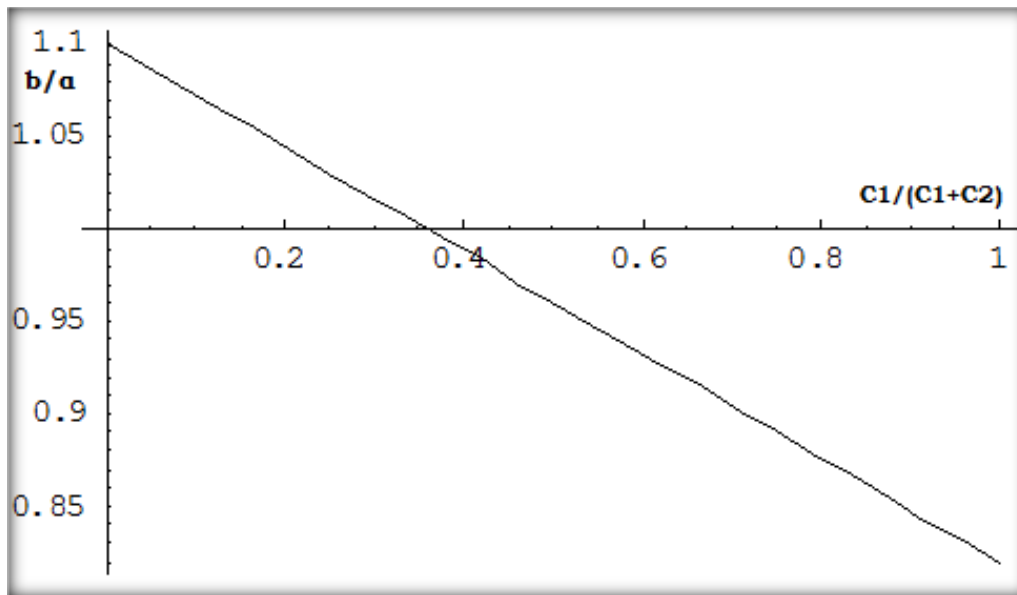
Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε τη σχέση που συνδέει την εκκεντρότητα  $e$  στο προσομοίωμα Neo-Hookean με την εκκεντρότητα σε οποιοδήποτε καταστατικό «μοντέλο».

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e_{N-H}^2}} = \frac{N(\lambda)}{N_{N-H}(\lambda)} \quad (3.71)$$

Όπου με  $N(\lambda)$  συμβολίζεται η διόρθωση του συμμετρικού μέρους για οποιοδήποτε «μοντέλο», με  $e_{N-H}$  η εκκεντρότητα που προκύπτει εφαρμόζοντας το προσομοίωμα Neo-Hookean και με  $N_{N-H}(\lambda)$  η διόρθωση του συμμετρικού μέρους σύμφωνα με το «μοντέλο» Neo-Hookean. Το μέσο «τέντωμα»  $\lambda$  προκύπτει από την ισότητα:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (3.72)$$

Όπου με  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  παριστάνεται η παραμόρφωση στις κατευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$ , αντίστοιχα. Στο διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζεται η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων  $b/a$  και  $C_1/(C_1+C_2)$ . Οι παράμετροι  $a$ ,  $b$  αποτελούν τους ημιάξονες της ελλειπτικής επαφής, ενώ τα  $C_1$ ,  $C_2$  συμβολίζουν τις γνωστές παραμέτρους στο «μοντέλο» του Mooney-Rivlin.



**Γράφημα 3.11.4** Γραφική παράσταση που απεικονίζεται η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων  $b/a$  και  $C_1/(C_1+C_2)$ . Οι παράμετροι  $a$ ,  $b$  αποτελούν τους ημιάξονες της ελλειπτικής επαφής, ενώ τα  $C_1$ ,  $C_2$  συμβολίζουν τις γνωστές παραμέτρους στο «μοντέλο» του Mooney-Rivlin. Ειδικότερα, η παράμετρος  $a$  αντιστοιχεί στο «τέντωμα» κατά τη διεύθυνση  $x_2$ , δηλαδή  $a=\lambda_2$  και  $b=\lambda_1$ . Στην περίπτωση που η σταθερά  $C_1=0$ , ο καταστατικός νόμος των Mooney-Rivlin περιλαμβάνει μόνο την κύρια αναλλοίωτη  $I_2$  του μητρώου **B**. Τα υλικά τέτοιου τύπου χαρακτηρίζονται ως Gels και έχουν έντονη τη συνεισφορά του  $I_2$ . Αντίθετα, όταν η σταθερά  $C_2=0$  το «μοντέλο» των Mooney-Rivlin ταυτίζεται με εκείνο του Neo-Hookean. Ο καταστατικός νόμος περιλαμβάνει μόνο την κύρια αναλλοίωτη  $I_1$ . Τέτοιου τύπου υλικά είναι τα ελαστικά (rubbers).

Όλα τα ανωτέρω γραφήματα που συνδέουν το λόγο της παραμόρφωσης στις δύο διευθύνσεις του υλικού  $\lambda_2/\lambda_1$  με το τετράγωνο της εκκεντρότητας  $e^2$  κατά Vlassak et al. ισχύουν για το «μοντέλο» Neo-Hookean. Σε περίπτωση που επιθυμούμε να διορθώσουμε επιπλέον την εκκεντρότητα  $e$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση με την αναλογία, που αναφέρεται παραπάνω. Τα βήματα για τον υπολογισμό της εκκεντρότητας είναι τα εξής:

- ❖ Από το γράφημα των Vlassak et al. υπολογίζουμε την εκκεντρότητα  $e_{N-H}$  κατά Neo-Hookean, εφόσον γνωρίζουμε το λόγο  $\lambda_2/\lambda_1$ .
- ❖ Στη συνέχεια, διορθώνουμε ως προς την τελική εκκεντρότητα χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e_{N-H}^2}} = \frac{N(\lambda)}{N_{N-H}(\lambda)}$$

### 3.12 Συσχέτιση του μέτρου ελαστικότητας με την εκκεντρότητα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Vlassak et al.

**Η** δοκιμή σκληρομέτρησης οποιουδήποτε υλικού μας δίνει πληροφορίες σχετικά με τα μηχανικά χαρακτηριστικά του. Η μέτρηση υλοποιείται σε υλικά που δεν παρουσιάζουν καμία παραμόρφωση, αλλά και σε δοκίμια που υποβάλλονται σε ελκυσμό ή θλίψη. Στη δεύτερη περίπτωση, όταν δηλαδή ένα δοκίμιο δέχεται εφελκυστικές τάσεις σε μία ή και σε περισσότερες διευθύνσεις εμφανίζεται ένα νέο μέγεθος που επηρεάζει τα αποτελέσματα που αφορούν τις μηχανικές του ιδιότητες. Η εν λόγω ποσότητα καλείται εκκεντρότητα και συμβολίζεται με  $e$ .

Στην περίπτωση μονοαξονικού ή διαξονικού ελκυσμού με  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  οι ακτίνες του αποτυπώματος του διεισδυτή στην επιφάνεια του ελαστομερούς είναι διαφορετικές. Έτσι, το αποτύπωμα έχει το σχήμα της έλλειψης. Για τις εντατικές καταστάσεις που προαναφέρθηκαν, προχωράμε στη διάσπαση δύο ποσοτήτων, μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική που ορίζονται ως εξής:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (3.73)$$

$$\chi = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (3.74)$$

Όπου  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι το «τέντωμα» του δοκιμίου στις αντίστοιχες κατευθύνσεις. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες εντατικές καταστάσεις, στην περίπτωση του ίσο-διαξονικού ελκυσμού με  $\lambda_1 = \lambda_2$ , οι παραπάνω ποσότητες μετατρέπονται ως εξής:

$$\lambda = \lambda$$

$$\chi = 0$$

Το βάθος διείσδυσης  $h$  του άκαμπτου διεισδυτή στην επιφάνεια του ελαστομερούς μπορεί να προσδιοριστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$h = \frac{3P}{8\pi G\alpha} N(\lambda) K(e) (1 + \chi f_0) \quad (3.75)$$

Στην παραπάνω ισότητα με  $h$  και  $P$  συμβολίζονται το βάθος διείσδυσης και η δύναμη του ελατηρίου του οργάνου, αντίστοιχα. Τα μεγέθη αυτά υπολογίζονται σύμφωνα με το πρότυπο ASTM D 2240, ανάλογα με τον τύπο της συσκευής που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Οι ποσότητες  $G$  και  $\alpha$  αντιστοιχούν στο μέτρο διάτμησης και την ακτίνα

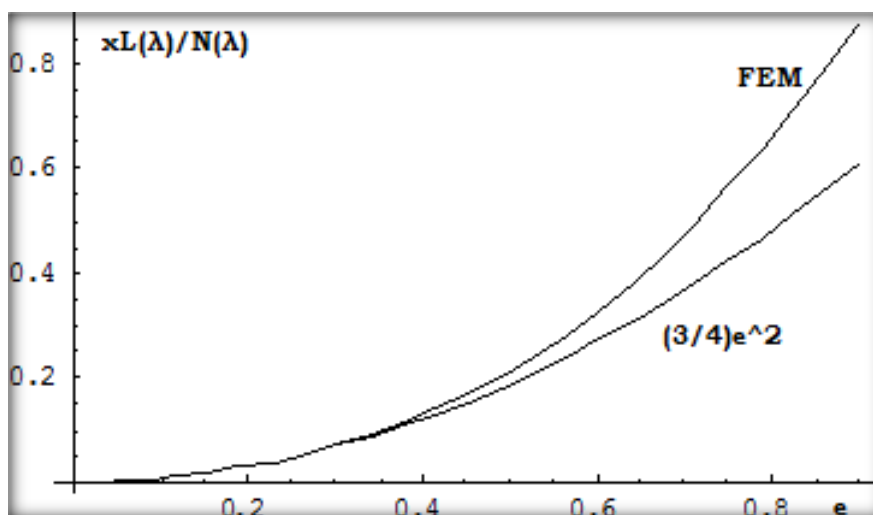
επαφής, που μπορούν να υπολογιστούν εφαρμόζοντας τις μεθοδολογίες του Hertz ή του Ting, στην περίπτωση σφαιρικού διεισδυτή. Με  $N(\lambda)$  συμβολίζεται μία συνάρτηση εξαρτώμενη από το «τέντωμα»  $\lambda$ , ενώ με  $K(e)$  το ελλειπτικό ολοκλήρωμα που εξαρτάται από την εκκεντρότητα. Η ποσότητα  $f_0$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f_0 = \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)} \frac{2E(e) - (2 - e^2)K(e)}{e^2 K(e)} \quad (3.76)$$

Στην παραπάνω σχέση με  $L(\lambda)$  συμβολίζεται η κανονικοποιημένη επιφανειακή ακαμψία. Επιπρόσθετα, για την εκκεντρότητα ισχύει η ισότητα:

$$e^2 = \frac{4}{3} \chi \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)} \quad (3.77)$$

Στη συνέχεια, επιλύουμε την ανωτέρω σχέση ως προς  $\chi \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)}$  και κατασκευάζουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σαν συνάρτηση της εκκεντρότητας. Όπως μπορούμε να δούμε παρακάτω η ανωτέρω εξίσωση κατά Vlassak et al. επαληθεύεται από τη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).



**Γράφημα 3.12.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση της ποσότητας  $\chi \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)}$  με την εκκεντρότητα σύμφωνα με τη θεωρία των Vlassak et al.. Όπως μπορούμε να δούμε παρατηρώντας τις καμπύλες του σχήματος οι θεωρίες των Vlassak et al. και των πεπερασμένων στοιχείων συμπίπτουν.



Συνδυάζοντας τις σχέσεις που αναγράφονται παραπάνω καταλήγουμε σε μία αναλυτικότερη έκφραση του βάθους διείδυσης.

$$h = \frac{3P}{8\pi G^* \alpha} N(\lambda) \left( K(e) + \frac{3}{4} (2E(e) - (2 - e^2) K(e)) \right) \quad (3.78)$$

Η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται στην περίπτωση που το υλικό προεντείνεται κατά τη δοκιμή σκληρομέτρησης. Αντίθετα, όταν το δείγμα βρίσκεται στην αρχική του κατάσταση και είναι απαραμόρφωτο, ισχύει ότι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$ ,  $N(1) = 1$ ,  $e = 0$ ,  $K(0) = E(0) = \pi/2$  και η σχέση που εκφράζει το βάθος διείδυσης λαμβάνει την εξής μορφή:

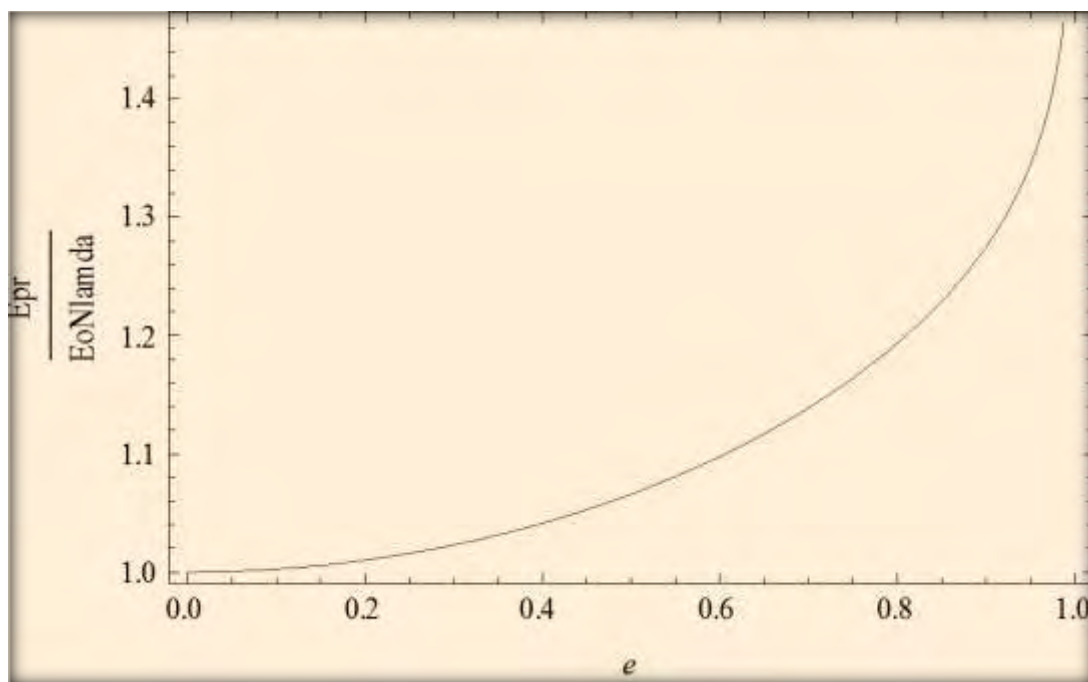
$$h = \frac{3P}{8\pi G \alpha} \frac{\pi}{2} \quad (3.79)$$

**Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξίσωση είναι αντίστοιχη με εκείνη του Hertz!**

Θεωρώντας λοιπόν, ότι το βάθος διείδυσης του αιχμηρού αντικειμένου μέσα στο υπό δοκιμή υλικό είναι ίδιο, είτε το σώμα είναι απαραμόρφωτο είτε είναι προεντεταμένο, εξισώνουμε τις προηγούμενες σχέσεις και προκύπτει τελικά μία εξίσωση που συνδέει το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου δοκιμίου  $E^*$  με το μέτρο ελαστικότητας  $E_0$  για το μη παραμορφωμένο σώμα.

$$E^* = E_0 \frac{2}{\pi} N(\lambda) \left( K(e^2) + \frac{3}{4} (2E(e^2) - (2 - e^2) K(e^2)) \right) \quad (3.80)$$

Η εξίσωση που αναγράφεται παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός διαγράμματος που εκφράζει τη μεταβολή του λόγου του μέτρου ελαστικότητας ενός υλικού, για την παραμορφωμένη ( $E^*$ ) και απαραμόρφωτη ( $E_0$ ) κατάσταση, με την αλλαγή της εκκεντρότητας.



**Γράφημα 3.12.2** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη μεταβολή του λόγου του μέτρου ελαστικότητας ενός υλικού για διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας  $e$ . Με  $E_{pr}$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου δείγματος (ή διαφορετικά  $E^*$ ), ενώ με  $E_0$  το μέτρο ελαστικότητας του ίδιου υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Ο όρος  $N(\lambda)$  (ή αλλιώς  $N(\lambda)$ ) αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση εξαρτώμενη από το μέγεθος  $\lambda$ , όπου το  $\lambda$  παριστάνει το «τέντωμα» του δείγματος κατά τη φάση της προέντασης. Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν το υλικό είναι απαραμόρφωτο ( $e=0$ ), ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας προσεγγίζει τη μονάδα!

Το ανισότροπο «τέντωμα» παρόλο που προκαλεί θεωρητικές δυσκολίες και ζητήματα στην ανάλυση είναι εξαιρετικά χρήσιμο από πειραματικής πλευράς. **Ενδεχομένως, η εκκεντρότητα που είναι το κλειδί της ανάλυσης θα μπορούσε να ληφθεί επιλέγοντας για τις πειραματικές διεργασίες ένα διάφανο διεισδυτή.** Με τον τρόπο αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να απλουστευθεί σημαντικά!

### 3.13 Συσχέτιση του μέτρου ελαστικότητας με την εκκεντρότητα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Willis

Ο Willis (1966) δημοσιεύει ένα άρθρο σχετικό με τη μηχανική των επαφών σε ανισότροπα «σώματα». Το δοκίμιο στο οποίο αναφέρεται χαρακτηρίζεται από άπειρο ημίωρο και το αιχμηρό αντικείμενο που εισχωρεί στην επιφάνεια του υλικού είναι ένας σφαιρικός άκαμπτos διεισδυτής.

**Η επιβολή προέκτασης σε ένα δείγμα προκαλεί ανισότροπη συμπεριφορά στο υλικό.** Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παρουσία εκκεντρότητας στην επιφάνεια του δοκιμίου. Το υλικό, που δε βρίσκεται πλέον στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση, παρουσιάζει διαφορές ως προς τις μηχανικές του ιδιότητες εξαιτίας του ελκυσμού στον οποίο υποβάλλεται.

Στη συνέχεια παρατίθενται μία σειρά σχέσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του ανισότροπου πλέον υλικού όταν σε αυτό επιβάλλονται αρχικές παραμορφώσεις. Αρχικά, παρουσιάζεται η σχέση που συνδέει την ακτίνα επαφής με το βάθος διείσδυσης.

$$\frac{1}{2R_{2c}} = \frac{\delta}{e^2 \alpha_{2c}^2} \left( 1 - \frac{E(e)}{K(e)} \right) \quad (3.81)$$

Όπου με  $R_{2c}$  συμβολίζεται η ακτίνα του διεισδυτή στην αρχική κατάσταση (reference configuration) και με  $\alpha_{2c}$  η ακτίνα επαφής του αποτυπώματος ως προς τη διεύθυνση  $x_2$ . Οι εν λόγω ποσότητες μπορούν να υπολογιστούν από τις ακόλουθες σχέσεις.

$$R_{2c} = R \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2} \quad (3.82)$$

$$\alpha_{2c} = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \quad (3.83)$$

Τα παραπάνω μεγέθη αποκαλούνται ποσότητες κλίμακας. Επιλύοντας την αρχική σχέση ως προς την ακτίνα επαφής λαμβάνουμε την εξής μορφή:

$$\alpha_{2c} = \sqrt{2\delta R_{2c} \frac{K(e) - E(e)}{e^2 K(e)}} \quad (3.84)$$

Η σχέση μεταξύ της δύναμης και του βάθους διείσδυσης γράφεται ως εξής:

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{PK(e) \frac{2}{E^*} \pi}{1-\nu^2 \alpha_{2c}} \quad (3.85)$$

Στην περίπτωση που το δοκίμιο είναι ασυμπίεστο η παραπάνω ισότητα γράφεται ως εξής:

$$\delta = \frac{9}{16} \frac{PK(e) \frac{2}{E^*} \pi}{\alpha_{2c}} \quad (3.86)$$

Όπου με  $E^*$  και  $P$  παριστάνονται το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου ελαστομερούς και η επιβαλλόμενη δύναμη, αντίστοιχα. Συνδυάζοντας τις σχέσεις που εκφράζουν την ακτίνα επαφής και το βάθος διείσδυσης καταλήγουμε στην ισότητα που ακολουθεί:

$$\delta^{3/2} = \frac{9}{16} \frac{P}{E^*} \frac{K(e) \frac{2}{\pi}}{\sqrt{2R_{2c}}} \sqrt{\frac{e^2 K(e)}{K(e) - E(e)}}$$

$$\delta^{3/2} = \frac{9}{16} \frac{P}{E^*} \frac{K(e) \frac{2}{\pi}}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_3}} \sqrt{\frac{e^2 K(e)}{2(K(e) - E(e))}}$$

$$\delta^{3/2} = \frac{9}{16} \frac{P}{E^*} \frac{K(e) \frac{2}{\pi}}{\sqrt{R}} N(\lambda) \sqrt{\frac{e^2 K(e)}{2(K(e) - E(e))}}$$

Επιλύοντας ως προς το μέτρο ελαστικότητας προκύπτει η ακόλουθη μορφή:

$$E^* = \frac{9}{16} \frac{P}{\delta^{3/2}} \frac{K(e) \frac{2}{\pi}}{\sqrt{R}} N(\lambda) \sqrt{\frac{e^2 K(e)}{2(K(e) - E(e))}} \quad (3.87)$$

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας την ανωτέρω ισότητα όταν η εκκεντρότητα είναι μηδέν. Εάν λοιπόν, θέσουμε  $e=0$ ,  $\frac{e^2 K(e)}{K(e) - E(e)} \rightarrow 2$ ,

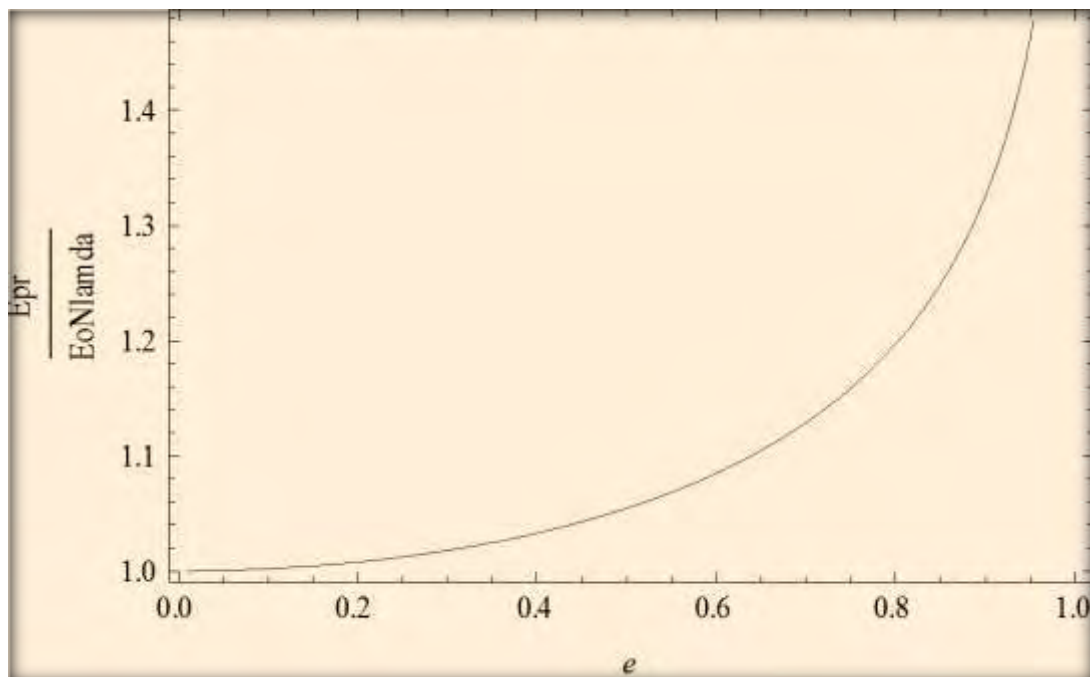
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  και  $K(0) = \frac{\pi}{2}$  η σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E_0 = \frac{9}{16} \frac{P}{\delta^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (3.88)$$

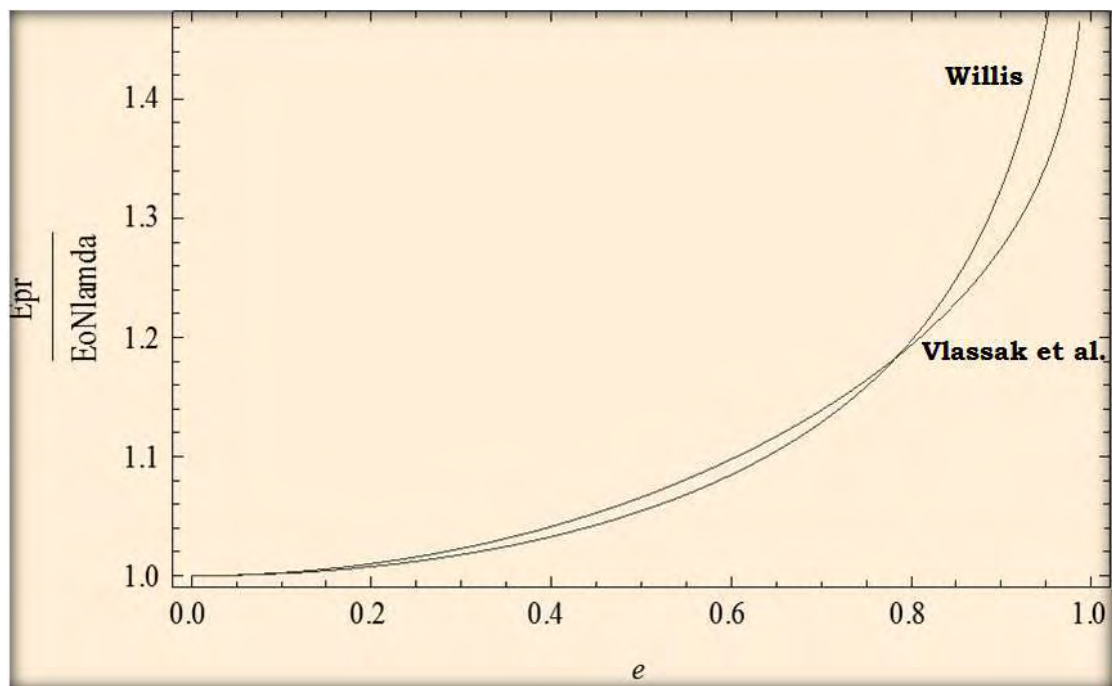
Έτσι λοιπόν, εάν διαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει η ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{E^*}{E_0} = N(\lambda) \frac{2}{\pi} K(e^2) \sqrt{\frac{e^2 K(e^2)}{2(K(e^2) - E(e^2))}} \quad (3.89)$$

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω εξίσωση μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τη σχέση που συνδέει το λόγο των μέτρων ελαστικότητας με την εκκεντρότητα  $e$ .

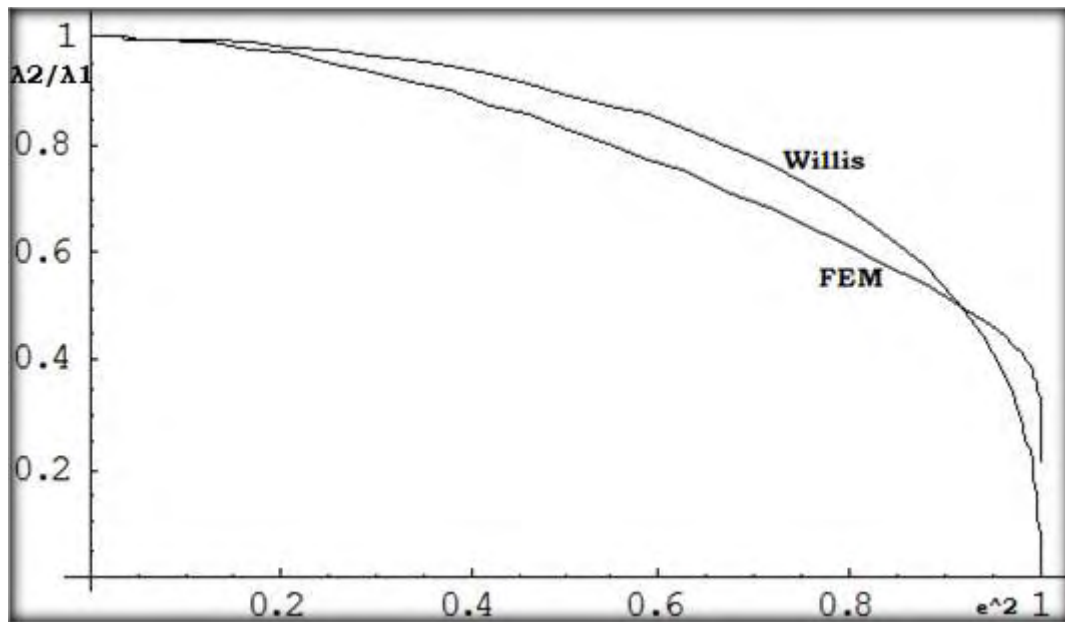


**Γράφημα 3.13.1** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση του λόγου των μέτρων ελαστικότητας με την εκκεντρότητα. Με  $E_{pr}$  (ή διαφορετικά  $E^*$ ) παριστάνεται το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου ελαστομερούς και με  $N(\lambda)$  η διόρθωση ως προς το «τέντωμα»  $\lambda$ . Εάν παρατηρήσουμε την καμπύλη του σχήματος μπορούμε να διακρίνουμε ότι είναι αύξουσα, ενώ για μηδενική εκκεντρότητα το υλικό δεν προεντείνεται και το μέτρο ελαστικότητας του ισούται με την τιμή του μέτρου στην απαραμόρφωτη κατάσταση, δηλαδή  $E^*/E_0=1$ .

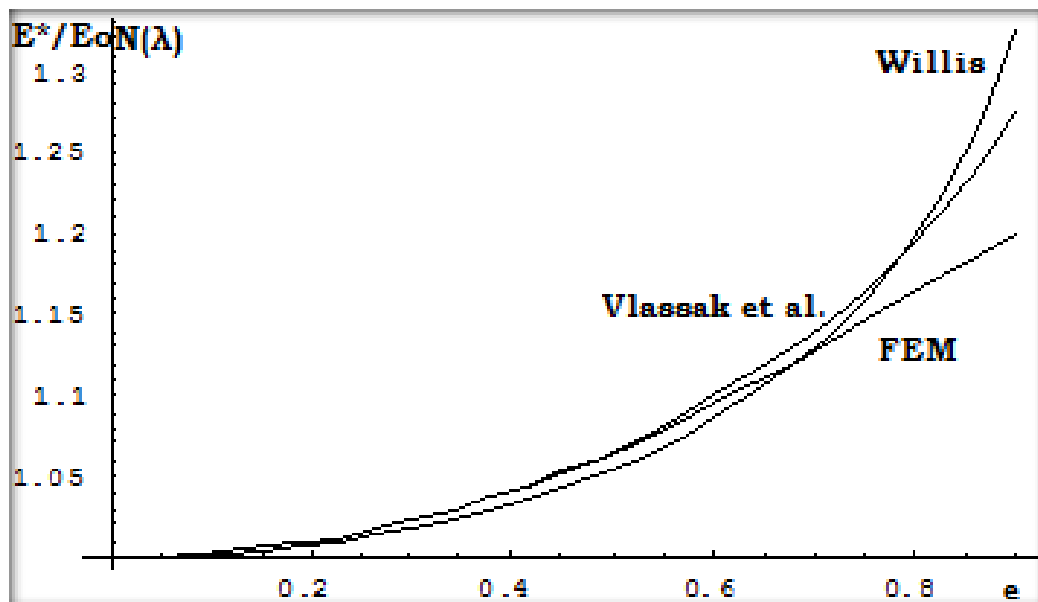


**Γράφημα 3.13.2** Στο ανωτέρω γράφημα παριστάνονται οι καμπύλες που εκφράζουν τη διόρθωση του μέτρου ελαστικότητας προεντεταμένου δείγματος λόγω εκκεντρότητας των Vlassak et al. και Willis. **Εάν παρατηρήσουμε το γράφημα μπορούμε να δούμε ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται.** Επομένως οι δύο μεθοδολογίες μπορούν να εφαρμοστούν δίνοντας ίδια αποτελέσματα.

Όπως και στην περίπτωση των Vlassak et al., θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα που απεικονίζει τη σχέση του λόγου παραμόρφωσης-εκκεντρότητας  $\left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^2 \right\}$  εφαρμόζοντας τη θεωρία του Willis και των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).



**Γράφημα 3.13.3** Γραφική παράσταση που απεικονίζει τη σχέση του «τεντώματος» ( $\lambda_2/\lambda_1$ ) με το τετράγωνο της εκκεντρότητας ( $e^2$ ) σύμφωνα με τις θεωρίες του Willis και των πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Για την κατασκευή της καμπύλης των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκε το «μοντέλο» του neo-Hookean. Για μηδενική εκκεντρότητα ο λόγος του «τεντώματος» στις κατευθύνσεις  $x_1, x_2$  είναι ίσος με τη μονάδα, ενώ για λόγο  $\lambda_2/\lambda_1$  ίσο με μηδέν το τετράγωνο της εκκεντρότητας ισούται με ένα. Εάν παρατηρήσουμε το γράφημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται. Τα πεπερασμένα στοιχεία (FEM) επαληθεύουν τη θεωρία του Willis.



**Γράφημα 3.13.4** Γράφημα που απεικονίζει τις καμπύλες μέτρου ελαστικότητας-εκκεντρότητας κατά Willis, Vlassak et al. και FEM. Εάν παρατηρήσουμε το σχήμα βλέπουμε ότι και οι τρεις καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται, αν και η προσέγγιση κατά Vlassak et al. συμπίπτει περισσότερο με τη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).

### 3.14 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς που υποβάλλεται σε μονοαξονικό ελκυσμό

Σε προηγούμενα κεφάλαια παρατίθενται μεθοδολογίες για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερών υλικών που βρίσκονται σε απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration). Στο σημείο αυτό θα προτείνουμε μία μεθοδολογία προσδιορισμού των μηχανικών ιδιοτήτων σε ελαστομερή υλικά που λαμβάνουν κάποια αρχική μονοαξονική επιμήκυνση (προένταση). Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

- ❖ Αρχικά, πρέπει να διασπάσουμε την ανισότροπη επιρροή του υλικού σε ένα συμμετρικό  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$  και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος  $\chi = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$ , το οποίο είναι υπεύθυνο για την εκκεντρότητα  $e$
- ❖ Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους μέσω του  $N(\lambda)$ , σύμφωνα με το «μοντέλο» που έχουμε επιλέξει
- ❖ Υπολογίζουμε την εκκεντρότητα  $e^2$ , εφόσον γνωρίζουμε το λόγο  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$
- ❖ Υπολογίζουμε τη διόρθωση του αντισυμμετρικού μέρους μέσω της εκκεντρότητας  $e$ , χρησιμοποιώντας τα γραφήματα των Vlassak et al. ή Willis
- ❖ Ο συνδυασμός των διορθώσεων μας οδηγεί τελικά στην ολική διόρθωση  $\frac{E^*}{E_0} = M(e)N(\lambda)$
- ❖ Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην παραμορφωμένη κατάσταση  $E^*$  υπολογίζεται από τις θεωρίες των Stevanovic et al. ή Waters (λαμβάνοντας υπόψη το νέο πάχος του δοκιμίου) και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τελικά το μέτρο ελαστικότητας του ελαστομερούς  $E_0$  εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα.



Στον πίνακα που ακολουθεί περιγράφεται συνοπτικά η ανωτέρω διαδικασία με απώτερο στόχο τη διευκόλυνση στην επίλυση του προβλήματος.

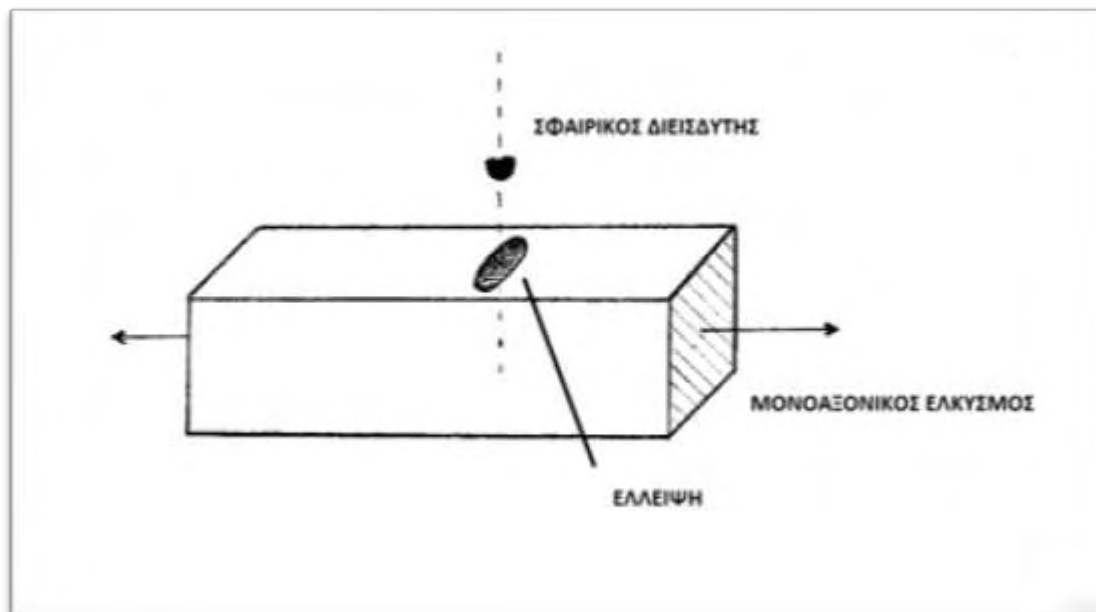
**Πίνακας 3.14.1** Σύνοψη περιγραφή της διαδικασίας υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας σε ελαστομερές υλικό που υποβάλλεται σε μονοαξονικό ελκυσμό.

<b>Μεθοδολογία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς που υποβάλλεται σε μονοαξονική προένταση</b>
Διάσπαση της ανισότροπης επιρροής του υλικού σε ένα συμμετρικό και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος
Υπολογισμός της διόρθωσης του συμμετρικού μέρους μέσω του $N(\lambda)$
Υπολογισμός της εκκεντρότητας $e$
Υπολογισμός της διόρθωσης του αντισυμμετρικού μέρους μέσω του $M(e)$
Συνδυασμός των διορθώσεων $\frac{E^*}{E_0} = M(e)N(\lambda)$
Υπολογισμός του $E_0$ , γνωρίζοντας το $E^*$

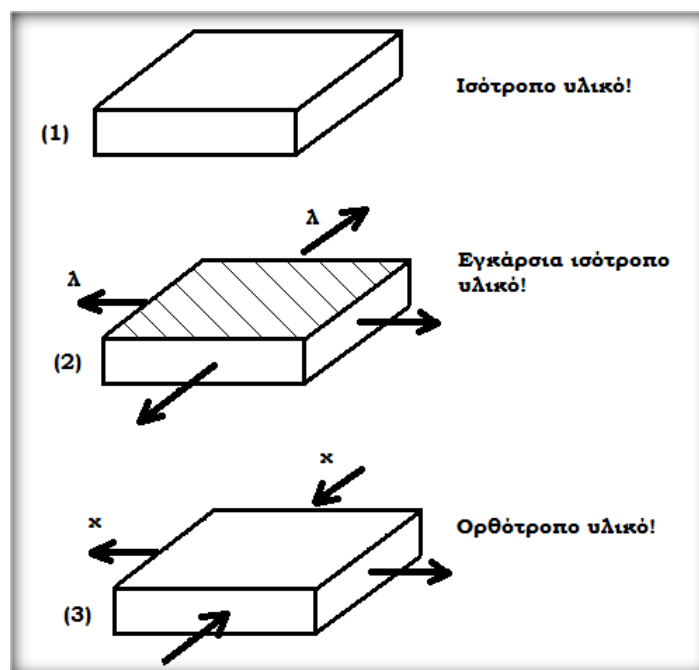
Αρχικά, το μέσο «τέντωμα»  $\lambda$  περιγράφει την επιβολή ίσο-διαξονικού ελκυσμού στο δείγμα, που οδηγεί σε ένα υλικό σαν να είναι εγκάρσια ισότροπο (η επιφάνεια διείδυσης είναι η επιφάνεια ισοτροπίας). Στη συνέχεια, το αντισυμμετρικό μέρος  $x$  περιγράφει την επιβολή μόνο-αξονικού ή διαξονικού ελκυσμού στο δοκίμιο, που οδηγεί τελικά σε ένα υλικό σαν να είναι ορθότροπο. Με τον όρο «ορθότροπο» εννοούμε το υλικό που διαθέτει τρία επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, τα οποία χαρακτηρίζονται από διαφορετικές ιδιότητες.

Στη γραμμική ισοτροπία απαιτούνται δύο ελαστικές σταθερές ( $E_0$ ,  $\nu$ ) για να περιγράψουν το υλικό. Στην εγκάρσια ισοτροπία απαιτούνται πέντε ελαστικές σταθερές, ενώ στην ορθοτροπία έξι (τρία μέτρα ελαστικότητας, ένα σε κάθε κατεύθυνση, και τρεις λόγοι Poisson). Το πλέον ανισότροπο «σώμα» περιγράφεται από 21 ελαστικές σταθερές!

Το ελαστικό «σώμα» στην αρχική του κατάσταση (reference configuration) είναι απαραμόρφωτο και χαρακτηρίζεται ως ισότροπο. **Με την επιβολή μονοαξονικού ελκυσμού (προέντασης) στο υλικό προκύπτει ένα «νέο» ελαστικό «σώμα».** Με τον όρο «νέο» εννοούμε ότι το υλικό μετατρέπεται σε ένα εγκάρσια ισότροπο «σώμα» και το αποτύπωμα του διείδυτη πάνω στην επιφάνεια του δείγματος έχει μορφή έλλειψης, όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω σχήμα.



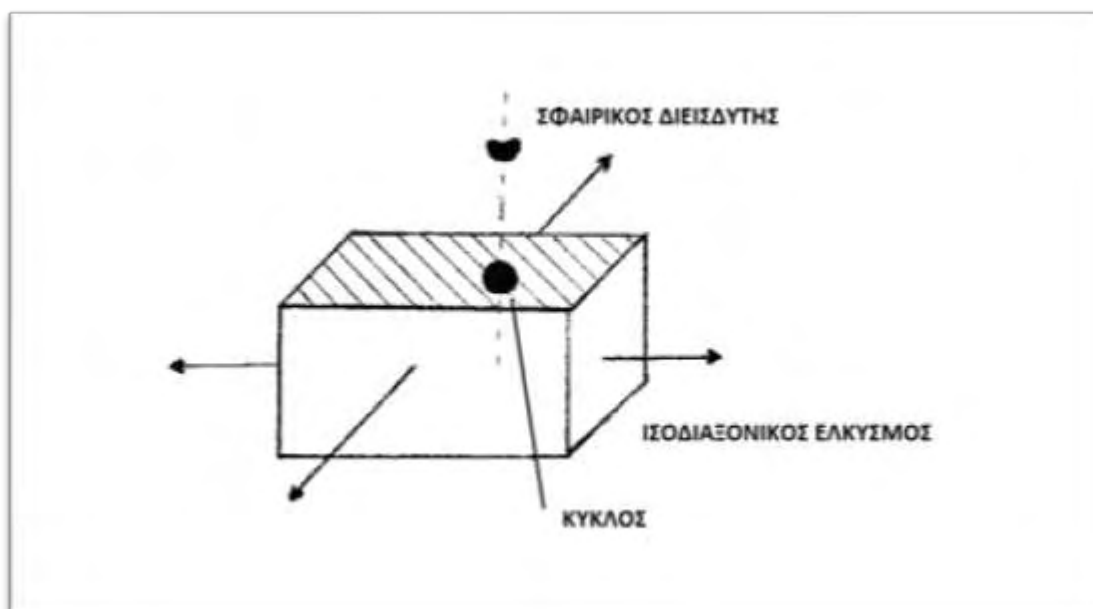
**Σχήμα 3.14.1** Στην παραπάνω εικόνα παριστάνεται σχηματικά ο μονοαξονικός ελκυσμός (προένταση) ενός δείγματος. Καθώς το «σώμα» προεντείνεται εισχωρεί στην επιφάνεια του ένας άκαμπτος σφαιρικός διεισδυτής. Το αποτύπωμα του αιχμηρού αντικειμένου πάνω στην επιφάνεια του δείγματος έχει τη μορφή έλλειψης. Το αρχικά ισότροπο υλικό μετατρέπεται σε ένα «νέο», εγκάρσια ισότροπο δοκίμιο. **Η διαγραμμισμένη κάθετη επιφάνεια δηλώνει την ισοτροπία.**



**Σχήμα 3.14.2** Το «σώμα» στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση χαρακτηρίζεται ως ένα ισότροπο υλικό. Με την επιβολή ίσο-διαξονικού ελκυσμού μετατρέπεται σε ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό, ενώ στη συνέχεια με την πρόσθετη επιβολή ενός μόνο-αξονικού ελκυσμού οδηγούμαστε σε ένα ορθότροπο δείγμα!

### 3.15 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερών που υποβάλλεται σε ίσο-διαξονικό ελκυσμό

Στην περίπτωση του ίσο-διαξονικού ελκυσμού η διαδικασία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας είναι απλούστερη. Το φορτίο που επιβάλλεται στο δείγμα στις διευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$  είναι ίδιο και το «σώμα» είναι ισότροπο στο οριζόντιο επίπεδο, στο επίπεδο δηλαδή που γίνεται η διείδυση. Το αποτύπωμα του διεισδυτή σε αυτή την περίπτωση έχει τη μορφή κύκλου, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 3.15.1** Στην παραπάνω εικόνα παριστάνεται σχηματικά ο ίσο-διαξονικός ελκυσμός (προένταση) ενός δείγματος. Καθώς το «σώμα» εφελκύεται ομοιόμορφα και από τις δύο διευθύνσεις εισχωρεί στην επιφάνεια του ένας άκαμπτος σφαιρικός διεισδυτής. Το αποτύπωμα του αιχμηρού αντικειμένου πάνω στην επιφάνεια του δείγματος έχει τη μορφή κύκλου. Το αρχικά ισότροπο υλικό μετατρέπεται σε ένα «νέο», οριζόντια ισότροπο δοκίμιο. **Η διαγραμμισμένη οριζόντια επιφάνεια δηλώνει την ισοτροπία.**

Η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας στην περίπτωση επιβολής αρχικού ίσο-διαξονικού ελκυσμού είναι η εξής:

- ❖ Αρχικά, πρέπει να διασπάσουμε την ανισότροπη επιρροή του υλικού σε ένα συμμετρικό  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$  και σε ένα αντισυμμετρικό

μέρος  $\chi = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$  , το οποίο είναι υπεύθυνο για την εκκεντρότητα  $e$

❖ Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους μέσω του  $N(\lambda)$ , σύμφωνα με το «μοντέλο» που έχουμε επιλέξει

❖ **Δεν απαιτείται διόρθωση του αντισυμμετρικού μέρους εφόσον το αποτύπωμα του διεισδυτή έχει τη μορφή κύκλου και δεν υπάρχει εκκεντρότητας  $e$**

❖ Η διόρθωση  $N(\lambda)$  ισούται με  $\frac{E^*}{E_0} = N(\lambda)$

❖ Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην παραμορφωμένη κατάσταση  $E^*$  υπολογίζεται από τις θεωρίες των Stevanović et al. ή Waters (λαμβάνοντας υπόψη το νέο πάχος του δοκιμίου) και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τελικά το μέτρο ελαστικότητας του ελαστομερούς  $E_0$  εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα.

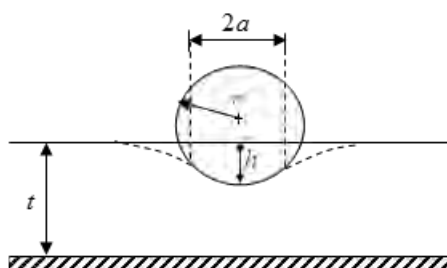
Στον πίνακα που ακολουθεί περιγράφεται συνοπτικά η ανωτέρω διαδικασία με απώτερο στόχο τη διευκόλυνση στην επίλυση του προβλήματος.

**Πίνακας 3.15.1** Σύντομη περιγραφή της διαδικασίας υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας σε ελαστομερές υλικό που υποβάλλεται σε ίσο-διαξονικό ελκυσμό.

<b>Μεθοδολογία υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερούς που υποβάλλεται σε ίσο-διαξονικό ελκυσμό</b>
Διάσπαση της ανισότροπης επιρροής του υλικού σε ένα συμμετρικό και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος
Υπολογισμός της διόρθωσης του συμμετρικού μέρους μέσω του $N(\lambda)$
Διόρθωση $\frac{E^*}{E_0} = N(\lambda)$
Υπολογισμός του $E_0$ , γνωρίζοντας το $E^*$

### 3.16 Προτεινόμενη μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε απαραμόρφωτο και παραμορφωμένο δείγμα σύμφωνα με τις εξισώσεις του Waters και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα κατά Stevanovic et al. (συνδυασμός με θεωρία του Ting)

Σε προηγούμενα κεφάλαια για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας ελαστομερών υλικών χρησιμοποιήθηκαν οι μεθοδολογίες των Hertz και Ting. Στο σημείο αυτό θα προσδιορίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Waters. Στην εν λόγω μέθοδο λαμβάνουμε υπόψη μας το πάχος του δοκιμίου  $t$  που υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση με συσκευή Shore κλίμακας O με ενσωματωμένο σφαιρικό διεισδυτή.



**Σχήμα 3.16.1** Άκαμπτος διεισδυτής σφαιρικού τύπου εισχωρεί σε βάθος  $h$  σε ελαστικό δοκίμιο πάχους  $t$ . Ο διεισδυτής έχει ακτίνα  $r$  και η ακτίνα επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του δείγματος συμβολίζεται με  $a$ . Το «σώμα», όπως διαπιστώνουμε και από το σχήμα, εδράζεται πάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα και να προσδιορίσουμε τελικά το μέτρο ελαστικότητας του υλικού εφαρμόζουμε τις σχέσεις του Waters και ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

- ❖ Μέτρηση της σκληρότητας κατά Shore ( $S_m$ ) με συσκευή κλίμακας O
- ❖ Υπολογισμός του βάθους διείσδυσης  $h$  εφαρμόζοντας την ακόλουθη σχέση:

$$S = \frac{2.5 - h(mm)}{0.025} \quad (3.90)$$

- ❖ Υπολογισμός της ακτίνας επαφής  $a_t$  (ακτίνα επαφής που συμπεριλαμβάνει την επιρροή του υποστρώματος) σύμφωνα με τη σχέση:

$$a_t = \frac{K_2 r^{1/2} h^{1/2}}{K_1^{1/2}} \quad (3.91)$$

Όπου  $r=1.19 \text{ mm}$ ,  $K_1 = (81/256)^{1/3}$ ,  $K_2 = (9/16)^{1/3}$ .

- ❖ Υπολογισμός του βάθους διείσδυσης  $h_\infty$  (για υπόστρωμα που χαρακτηρίζεται από άπειρο πάχος) από την εκθετική σχέση του Waters:

$$\frac{h}{h_\infty} = 1 - \exp\left[-\frac{At}{a_t}\right] \quad (3.92)$$

Όπου με  $A=0.41$  παριστάνεται ένας σταθερός συντελεστής και με  $t$  το πάχος του δείγματος που είναι μετρήσιμο. Στην περίπτωση που το δοκίμιο βρίσκεται στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση το πάχος  $t$  είναι το αρχικό πάχος του υλικού, ενώ όταν το «σώμα» υποβάλλεται σε ελκυσμό η ποσότητα αυτή μεταβάλλεται και λαμβάνει μία νέα τιμή.

- ❖ Υπολογισμός της δύναμης  $P$  του εσωτερικού ελατηρίου, για την περίπτωση σκληρόμετρου Shore κλίμακας  $O$  σύμφωνα με το πρότυπο ASTM D 2240, από τη σχέση:

$$P = 0.55 + 3(2.5 - h) \quad (3.93)$$

- ❖ Υπολογισμός του αρχικού μέτρου ελαστικότητας του «σώματος»  $E_0$  (με  $E^*$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας στην παραμορφωμένη κατάσταση) σύμφωνα με τη σχέση του Waters:

$$h_\infty = \frac{K_1 P^{2/3}}{E_o^{2/3} r^{1/3}} \quad (3.94)$$

Στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι σε περίπτωση που ισχύει η ανισότητα  $t/a_t < 8$  παρουσιάζεται σφάλμα 5% στη μεθοδολογία του Waters.

Έτσι λοιπόν, αφού ακολουθήσαμε την ανωτέρω διαδικασία υπολογίσαμε το μέτρο ελαστικότητας ελαστομερών δοκιμίων σύμφωνα με τη μέθοδο του Waters και συγκρίναμε τα αποτελέσματα αυτά με τα αντίστοιχα της μεθόδου του Ting (Stevanovic et al.). Τα αποτελέσματα παριστάνονται συνοπτικά στον πίνακα που ακολουθεί:

**Πίνακας 3.16.1** Στον παραπάνω πίνακα παριστάνονται τα ελαστικά δοκίμια και οι μηχανικές τους ιδιότητες σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Waters. **Μπορούμε να διακρίνουμε παρατηρώντας τα αποτελέσματα που αφορούν το μέτρο διάτμησης  $G_0$  ότι οι μεθοδολογίες των Waters και Stevanovic et al. (με χρήση των σχέσεων του Ting) σχεδόν ταυτίζονται, χωρίς να έχουμε σημαντικές αποκλίσεις στα αποτελέσματα.** Παρατηρώντας και την τελευταία στήλη του πίνακα βλέπουμε ότι στην μεθοδολογία του Waters δεν εμφανίζονται σφάλματα στους υπολογισμούς σε αυτήν την περίπτωση. **Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς λήφθηκε σταθερά  $A = 0.41$ .**

Δοκίμιο	$S_m$	$h$ [mm]	$a_t$ [mm]	$h_\infty$ [mm]	$P$ [N]	$E_0$ [MPa] Waters	$G_0$ [MPa] Waters	$G_0$ [MPa] Ting	$t/a_t < 8$ 5% error
Rubber $t=11m$ m	79.375	0.516	0.783	0.517	6.503	9.014	3.005	3.115	14.043
White $t=10m$ m	45.670	1.358	1.271	1.414	3.975	1.218	0.406	0.487	7.866
Yellow $t=10m$ m	54.170	1.146	1.168	1.181	4.613	1.853	0.618	0.717	8.564
Blue $t=10m$ m	60.670	0.983	1.082	1.006	5.100	2.607	0.869	0.982	9.245
Green $t=10m$ m	71.000	0.725	0.929	0.734	5.875	4.818	1.606	1.743	10.766
Red $t=10m$ m	78.670	0.533	0.796	0.536	6.450	8.467	2.822	2.979	12.553
Brown $t=10m$ m	84.330	0.392	0.683	0.393	6.875	14.404	4.801	4.988	14.646
Black $t=10m$ m	89.600	0.260	0.556	0.260	7.270	28.249	9.417	9.631	17.978
Blue xo $t=10m$ m	65.680	0.858	1.010	0.873	5.476	3.461	1.154	1.269	9.897

Στον παραπάνω πίνακα χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή της μεθόδου Waters δοκίμια διαφόρων χρωμάτων που ανήκουν στην κατηγορία των ελαστομερών. Στην συνέχεια παρατίθενται δύο πίνακες στους οποίους απεικονίζονται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας του ελαστικού G&T, με την μεθοδολογία που περιγράφηκε παραπάνω, όταν το υλικό είναι απαραμόρφωτο καθώς και όταν υποβάλλεται σε μονοαξονικό ελκυσμό. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι με την επιβολή της προέντασης σε ένα δείγμα αυξάνεται η ακαμψία του υλικού, δηλαδή αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας. **Επιπρόσθετα τα αποτελέσματα επηρεάζονται ως ένα βαθμό και από το είδος του υποστρώματος πάνω στο οποίο επικάθεται το δείγμα.** Αν δηλαδή η σκληρότητα που παρουσιάζει το υπόστρωμα είναι σημαντικά διαφορετική από εκείνη του

δείγματος τότε η επιρροή αυτή εισάγεται στα αποτελέσματα της δοκιμής και εμφανίζονται σφάλματα στις μετρήσεις.

**Πίνακας 3.16.2** Στον ανωτέρω πίνακα παριστάνεται το ελαστικό δοκίμιο G&T. Για τη μέτρηση της σκληρότητας του δείγματος με συσκευή Shore τύπου O επιλέχθηκε μία ή και περισσότερες στρώσεις του υλικού, ενώ άλλοτε το δείγμα τοποθετήθηκε πάνω σε άλλο ελαστικό με παρόμοιες ιδιότητες και άλλοτε πάνω σε σκληρό, άκαμπτο υπόστρωμα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται παραπάνω καθώς και το υπολογισμένο μέτρο ελαστικότητας σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Waters. **Το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού είναι υπολογισμένο και ίσο με 7.50 MPa.** Η μεθοδολογία αυτή φαίνεται να προσεγγίζει αρκετά καλά το αποτέλεσμα αυτό κυρίως στην περίπτωση πολλών στρωμάτων του υλικού, περιορίζοντας την επιρροή του άκαμπτου υποστρώματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι εξαιτίας του μικρού λόγου  $t/a_t$  παρουσιάζονται σφάλματα της τάξεως του 5%. **Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς λήφθηκε σταθερά  $A = 0.41$ .**

Δοκίμιο	$S_m$	$E_o$ [MPa] Waters
Rubber G&T (t=1.89 mm πάνω σε Rubber πάχους t=11 mm)	77.625	7.835
Rubber G&T (t =1.89 mm πάνω σε σκληρό υπόστρωμα)	81.000	5.383
Rubber G&T (t=3.78 mm πάνω σε σκληρό υπόστρωμα)	79.170	7.104
Rubber G&T (t=5.67 mm πάνω σε σκληρό υπόστρωμα)	75.830	6.196
Rubber G&T (t=3.78 mm πάνω σε συσκευή προέντασης)	77.750	6.228
Rubber G&T (t=7.56 mm πάνω σε σκληρό υπόστρωμα)	75.330	6.336
Rubber G&T (t=9.45 mm πάνω σε σκληρό υπόστρωμα)	75.500	6.576

**Πίνακας 3.16.3** Εφαρμογή της μεθοδολογίας του Waters για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένα δοκίμια. Επιλέχθηκε το υλικό G&T. Αρχικά μία και στη συνέχεια δύο στρώσεις του ελαστικού G&T. Στην περίπτωση των δύο στρώσεων συνολικού πάχους 3.78 χιλιοστών ο μονοαξονικός ελκυσμός εφαρμόστηκε μόνο στην ανώτερη στρώση. **Η μεθοδολογία του Waters παρουσιάζει συνέπεια όσον αφορά τα αποτελέσματα που προκύπτουν, δίνοντας μικρά «νούμερα» σε σχέση με τα αντίστοιχα κατά Ting.** Σφάλματα παρουσιάζονται και σε αυτή την περίπτωση όπως βλέπουμε στον πίνακα. Όσο μεγαλύτερη προένταση επιβάλλουμε στο δείγμα τόσο αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του κάνοντας πιο άκαμπτο το δοκίμιο. Με την αφαίρεση της επιβαλλόμενης δύναμης το υλικό επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση. **Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς λήφθηκε σταθερά  $A = 0.41$ .**



Δοκίμιο	$\lambda_1$	$S_m$	$t_{final}$ [mm]	$h$ [mm]	$a_t$ [mm]	$h_o$ [mm]	$P$ [N]	$E^*$ [MPa]	$t/a_t < 8$ 5% error
G&T $t=1.89$ mm	1.212	83.830	1.716	0.404	0.694	0.634	6.837	6.979	2.474
G&T $t=1.89$ mm	1.072	83.500	1.823	0.413	0.701	0.629	6.813	7.043	2.602
G&T $t=3.78$ mm	1.235	80.000	3.589	0.500	0.771	0.587	6.550	7.507	4.653
G&T $t=3.78$ mm	1.530	83.330	3.417	0.417	0.704	0.483	6.799	10.452	4.852

Στο σημείο αυτό, έχοντας περιγράψει αναλυτικά τη μεθοδολογία του Waters για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας, θα συγκρίνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα του δοκιμίου G&T με τα αντίστοιχα που προέρχονται από τις επιλύσεις κατά Stevanovic et al.. Για το λόγο αυτό κατασκευάσαμε τους πίνακες που ακολουθούν:

**Πίνακας 3.16.4** Ταυτόχρονη παράθεση των αποτελεσμάτων του μέτρου ελαστικότητας για το ελαστικό δοκίμιο G&T στην απαραμόρφωτη κατάσταση ( $\lambda_1 = 1$ ) και στην παραμορφωμένη κατάσταση ( $\lambda_1 > 1$ ). Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων εφαρμόζονται οι μεθοδολογίες των Stevanovic et al. και Waters. Σε αυτή την περίπτωση ο σταθερός συντελεστής A λαμβάνεται ίσος με 0.41. Παρατηρώντας λοιπόν τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι οι δύο μεθοδολογίες είναι συνεπής όσον αφορά τα αποτελέσματα. Πράγματι το «σώμα» στην αρχική του κατάσταση είναι πιο εύκαμπτο συγκριτικά με όταν έχει υποστεί κάποια αρχική προένταση. Η μεθοδολογία των Stevanovic et al. δίνει μεγαλύτερα «νούμερα» σε σχέση με τα αντίστοιχα του Waters. **Στην περίπτωση επαρκούς πάχους του δοκιμίου (δύο στρώσεις) και επιβολής «μεγάλης» προέντασης τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συγκλίνουν περισσότερο.** Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς λήφθηκε σταθερά  $A = 0.41$ .

Πάχος $t$ δοκιμίου G&T [mm]	$\lambda_1$	$E_o$ [MPa] Stevanovic et al. Χωρίς διόρθωση πάχους	$E^*$ [MPa] Stevanovic et al. Με διόρθωση πάχους	$E_o$ [MPa] Waters $A=0.41$ Χωρίς διόρθωση πάχους	$E^*$ [MPa] Waters $A=0.41$ Με διόρθωση πάχους
1.890	1.072	12.096	14.825	5.383	7.043
1.890	1.212	12.096	15.675	5.383	6.979
3.780	1.235	8.320	9.161	6.228	7.507

3.780	1.530	8.320	12.714	6.228	10.452
-------	-------	-------	--------	-------	--------

**Πίνακας 3.16.5** Παρόμοιος πίνακας με αυτόν που παρατίθεται παραπάνω. Απεικονίζονται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας για το υλικό G&T εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία των Stevanovic et al. αρχικά και την τροποποιημένη μεθοδολογία του Waters στη συνέχεια. Η τροποποιημένη μεθοδολογία του Waters είναι απλούστερη σε σχέση με εκείνη των Stevanovic et al.. Στον ανωτέρω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα των μεθόδων έχοντας κάνει μία μικρή τροποποίηση στη σταθερά A. **Σε αυτή την περίπτωση λάβαμε  $A = 1.10$ , δηλαδή εφαρμόσαμε μία τροποποιημένη μέθοδο Waters, όμως τα αποτελέσματα που προέκυψαν σύμφωνα με τον πίνακα δεν είναι ικανοποιητικά. Έτσι λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μεθοδολογία του Waters για την περίπτωση  $A=0.41$  οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα.**

Πάχος t δοκιμίου G&T [mm]	$\lambda_1$	$E_0$ [MPa] Stevanovic et al. Χωρίς διόρθωση πάχους	$E^*$ [MPa] Stevanovic et al. Με διόρθωση πάχους	$E_0$ [MPa] Waters $A=1.10$ Χωρίς διόρθωση πάχους	$E^*$ [MPa] Waters $A=1.10$ Με διόρθωση πάχους
1.890	1.072	12.096	14.825	9.465	12.139
1.890	1.212	12.096	15.675	9.465	12.386
3.780	1.235	8.320	<b>9.161</b>	7.859	<b>9.467</b>
3.780	1.530	8.320	<b>12.714</b>	7.859	<b>12.939</b>

### 3.16.1 Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας σε προεντεταμένο δείγμα εφαρμόζοντας τις καμπύλες Vlassak et al. και Willis

Σε προηγούμενα κεφάλαια υπολογίστηκε το μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού G&T, σύμφωνα με τις σχέσεις που προτείνουν οι Stevanovic et al. και Waters, όταν αυτό βρίσκεται στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση. Ακολουθώντας τις ίδιες μεθοδολογίες μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, όταν

αυτό προεντείνεται, λαμβάνοντας υπόψη το τελικό πάχος του δοκιμίου που εξετάζουμε. Γνωρίζοντας λοιπόν, το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου υλικού  $E^*$  θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του απαραμόρφωτου ελαστικού  $E_0$  χρησιμοποιώντας τις καμπύλες των Vlassak et al. αρχικά και Willis στη συνέχεια.

Το «μοντέλο» που επιλέχθηκε υποβλήθηκε σε μονοαξονική προένταση ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Για το λόγο αυτό το «τέντωμα» θα διασπαστεί σε ένα συμμετρικό  $\lambda$  και σε ένα αντισυμμετρικό μέρος  $x$ . Η ποσότητα  $\lambda$  χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του σφάλματος  $N(\lambda)$  σύμφωνα με την καμπύλη του «μοντέλου» neo-Hookean. Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει το «τέντωμα»  $\lambda_2$  γνωρίζουμε το λόγο  $\lambda_2 / \lambda_1$  και έτσι από το διάγραμμα του Vlassak et al. μπορούμε να βρούμε την εκκεντρότητα  $e^2$ . Αφού γνωρίζουμε την εκκεντρότητα  $e$  μπορούμε να προσδιορίσουμε το σφάλμα  $M(e)$  χρησιμοποιώντας μία δεύτερη καμπύλη του Vlassak et al. ή την αντίστοιχη του Willis. Οι καμπύλες αυτές απεικονίζονται σε προηγούμενα κεφάλαια και είναι σχεδόν ταυτόσημες. Σύμφωνα λοιπόν, με προηγούμενα κεφάλαια το μέτρο ελαστικότητας λόγω αρχικής προέντασης του δείγματος δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{E^*}{E_0} = M(e)N(\lambda) \quad (3.95)$$

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω εφαρμόστηκε για όλες τις περιπτώσεις προέντασης που υποβλήθηκε το δοκίμιο. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναγράφονται αναλυτικά παρακάτω (στη μέθοδο Waters λήφθηκαν τα αποτελέσματα για σταθερό συντελεστή  $A=0.41$ ):

**$\lambda_1=1.072$**

$\lambda=1.019$

$N(\lambda)=1.010$

$\lambda_2=0.966$

$\lambda_2 / \lambda_1=0.901$

$e^2=0.27$

$e=0.519$

$M(e)=1.08$  (**Vlassak et al.**)

$E^*=1.091E_0$

**Waters:**  $E_0=7.043/1.091=6.456$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=14.825/1.091=13.588$  MPa

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε μεγάλες αποκλίσεις στα αποτελέσματα των Stevanovic et al. συγκριτικά με το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του δείγματος.

$M(e)=1.07$  (**Willis**)

$E^*=1.081E_0$

**Waters:**  $E_0=7.043/1.081=6.515$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=14.825/1.081=13.714$  MPa

**$\lambda_1=1.212$**

$\lambda=1.060$

$N(\lambda)=1.027$

$\lambda_2=0.908$

$\lambda_2/\lambda_1=0.75$

$e^2=0.55$

$e=0.742$

$M(e)=1.18$  (**Vlassak et al.**)

$E^*=1.212E_0$

**Waters:**  $E_0=6.979/1.212=5.758$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=15.675/1.212=12.933$  MPa

Παρατηρώντας τα ανωτέρω αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το αποτέλεσμα κατά Waters προσεγγίζει καλύτερα το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού G&T που ισούται με 7.50 MPa.

$M(e)=1.17$  (**Willis**)

$E^*=1.202E_0$

**Waters:**  $E_0=5.806$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=13.041$  MPa

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των Vlassak et al. και Willis σχεδόν ταυτίζονται. Επομένως, οποιαδήποτε μεθοδολογία και αν επιλέξουμε τα αποτελέσματα που θα λάβουμε θα είναι ικανοποιητικά.

**$\lambda_1=1.235$**

$\lambda=1.067$

$N(\lambda)=1.030$

$\lambda_2=0.899$

$\lambda_2/\lambda_1=0.728$

$e^2=0.64$

$e=0.80$

$M(e)=1.19$  (**Vlassak et al.**)

$E^*=1.226E_0$

**Waters:**  $E_0=7.507/1.226=6.123$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=9.161/1.226=7.472$  MPa

$M(e)=1.18$  (**Willis**)

$E^*=1.215E_0$

**Waters:**  $E^*=7.507/1.215=6.179$  MPa

**Stevanovic et al.:**  $E_0=9.161/1.215=7.539$  MPa

$$\lambda_1=1.530$$

$$\lambda=1.169$$

$$N(\lambda)=1.074$$

$$\lambda_2=0.808$$

$$\lambda_2/\lambda_1=0.528$$

$$e^2=0.83$$

$$e=0.911$$

$$M(e)=1.28 \text{ (Vlassak et al.)}$$

$$E^*=1.375E_0$$

$$\textbf{Waters: } E_0=10.452/1.375=7.601 \text{ MPa}$$

$$\textbf{Stevanovic et al.: } E_0=12.714/1.375=9.247 \text{ MPa}$$

$$M(e)=1.33 \text{ (Willis)}$$

$$E^*=1.428E_0$$

$$\textbf{Waters: } E_0=10.452/1.428=7.319 \text{ MPa}$$

$$\textbf{Stevanovic et al.: } E_0=12.714/1.428=8.903 \text{ MPa}$$

**Μελετώντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η μεθοδολογία του Waters προσεγγίζει καλύτερα το πρόβλημα και οδηγεί σε μέτρα ελαστικότητας που εμφανίζουν πολύ μικρές αποκλίσεις συγκρινόμενα με το πραγματικό που ισούται με 7.50 MPa. Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς σαν  $E_0$  επιλέχθηκε το μέτρο ελαστικότητας του σώματος στην απαραμόρφωτη κατάσταση χρησιμοποιώντας το αρχικό πάχος του δοκιμίου.**

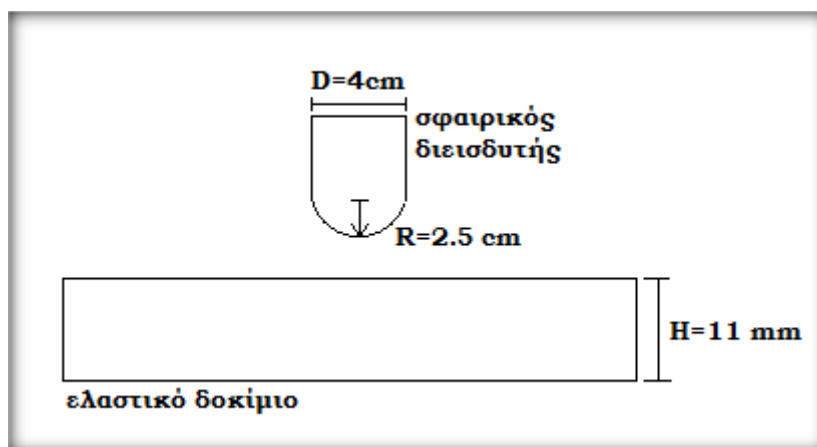
**Πίνακας 3.16.1.1** Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας προεντεταμένων δοκιμίων υπολογισμένα με τις μεθοδολογίες των Waters και Stevanovic et al., που περιγράφηκαν αναλυτικά προηγουμένως. Στη συνέχεια, υπολογίστηκε το μέτρο ελαστικότητας του απαραμόρφωτου ελαστικού εφαρμόζοντας τις θεωρίες των Vlassak et al. και Willis. **Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις καμπύλες Vlassak et al. και Willis σχεδόν ταυτίζονται.** Παρατηρώντας με προσοχή τον πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μεθοδολογία του Waters προσεγγίζει ικανοποιητικά το πρόβλημα οδηγώντας σε αποτελέσματα πολύ κοντά στο πραγματικό ζητούμενο, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού δείγματος. Για τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  χρησιμοποιήθηκε το «μοντέλο» του neo-Hookean. Το γράφημα που περιγράφει το εν λόγω προσομοίωμα αντιστοιχεί σε μία αύξουσα καμπύλη, που αναφέρεται σε προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τα πειραματικά αποτελέσματα. **Για το λόγο αυτό προτείνεται το «μοντέλο» του Yeoh για τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους, που προσομοιάζει καλύτερα ελαστικά υλικά τύπου G&T!**

$\lambda_1$	<b>E* [MPa] Waters (A=0.41)</b>	<b>E<sub>o</sub> [MPa] Vlassak et al.</b>	<b>E<sub>o</sub> [MPa] Willis</b>
	<b>E* [MPa] Stevanovic et al.</b>		
<b>1.072</b>	7.043	6.456	6.515
	14.825	13.588	13.714
<b>1.212</b>	6.979	5.758	5.806
	15.675	12.933	13.041
<b>1.235</b>	7.507	6.123	6.179
	9.161	7.472	7.539
<b>1.530</b>	10.452	7.601	7.319
	12.714	9.247	8.903

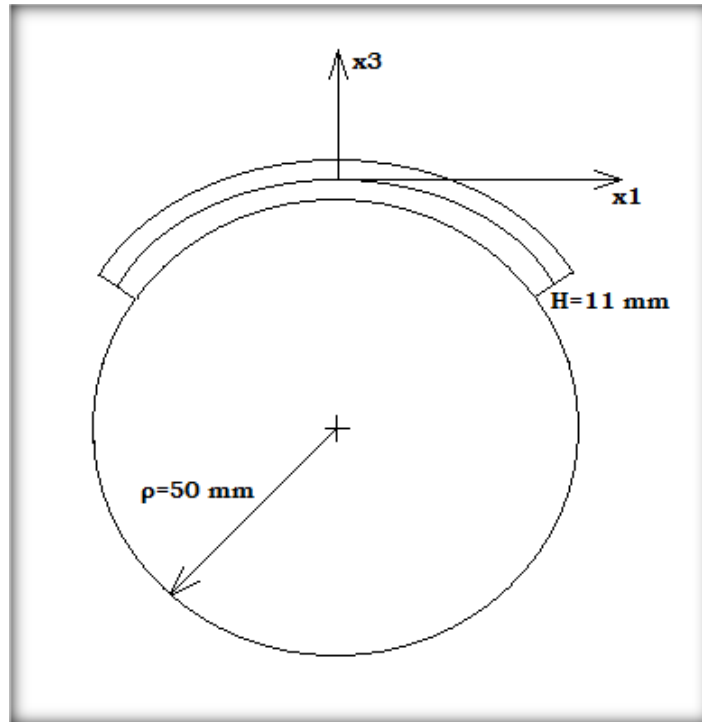
### 3.17 Κάμψη ελαστικού δοκιμίου πάνω σε χαλύβδινο κύλινδρο

Ένα αρχικά ισότροπο «σώμα» μετατρέπεται σε ανισότροπο όταν επιβληθεί σε αυτό κάποια αρχική μονοαξονική προένταση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η επαφή μεταξύ του άκαμπτου σφαιρικού διεισδυτή και του δείγματος να λαμβάνει τη μορφή έλλειψης εμφανίζοντας κάποια εκκεντρότητα. Αντίθετα, στην περίπτωση που το δοκίμιο είναι ισότροπο η εικόνα που βλέπουμε κατά την επαφή των δύο σωμάτων έχει τη μορφή κύκλου.

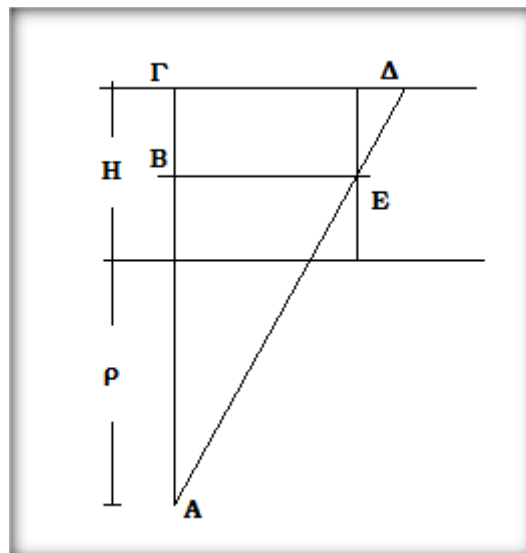
Με στόχο να δείξουμε καλύτερα πως μεταβάλλεται η εικόνα στην περιοχή επαφής από κυκλική σε μία έλλειψη πραγματοποιήσαμε ένα πείραμα μονοαξονικής προέντασης. Ειδικότερα, επιλέξαμε ελαστικό δοκίμιο πάχους 11 χιλιοστών, το οποίο αρχικά είναι απαραμόρφωτο, ενώ στη συνέχεια κάμπτεται γύρω από χαλύβδινο σωλήνα. Ο διεισδυτής που επιλέξαμε είναι σφαιρικός και διάφανος. Η επιλογή του διάφανου διεισδυτή έχει ως στόχο να καταφέρουμε να επαληθεύσουμε και πειραματικά τις αλλαγές στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού και την εμφάνιση εκκεντρότητας εξαιτίας της προέντασης.



**Σχήμα 3.17.1** Ελαστικό δοκίμιο πάχους 11 χιλιοστών εδράζεται απλά πάνω σε άκαμπτη επιφάνεια. Διάφανος σφαιρικός διεισδυτής ακτίνας 2.5 εκατοστών εισέρχεται στην επιφάνεια του ελαστικού δείγματος. Το αποτύπωμα του σφαιρικού διεισδυτή πάνω στην επιφάνεια του απαραμόρφωτου υλικού έχει τη μορφή κύκλου.



**Σχήμα 3.17.2** Τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) όπου το ελαστικό δοκίμιο 11 χιλιοστών εφελκύεται μονοαξονικά πάνω σε χαλύβδινο σωλήνα ακτίνας 50 χιλιοστών. Το δοκίμιο μετατρέπεται σε ένα ανισότροπο «σώμα» και έτσι το αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στο παραμορφωμένο δείγμα έχει τη μορφή έλλειψης.



**Σχήμα 3.17.3** Ελαστικό δοκίμιο πάχους  $H$  προεντείνεται πάνω σε χαλύβδινο σωλήνα ακτίνας  $\rho$ . Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά το παραπάνω σχήμα θα διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AG\Delta$  είναι όμοια.

Το ελαστικό δοκίμιο εφελκύεται κατά τη διεύθυνση  $x_1$ . Το πρόβλημα είναι επίπεδο και η διεύθυνση  $x_2$  παραμένει απαραμόρφωτη. Επομένως, το αντίστοιχο «τέντωμα» ισούται με:



$$\lambda_2 = 1$$

Επιπρόσθετα, το ελαστικό δείγμα είναι ασυμπίεστο και ισχύει η ισότητα:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

Εξαιτίας της ομοιότητας των τριγώνων προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{BE}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Lambda\Gamma} = \frac{\rho + H/2}{\rho + H} = \frac{BE}{BE\lambda_1} = \frac{BE}{BE(1+\varepsilon)} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho + H}{\rho + H/2} = \frac{50+11}{50+5.5} = \frac{61}{55.5} = 1.099$$

Όπου με  $\lambda_1$  συμβολίζεται το «τέντωμα» κατά τη διεύθυνση  $x_1$ .

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{1.099} = 0.91$$

Χρησιμοποιώντας την καμπύλη των Vlassak et al. προκύπτει εκκεντρότητα:

$$e^2 = 0.225$$

Ο λόγος των αποτυπωμάτων της έλλειψης δίνεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{a_1}{a_2} = (1 - e^2)^{1/2} = (1 - 0.225)^{1/2} = 0.8803$$

Μελετώντας προσεκτικά τις φωτογραφίες του πειράματος διείσδυσης μπορούμε να μετρήσουμε τα αποτυπώματα της έλλειψης στην παραμορφωμένη κατάσταση του υλικού, κατά την εισχώρηση του διαφανούς διεισδυτή. Έτσι λοιπόν, προκύπτει ότι κατά τη διεύθυνση του μονοαξονικού ελκυσμού το αποτύπωμα ισούται με  $a_1=3.4$  cm, ενώ στην διεύθυνση  $x_2$  ισούται με  $a_2=4.5$  cm. Έτσι προκύπτει:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3.4}{4.5} = 0.756$$

**Τα ανωτέρω αποτελέσματα δείχνουν ότι η θεωρία επαληθεύεται από το πείραμα!**

Αφού έχουμε εξετάσει το λόγο των αποτυπωμάτων επιβάλλοντας στο ελαστικό δείγμα μονοαξονικό ελκυσμό, θέλουμε να ελέγξουμε την διεπιφάνεια των δύο «σωμάτων» όταν το δοκίμιο είναι अपαραμόρφωτο και

δεν επιβάλλεται σε αυτό προένταση. Για να επιτευχθεί αυτό θα υπολογίσουμε τη μέση καμπυλότητα του χαλύβδινου κυλίνδρου, συμπεριλαμβανομένου και του υλικού, και τη μέση καμπυλότητα του διεισδυτή.

$$\chi_t = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.96)$$

$$\chi_d = \frac{1}{2} \frac{1}{R_2} \quad (3.97)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις με  $\chi_t$  και  $\chi_d$  παριστάνεται η μέση καμπυλότητα, με  $R_1$  η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή και με  $R_2$  η ακτίνα του χαλύβδινου σωλήνα συμπεριλαμβανομένου και του πάχους του υλικού. Ειδικότερα,  $R_2 = \rho + H = 61 \text{ mm}$  και  $R_1 = R = 25 \text{ mm}$ . Εάν αντικαταστήσουμε τις ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$  θα υπολογίσουμε τη μέση καμπυλότητα. Έτσι, προκύπτει  $\chi_t = 0.048 \text{ mm}^{-1}$  και  $\chi_d = 0.008 \text{ mm}^{-1}$ . Ο λόγος των καμπυλοτήτων εκφράζεται από μία γωνία  $\tau$ .

$$\cos \tau = \frac{\chi_d}{\chi_t} \Rightarrow \tau = \cos^{-1} \left( \frac{\chi_d}{\chi_t} \right)$$

Υπολογίζουμε τη γωνία  $\tau \approx 80.4^\circ$  από την ανωτέρω σχέση και από σχετικό πίνακα μπορούμε να βρούμε τις ποσότητες  $m$ ,  $n$ .

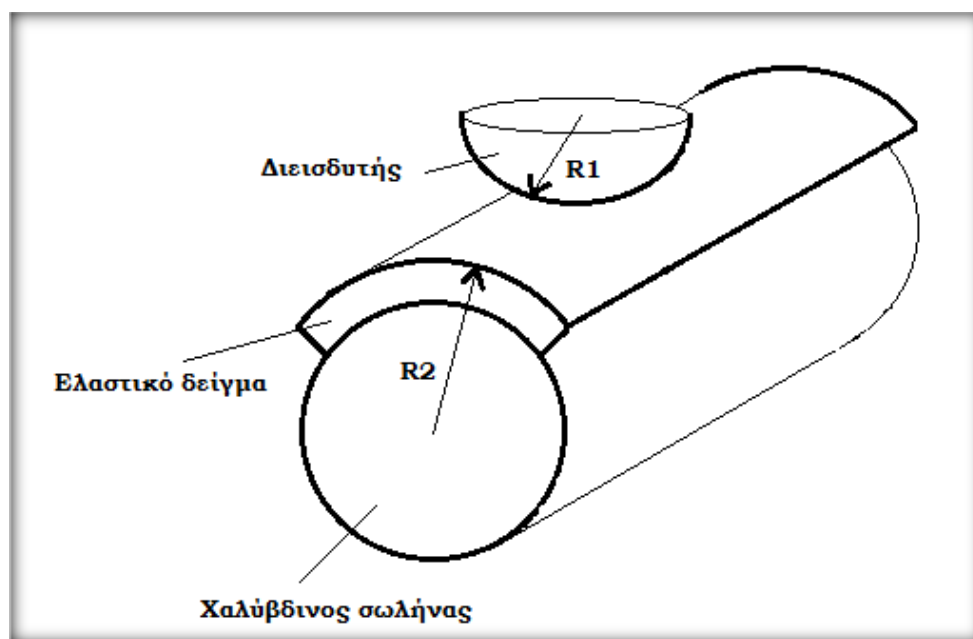
**Πίνακας 3.17.1** Συσχέτιση της γωνίας  $\tau$  με τις παραμέτρους  $m$ ,  $n$  για τον υπολογισμό του αποτυπώματος  $a/b = a_2/a_1$ .

$\tau^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$
$m$	1.128	1.061
$n$	0.893	0.944

Με γραμμική παρεμβολή μπορούμε να υπολογίσουμε τελικά τις ποσότητες  $m = 1.123 \text{ mm}^{-1}$  και  $n = 0.897 \text{ mm}^{-1}$ . Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο των αποτυπωμάτων στην επιφάνεια επαφής των δύο «σωμάτων» όταν δεν επιβάλλεται στο δείγμα μονοαξονικός ελκυσμός.

$$\frac{b}{a} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{0.897}{1.123} = 0.799$$

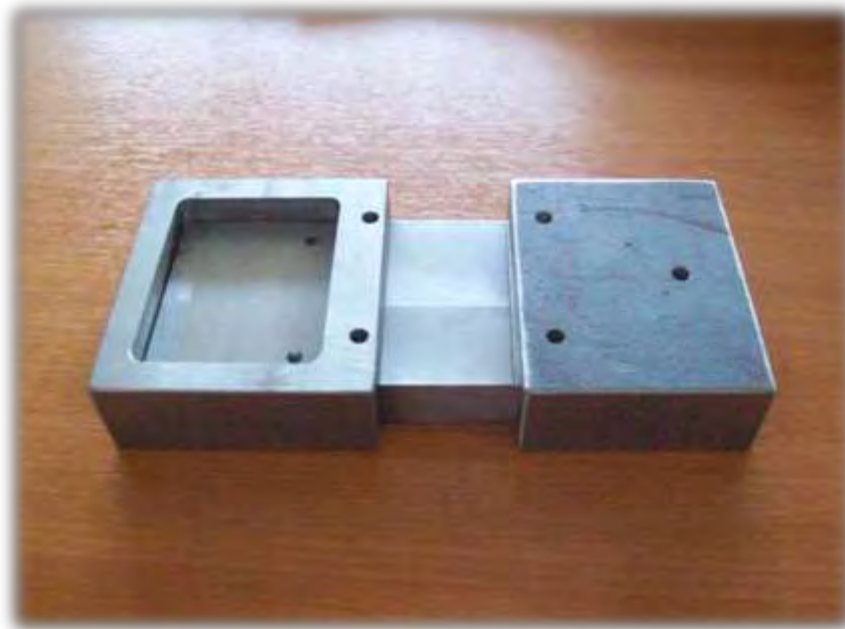
Το αποτέλεσμα του λόγου των αποτυπωμάτων δε διαφέρει σημαντικά με αυτό που προέκυψε λόγω αρχικής προέντασης του δείγματος. Η λύση που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω σχετίζεται με τη γεωμετρία του προβλήματος και αναφέρεται ως ένα προχωρημένο πρόβλημα του Hertz. Ουσιαστικά, πρόκειται για μία επίλυση κατά Gay, στην οποία το «τέντωμα» εισάγεται στο διεισδυτή και όχι στο δείγμα. Ο Gay λοιπόν, επεμβαίνει στο διεισδυτή και όχι στο υλικό, το σχήμα του οποίου χαρακτηρίζεται ως παραβολικό. **Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα ενός επίπεδου δοκιμίου που δέχεται μονοαξονικό ελκυσμό ίσο με  $\lambda_1=1.099$  και  $\lambda_2=1$  είναι ισοδύναμο με έναν παραμορφωμένο διεισδυτή που χαρακτηρίζεται από παραβολικό σχήμα!**



**Σχήμα 3.17.4** Κάμψη ελαστικού δείγματος πάνω σε χαλύβδινο σωλήνα. Το «σώμα» προεντνέεται μονοαξονικά και στην επιφάνεια του εισχωρεί άκαμπτος σφαιρικός διεισδυτής. Η ακτίνα του σωλήνα συμπεριλαμβανομένου και του πάχους του υλικού συμβολίζεται με  $R_2$ , ενώ η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή με  $R_1$ . Ο σωλήνας παρουσιάζει καμπυλότητα κατά την ακτινική διεύθυνση, ενώ κατά την διεύθυνση του άξονα δεν εμφανίζεται καμπυλότητα. Αντίθετα, η σφαίρα έχει καμπυλότητα σε δύο διευθύνσεις που συμπίπτουν με τους άξονες της επαφής των δύο υλικών.

## Παράρτημα Θ

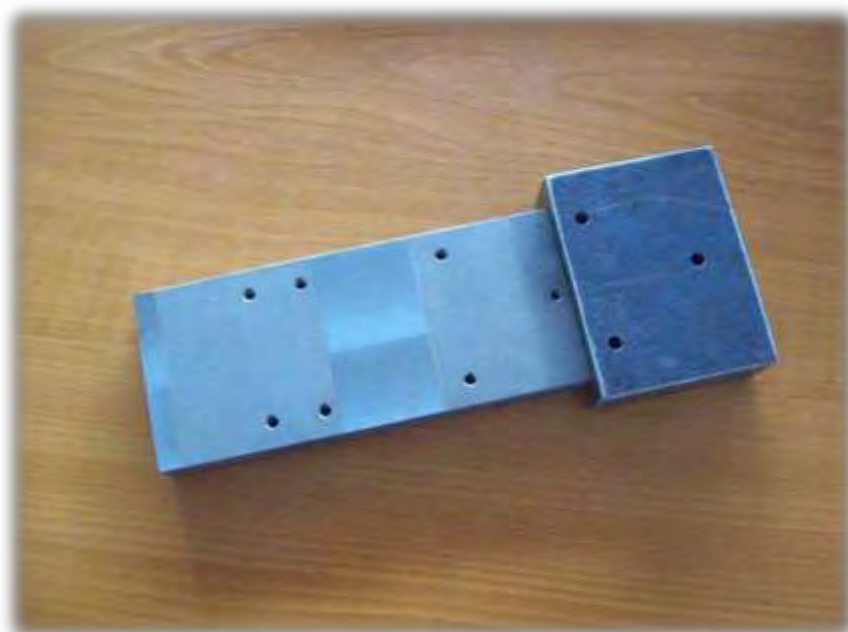
### 3.18 Προένταση σε ελαστικό δοκίμιο με κωδικό G&T



**Εικόνα 3.18.1** Συσκευή προέντασης ελαστικών δοκιμίων κατασκευασμένη από χάλυβα. Η απεικονιζόμενη συσκευή αποτελείται από μία μεταλλική βάση ορθογωνικού σχήματος και διαστάσεων 170x70 mm. Πάνω στη βάση αυτή τοποθετείται το υπό δοκιμή υλικό, του οποίου τη σκληρότητα επιθυμούμε να μετρήσουμε. Πριν την έναρξη της σκληρομέτρησης το υλικό δοκίμιο πρέπει να υποστεί προένταση. Αυτό επιτυγχάνεται τραβώντας με ειδικά «άγκιστρα» το δείγμα και εφαρμόζοντας στη συνέχεια πάνω στο «τεντωμένο» δείγμα δύο συρταρωτά μεταλλικά τμήματα που μπορούμε να δούμε στην παραπάνω φωτογραφία.



**Εικόνα 3.18.2** Η συσκευή προέντασης διαθέτει δύο «συρταρωτά» μεταλλικά τμήματα, όπως μπορούμε να διακρίνουμε στην παραπάνω φωτογραφία, που λειτουργούν ως πακτώσεις για το προεντεταμένο άκρο του ελαστικού. Σύμφωνα λοιπόν, με τις διαστάσεις του δοκιμίου επιλέγεται και το αντίστοιχο άκρο που υποβάλλει την πάκτωση στο υλικό. Έτσι, σε περίπτωση που το ελαστικό δείγμα χαρακτηρίζεται από μικρές διαστάσεις επιλέγεται το τμήμα στα αριστερά της εικόνας, ενώ για μεγαλύτερα δοκίμια προτιμάμε να πακτώσουμε το υλικό πάνω στη μεταλλική βάση προέντασης με το τμήμα που βρίσκεται στα δεξιά της εικόνας.

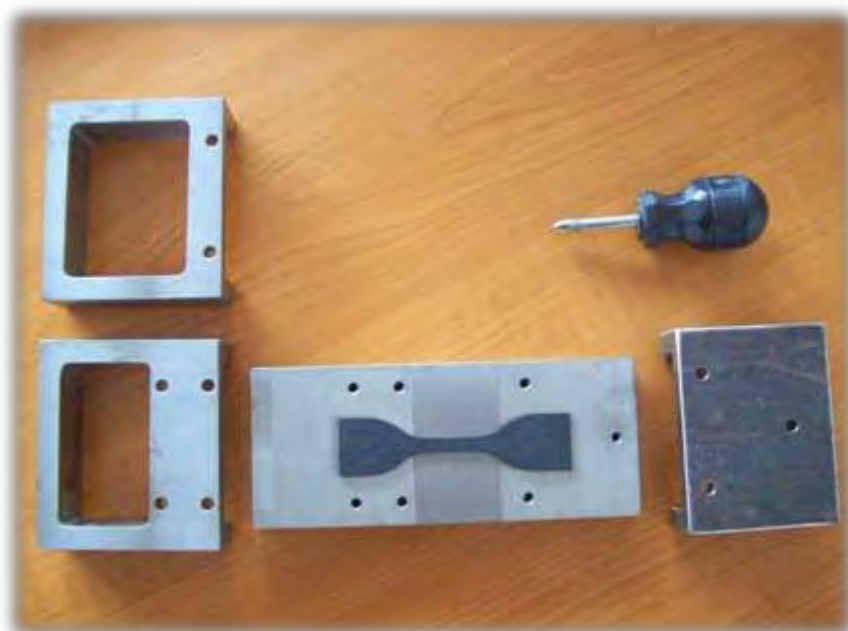


**Εικόνα 3.18.3** Στην παραπάνω φωτογραφία μπορούμε να διακρίνουμε τη μεταλλική βάση πάνω στην οποία τοποθετείται το υπό δοκιμή υλικό για να

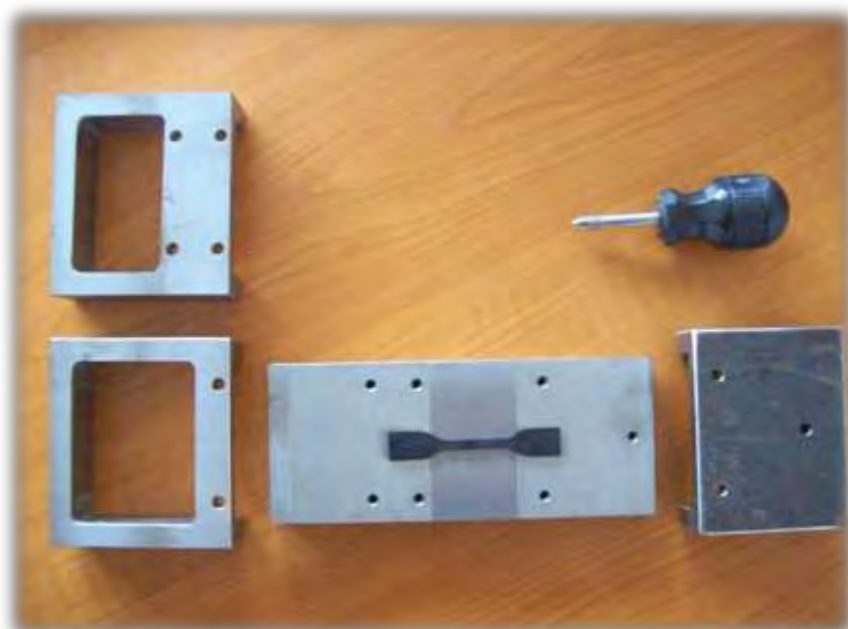
υποστεί προένταση. Ειδικότερα, όπως βλέπουμε, η μεταλλική βάση χαρακτηρίζεται από ορθογωνικό σχήμα διαστάσεων 170x70 mm και έχει πάχος ίσο με 20 mm. Είναι συμπαγής στο εσωτερικό της και το υλικό κατασκευής της είναι ο χάλυβας. Στην ανωδομή της βάσης παρατηρούνται διαδοχικά λείες και τραχείες επιφάνειες. Το σημείο όπου γίνεται η μέτρηση, δηλαδή το μέσο της βάσης, επιλέχθηκε να είναι λείο, ενώ τα σημεία που πακτώνεται το δείγμα τραχειά. Η επιλογή αυτή έγινε με στόχο να αποφύγουμε πιθανή ολίσθηση του υλικού στα ακραία τμήματα, έτσι ώστε να είναι ασφαλή τα αποτελέσματα της μέτρησης. Στα δεξιά της εικόνας φαίνεται το μεταλλικό τμήμα που χρησιμοποιείται για την πάκτωση του ενός άκρου του δοκιμίου, το οποίο εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις ανεξάρτητα με τις διαστάσεις του δείγματος.



**Εικόνα 3.18.4** Στην εικόνα διακρίνουμε τη συσκευή προέντασης ελαστομερών δοκιμίων. Για να πακτώσουμε τα δύο άκρα του δείγματος εφαρμόζονται πάνω σε αυτό δύο μεταλλικά «συρταρωτά» τμήματα. Τα τμήματα αυτά οφείλουν να παραμείνουν ακίνητα για την επιτυχία του πειράματος. Αυτό επιτυγχάνεται βιδώνοντας με ειδικό κατσαβίδι πάνω στο προεντεταμένο δείγμα τα τμήματα αυτά, όπως φαίνεται παραπάνω. Οι κοχλίες της εικόνας χαρακτηρίζονται από διάμετρο 5 χιλιοστών.



**Εικόνα 3.18.5** Τοποθέτηση του ελαστικού δοκιμίου G&T πάνω στη μεταλλική βάση προέντασης. Το δείγμα επικάθεται απλά πάνω στη βάση της συσκευής χωρίς να έχει υποστεί «τέντωμα». Στα αριστερά και δεξιά του δείγματος διακρίνουμε τα τμήματα που χρησιμοποιήθηκαν ως πακτώσεις για τη μέτρηση του εικονιζόμενου υλικού.



**Εικόνα 3.18.6** Αντίστοιχη φωτογραφία με την προηγούμενη για την περίπτωση ελαστικού δοκιμίου G&T μικρότερων διαστάσεων. Το μεταλλικό τμήμα στα δεξιά λειτουργεί σαν πάκτωση ανεξάρτητα των διαστάσεων του δοκιμίου. Αντίθετα, το τμήμα που λειτουργεί ως πάκτωση στα αριστερά της βάσης αντικαθίσταται, έτσι ώστε να είναι δυνατή η προένταση του ελαστικού δείγματος.





**Εικόνα 3.18.7** Ελαστικό δοκίμιο G&T εδράζεται απλά πάνω στη μεταλλική βάση της συσκευής προέντασης χωρίς να έχει υποστεί «τέντωμα».



**Εικόνα 3.18.8** Μεταλλικά «γκιστρα» που εφαρμόζονται στο ένα άκρο του ελαστικού δείγματος και προκαλούν προένταση, με την προϋπόθεση ότι το άλλο άκρο του δοκιμίου είναι πακτωμένο.





**Εικόνα 3.18.9** Υποθέτουμε ότι το αριστερό άκρο του ελαστικού είναι πακτωμένο πάνω στη μεταλλική βάση της συσκευής προέντασης και έτσι μπορούμε να προκαλέσουμε «τέντωμα» του δοκιμίου τραβώντας το από το ελεύθερο δεξιό του άκρο με δύο μεταλλικά «άγκιστρα».



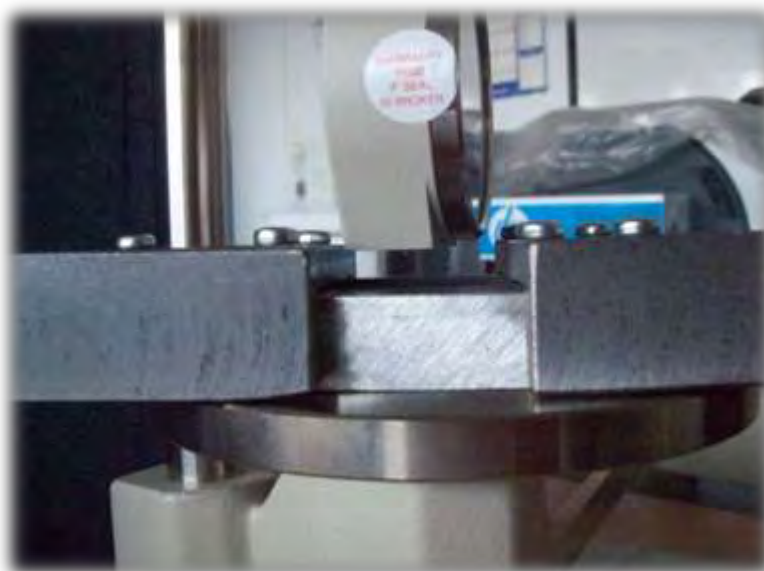
**Εικόνα 3.18.10** Ελαστικό δοκίμιο πακτωμένο στο δεξιό του άκρο. Το αριστερό άκρο του δείγματος εδράζεται απλά πάνω στη μεταλλική βάση της συσκευής. Στην παραπάνω εικόνα οριοθετείται με κόκκινο χρώμα το μετρούμενο αρχικό μήκος  $L_0$  του λαιμού του υπό δοκιμή υλικού. Το αρχικό μήκος  $L_0$  μετρήθηκε ίσο με 2 cm.



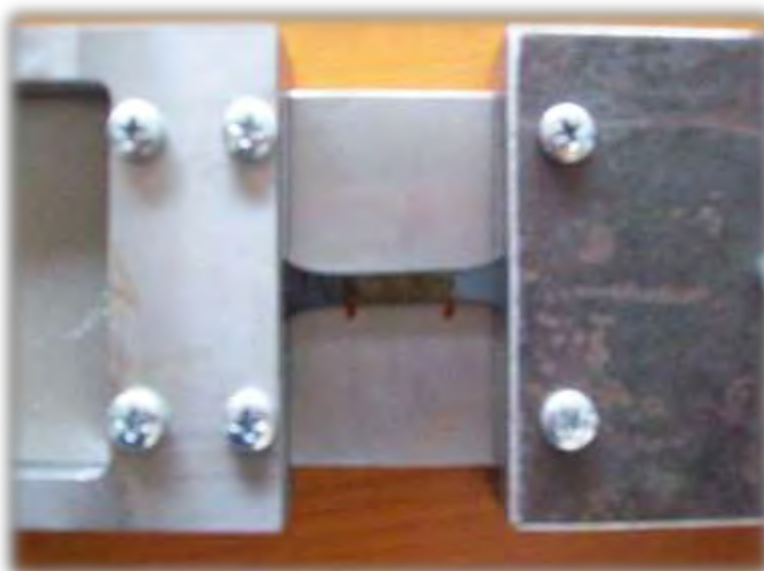
**Εικόνα 3.18.11** Ελαστικό δοκίμιο G&T που έχει υποστεί προένταση. Με κόκκινο χρώμα πάνω στη μεταλλική βάση παριστάνεται το αρχικό μήκος  $L_0$  του δοκιμίου. Παρατηρώντας προσεκτικά την εικόνα μπορούμε να διακρίνουμε το νέο μήκος του δείγματος  $L_1$ , με σκούρο μαύρο χρώμα πάνω στο ελαστικό, κατά τη φάση της προέντασης του πάνω στη συσκευή. Το νέο μήκος του δοκιμίου ισοδυναμεί με 2.424 cm, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι η προένταση που έχει υποστεί το δείγμα είναι μεγάλη, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα.



**Εικόνα 3.18.12** Για τον υπολογισμό της σκληρότητας κατά Shore ενός προεντεταμένου ελαστικού δοκιμίου αρκεί τη τοποθέτηση της συσκευής προέντασης πάνω στη μεταλλική έδρα του σκληρόμετρου Shore κλίμακας O.



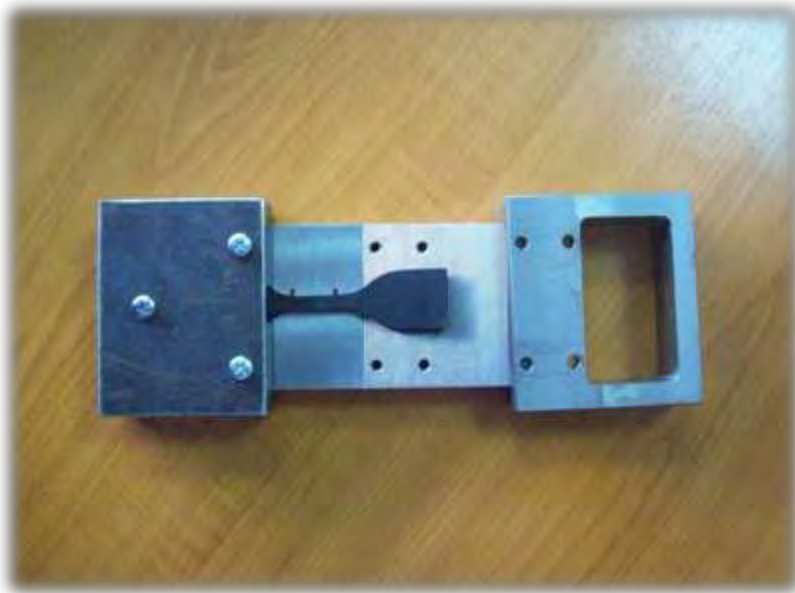
**Εικόνα 3.18.13** Προεντεταμένο ελαστικό δείγμα υποβάλλεται σε δοκιμή σκληρομέτρησης. Για την υλοποίηση του πειράματος επιλέχθηκε συσκευή Shore κλίμακας O που διαθέτει διεισδυτή σφαιρικού σχήματος. Η μέση τιμή της σκληρότητας κατά Shore μετρήθηκε ίση με  $S_m = 83.83$  για το ελαστικό δοκίμιο G&T.



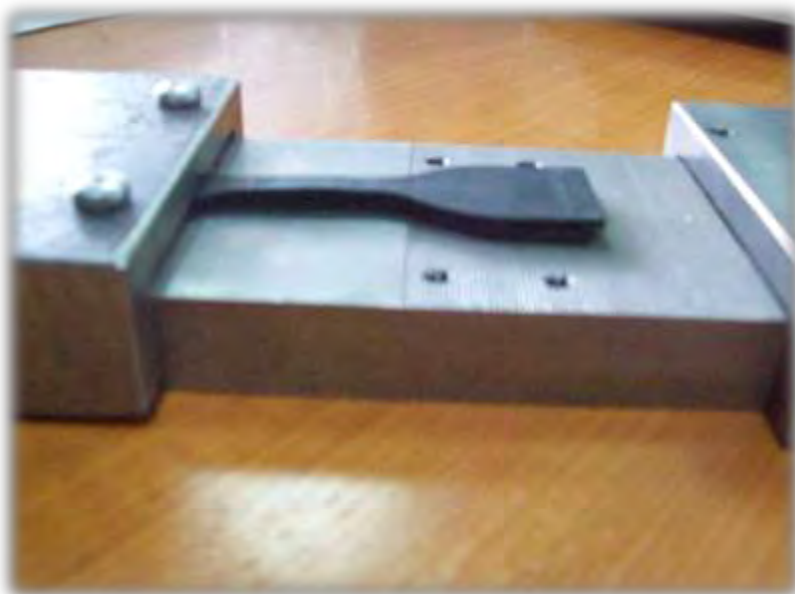
**Εικόνα 3.18.14** Ελαστικό δείγμα που έχει υποστεί μικρότερη προένταση σε σχέση με το προηγούμενο. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα σκληρότητας σύμφωνα με τη συσκευή Shore κλίμακας O δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφοροποίηση συγκριτικά με εκείνα που προκύπτουν για περιπτώσεις μεγάλης προέντασης του δείγματος.

## Παράρτημα Ι

### 3.19 Προένταση σε ελαστικό δείγμα με κωδικό G&T (δύο στρώσεις υλικού)



**Εικόνα 3.19.1** Ελαστικό δοκίμιο εδράζεται σε συσκευή προέντασης. **Το ελαστικό δείγμα αποτελείται από δύο στρώματα του ίδιου υλικού.** Στην εικόνα με γραμμές κόκκινου χρώματος συμβολίζεται το αρχικό μήκος του δοκιμίου  $L_0$  στην απαραμόρφωτη κατάσταση.



**Εικόνα 3.19.2** Ελαστικό δείγμα αποτελούμενο από δύο στρώματα του ίδιου υλικού εδράζεται σε συσκευή προέντασης. **Για τη σκληρομέτρηση**



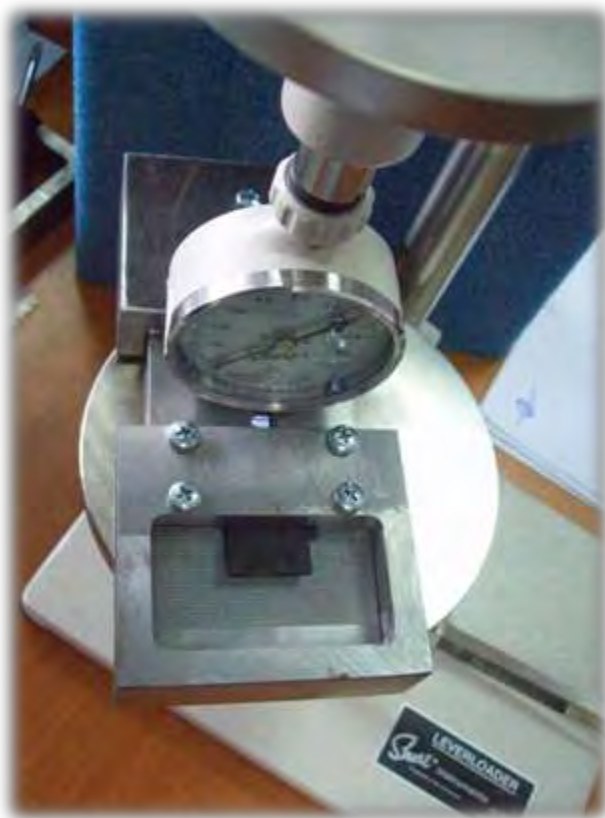
επιλέχθηκαν δύο στρώματα ώστε να περιοριστεί η επιρροή του άκαμπτου υποστρώματος στα αποτελέσματα της μέτρησης.



**Εικόνα 3.19.3** Ελαστικό δοκίμιο G&T χωρίς να έχει υποστεί αρχική προένταση.



**Εικόνα 3.19.4** Δοκίμιο απλά εδρασμένο σε συσκευή προέντασης. Στο ελαστικό G&T σημειώθηκε με λευκό χρώμα το αρχικό μήκος του δοκιμίου πριν την επιβολή μονοαξονικής προέντασης (reference configuration).



**Εικόνα 3.19.5** Σκληρομέτρηση ελαστικού προεντεταμένου δοκιμίου. Για τη δοκιμή χρησιμοποιήθηκε συσκευή Shore κλίμακας O.



**Εικόνα 3.19.6** Σκληρομέτρηση ελαστικού κατά Shore κλίμακας O. Το δείγμα αποτελείται από δύο στρώματα του υλικού G&T, από τα οποία μόνο το ανωτέρω στρώμα προεντίνεται.



**Εικόνα 3.19.7** Στην εικόνα φαίνεται το ελαστομερές δείγμα G&T απλά εδρασμένο πάνω στη συσκευή προέντασης πριν τη δοκιμή σκληρομέτρησης.



**Εικόνα 3.19.8** Ελαστικό δείγμα αποτελούμενο από δύο στρώματα. Το πάχος του υλικού είναι επαρκές ώστε να μην επηρεάζεται η μέτρηση από το σκληρό υπόστρωμα.



**Εικόνα 3.19.9** Διαφανής διεισδυτής διαμέτρου  $D=4$  cm. Η ακτίνα του σφαιρικού διεισδυτή  $R$  ισούται με 2.5 cm.

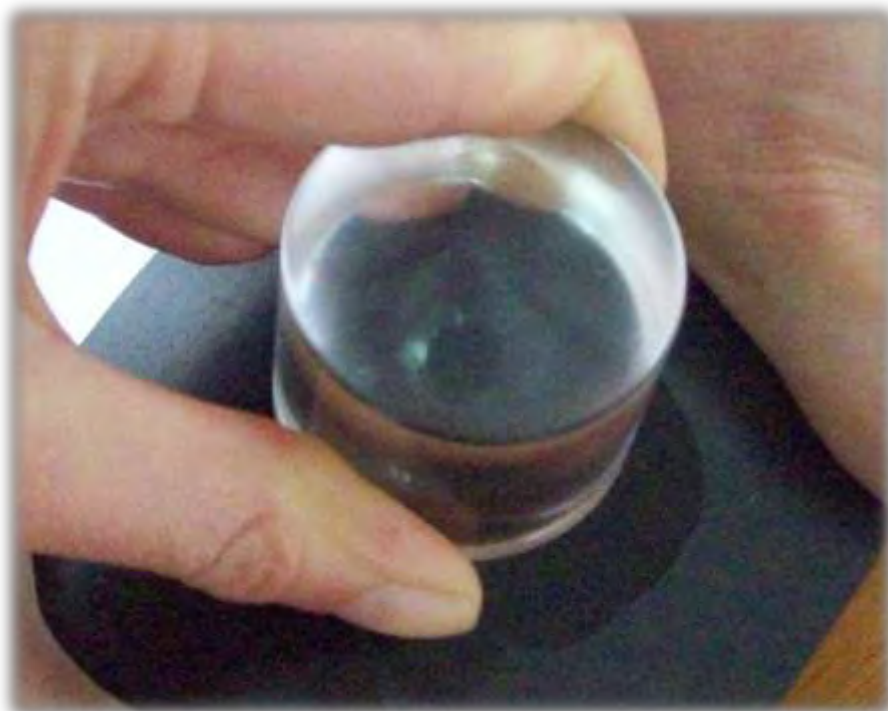


**Εικόνα 3.19.10** Διαφανής διεισδυτής εισχωρεί σε απαραμόρφωτο ελαστικό «σώμα». Το αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στο δοκίμιο έχει τη μορφή κύκλου, όπως φαίνεται στην εικόνα.





**Εικόνα 3.19.11** Το ελαστικό της προηγούμενης εικόνας υποβάλλεται σε δοκιμή κάμψης γύρω από έναν χαλύβδινο σωλήνα. Η ανωτέρω στρώση του δείγματος υποβάλλεται σε ελκυσμό, ενώ η κατώτερη στρώση που εφάπτεται στο σωλήνα σε θλίψη. Έτσι λοιπόν, η εξωτερική επιφάνεια προεντείνεται και το αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στο ελαστικό έχει τη μορφή έλλειψης.



**Εικόνα 3.19.12** Το αποτύπωμα του διαφανούς διεισδυτή πάνω σε ελαστικό προεντεταμένο σώμα έχει τη μορφή έλλειψης!

## Παράρτημα Κ

### 3.20 Σχέσεις κατά M. A. Biot (1965)

Εκφράσεις κατά Biot (1965) για τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ ορθών επαυξητικών τάσεων και παραμορφώσεων. Αρχικά, υπολογίζουμε τους συντελεστές  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_3$  γνωρίζοντας την πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας  $W$  που αντιστοιχεί σε κάθε προσομοίωμα.

$$a_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} \quad (3.98)$$

$$a_2 = \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \quad (3.99)$$

$$a_3 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2} \quad (3.100)$$

$$a_4 = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_3^2} \quad (3.101)$$

Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τα μεγέθη  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_3$ , προσδιορίζουμε τους επαυξητικούς ελαστικούς συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$ , σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις.

$$a_1 - a_2 = A \quad (3.102)$$

$$a_3 - a_2 = B \quad (3.103)$$

$$a_2 = C \quad (3.104)$$

Ολοκληρώνοντας, υπολογίζουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις επαυξητικές τάσεις με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις.

$$s_{22} - s_{33} = B e_{yy} - C e_{zz} \quad (3.105)$$

$$s_{33} - s_{11} = C e_{zz} - A e_{xx} \quad (3.106)$$

$$s_{11} - s_{22} = A e_{xx} - B e_{yy} \quad (3.107)$$

Μετά τον υπολογισμό των ορθών επαυξητικών τάσεων, όπως περιγράφηκε παραπάνω, προχωράμε στον προσδιορισμό των διατμητικών τάσεων. Αρχικά, προσδιορίζουμε τους επαυξητικούς διατμητικούς συντελεστές  $Q_1$ ,  $Q_2$  και  $Q_3$ .

$$Q_1 = \frac{1}{2}(S_{22} - S_{33}) \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \quad (3.108)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(S_{33} - S_{11}) \frac{\lambda_3^2 + \lambda_1^2}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} \quad (3.109)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (3.110)$$

Στις σχέσεις που αναγράφονται παραπάνω με  $S_{ii}$  συμβολίζονται οι τάσεις κατά Cauchy. Έχοντας λοιπόν, προσδιορίσει τους επαυξητικούς διατμητικούς συντελεστές, μπορούμε να υπολογίσουμε τις διατμητικές τάσεις, που είναι ανεξάρτητες από τις ιδιότητες συμπίεστικότητας, σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις.

$$s_{12} = 2Q_3 e_{xy} \quad (3.111)$$

$$s_{23} = 2Q_1 e_{yz} \quad (3.112)$$

$$s_{31} = 2Q_2 e_{zx} \quad (3.113)$$

## Παράρτημα Λ

Στο άρθρο των Dhaliwal et al. (1978) αναγράφονται αναλυτικά οι σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων που αφορούν το μοντέλο neo-Hookean, όπως αυτό περιγράφηκε από τον Biot.

Σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$  εκτιμάμε ότι οι μοναδικές μη μηδενικές αρχικές τάσεις είναι  $S_{rr}$ ,  $S_{\theta\theta}$  και  $S_{zz}$ . Το σώμα υποβάλλεται σε αξονοσυμμετρική επαυξητική παραμόρφωση περί τον άξονα  $z$  και οι εξισώσεις κίνησης (έχοντας απαλείψει τους δυναμικούς όρους) είναι οι ακόλουθες:

$$s_{rr,r} + \frac{1}{r}(s_{rr} - s_{\theta\theta}) + s_{rz,z} - (S_{rr} - S_{zz})w_{rz,z} = 0 \quad (3.114)$$

$$s_{zz,z} + \frac{1}{r}(rs_{zr})_{,r} - (S_{rr} - S_{zz})\frac{1}{r}(rw_{rz})_{,r} = 0 \quad (3.115)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μία βαθμωτή επαυξητική συνάρτηση μετατόπισης  $\varphi(r, z, t)$  που δίνεται από τις εξής σχέσεις:

$$u_r = -\varphi_{,rz} \quad (3.116)$$

$$u_\theta = 0 \quad (3.117)$$

$$u_z = \frac{1}{r}(r\varphi_{,r})_{,r} \quad (3.118)$$

Επιπρόσθετα, υπολογίζουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για μη μηδενική επαυξητική παραμόρφωση, στροφή και τάση.

$$e_{rr} = -\varphi_{,rrz}, e_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\varphi_{,rz}, e_{zz} = \frac{1}{r}(r\varphi_{,rz})_{,r} \quad (3.119)$$

$$e_{zr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}(r\varphi_{,r})_{,r} - \varphi_{,zz}\right\}_{,r}, w_{rz} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}(r\varphi_{,r})_{,r} + \varphi_{,zz}\right\}_{,r} \quad (3.120)$$

$$s_{rr} - s = s - s_{\theta\theta} = -\mu_0\lambda_r^2 r \left(\frac{1}{r}\varphi_{,rz}\right)_{,r}, s = \frac{1}{2}(s_{rr} + s_{\theta\theta}) \quad (3.121)$$

$$s_{zz} - s = \mu_0(\lambda_r^2 + 2\lambda_z^2)e_{zz}, s_{zr} = \mu_0(\lambda_r^2 + \lambda_z^2)e_{zr} \quad (3.122)$$

Εύκολα λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι η συνθήκη για την ασυμπίεστοτητα ικανοποιείται.

$$e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz} = 0 \quad (3.123)$$

Σύμφωνα με το «μοντέλο» neo-Hookean ισχύει η ακόλουθη σχέση τάσης-παραμόρφωσης:

$$S_{rr} - S_{zz} = \mu_0 (\lambda_r^2 - \lambda_z^2) \quad (3.124)$$

Έτσι λοιπόν, εφόσον γνωρίζουμε τα μεγέθη  $u_r$ ,  $w_{rz}$ ,  $s_{rr}$  και  $s_{rr} - s_{\theta\theta}$  αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση κίνησης και υπολογίζουμε την ποσότητα  $s$ . Για την επίλυση της εξίσωσης κίνησης προσδιορίσαμε τις επιμέρους ποσότητες όπως αναγράφονται παρακάτω:

$$s_{rr,r} = -\mu_0 \lambda_r^2 \left\{ r \left( \frac{1}{r} \varphi_{,rz} \right)_{,r} \right\} + s_{,r} \quad (3.125)$$

$$\frac{1}{r} (s_{rr} - s_{\theta\theta}) = -2\mu_0 \lambda_r^2 \left( \frac{1}{r} \varphi_{,rz} \right)_{,r} \quad (3.126)$$

$$s_{rz,z} = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_r^2 + \lambda_z^2) \left\{ \frac{1}{r} (r \varphi_{,rz})_{,r} - \varphi_{,zzz} \right\}_{,r} \quad (3.127)$$

$$(S_{rr} - S_{zz}) w_{rz,z} = -\frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_r^2 - \lambda_z^2) \left\{ \frac{1}{r} (r \varphi_{,rz})_{,r} + \varphi_{,zzz} \right\}_{,r} \quad (3.128)$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω ποσότητες στην πρώτη εξίσωση κίνησης προκύπτει τελικά ότι:

$$s = \mu_0 \lambda_z^2 \varphi_{,zzz} \quad (3.129)$$

Στο σημείο αυτό επιλύοντας τη δεύτερη εξίσωση κίνησης, κάνοντας αντικατάσταση των σχέσεων που αναγράφονται παραπάνω, θα οδηγηθούμε σε μία απλή διαφορική εξίσωση για την ποσότητα  $\varphi$ . Όπως και προηγουμένως παραθέτουμε τις τιμές των επιμέρους ποσοτήτων της εξίσωσης.

$$s_{zz,z} = \mu_0 (\lambda_r^2 + \lambda_z^2) \left( \frac{1}{r} \varphi_{,rzz} + \varphi_{,rrzz} \right) \quad (3.130)$$

$$\frac{1}{r} (rs_{,z})_{,r} = \frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_r^2 + \lambda_z^2) \left( \frac{1}{r^3} \varphi_{,r} - \frac{1}{r^2} \varphi_{,rr} + \frac{2}{r} \varphi_{,rrr} + \varphi_{,rrrr} - \frac{1}{r} \varphi_{,rzz} - \varphi_{,rrzz} \right) \quad (3.131)$$

$$(S_{rr} - S_{zz}) \frac{1}{r} (rw_{rz})_{,r} = -\frac{1}{2} \mu_0 (\lambda_r^2 - \lambda_z^2) \left( \frac{1}{r^3} \varphi_{,r} - \frac{1}{r^2} \varphi_{,rr} + \frac{2}{r} \varphi_{,rrr} + \varphi_{,rrrr} + \frac{1}{r} \varphi_{,rzz} + \varphi_{,rrzz} \right) \quad (3.132)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στη δεύτερη εξίσωση κίνησης προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left\{ k^2 \left( \varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r} \right) + \varphi_{,zz} \right\} = 0 \quad (3.133)$$

Όπου με  $k$  συμβολίζεται η ποσότητα  $k = \lambda_r / \lambda_z$ . Για την επίλυση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης  $\varphi(r, z)$  απαιτείται μετασχηματισμός Hankel εφόσον εμφανίζονται παράγωγοι ως προς  $r$  και  $z$ . Πρέπει λοιπόν, να απαλείψουμε το μέγεθος  $r$  ώστε να προκύψει συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς  $z$ . Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Hankel προκύπτει μία εξίσωση της μορφής:

$$\bar{\varphi}(\xi, z) = A(\xi) e^{\xi z} + B(\xi) e^{k\xi z} + C(\xi) e^{-\xi z} + D(\xi) e^{-k\xi z} \quad (3.134)$$

Όπου τα  $A, B, C, D$  είναι τυχαιές συναρτήσεις του  $\xi$ .

Στο σημείο αυτό αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες φόρτισης για να ολοκληρώσουμε την επίλυση του προβλήματος. Στην επιφάνεια του σώματος όπου  $z=0$  οι συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα είναι οι ακόλουθες:

$$s_{zr}(r, 0) = 0, r \geq 0$$

$$s_{zz}(r, 0) = 0, r < a$$

Για τιμές  $z \rightarrow -\infty$  προκύπτει ότι  $C(\xi) = D(\xi) = 0$ . Για τάσεις και μετατοπίσεις στο  $z \rightarrow -\infty$  οδηγούμαστε στην ισότητα  $A(\xi) = -(1+k^2)B(\xi)/2$ . Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_z(r, 0) = -\frac{1}{2} (1-k^2) H_0 [\xi^2 B(\xi); \xi \rightarrow r] \quad (3.135)$$

$$s_{zz}(r, 0) = \frac{1}{2} \mu_0 \lambda_z^2 \left[ (1+k^2)^2 - 4k \right] H_0 [\xi^3 B(\xi); \xi \rightarrow r] \quad (3.136)$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι η διόρθωση για το «μοντέλο» neo-Hookean σύμφωνα με τα παραπάνω έχει τη μορφή  $N(\lambda) = \frac{(1+k^2)^2 - 4k}{1-k^2}$ .

Στο σημείο αυτό ακολουθεί μία εκτενής αναφορά στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα που επιλύθηκε προηγουμένως για την

καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω. **Με τον όρο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα με άξονα συμμετρίας τον  $z$  εννοούμε ότι για οποιαδήποτε στροφή γύρω από τον άξονα  $z$  βλέπουμε την ίδια γεωμετρική εικόνα και ουσιαστικά την ίδια παραμόρφωση.**

Ένα αξονοσυμμετρικό πρόβλημα είναι επί της ουσίας ένα δισδιάστατο πρόβλημα όπου έχουμε δύο εξισώσεις ισορροπίας ( $r, z$ ). Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι ανεξάρτητες και όσον αφορά τις παραμορφώσεις θα πρέπει να εξασφαλιστεί το συμβιβαστό, δε μπορούν δηλαδή να εμφανιστούν ασυνέχειες μετατοπίσεων, πολλαπλά σημεία, κενά, αναστροφές, αρνητικοί όγκοι. Εξαιτίας της ασυμπίεστότητας οι παραμορφώσεις που δίνουν αρνητικούς όγκους δεν πρόκειται ποτέ να εμφανιστούν και λόγω των μη γραμμικών σχέσεων είναι αδύνατο να προκύψουν απλές εξισώσεις συμβιβαστού. Θα πρέπει λοιπόν, να περιγραφούν οι ίδιες οι μετατοπίσεις, δηλαδή να περιγραφεί η κίνηση.

Γενικά, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τρεις συναρτήσεις μετατοπίσεων ( $u_1, u_2, u_3$ ), όμως λόγω της αξονοσυμμετρίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο ( $u_r, u_z$ ). Η ασυμπίεστότητα θα πρέπει να ισχύει πάντοτε και για το λόγο αυτό οι μετατοπίσεις  $u_r, u_z$  δε μπορούν να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Αυτό λοιπόν, μας οδηγεί σε μία συνάρτηση μετατοπίσεων  $\varphi_{r,z}$  που πρέπει να μας δίνει και τις δύο μετατοπίσεις. Οι μεν συναρτήσεις ισορροπίας προέρχονται από το άρθρο του Biot, ενώ η σχέση του  $\varphi_{r,z}$  με τα  $u_r, u_z$  προέρχεται από τα δυναμικά του Papkovitch.

Στη συνέχεια, προχωρούμε και κατασκευάζουμε τις γεωμετρικές σχέσεις (τις τροπές και τα  $spin$ ) που είναι ουσιαστικά σχέσεις σχετιζόμενες μόνο με το  $\varphi_{r,z}$ . Άρα, εάν συνδέσουμε τις παραμορφώσεις με τις τάσεις μέσω καταστατικών νόμων (επαυξητικούς καταστατικούς νόμους) το πρόβλημα ορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση  $\varphi$  με εξαίρεση την υδροστατική πίεση. Επομένως, έχουμε ουσιαστικά δύο βασικές άγνωστες ποσότητες που είναι το  $\varphi_{r,z}$  και η πίεση  $P$ . Παρόλα αυτά, έχουμε στη διάθεσή μας δύο διαφορετικές εξισώσεις, που είναι οι εξισώσεις ισορροπίας και ο συνδυασμός τους μας οδηγεί στη πίεση  $P$  ως σαν συνάρτηση του  $\varphi$ . Επομένως, δεν έχουμε παρά να λύσουμε ως προς  $\varphi$  και να ολοκληρώσουμε το πρόβλημα.

Η διαφορική λοιπόν, εξίσωση είναι 4<sup>ης</sup> τάξης και έχει τέσσερις θεμελιώδεις λύσεις (διαφορική 4<sup>ης</sup> τάξεως με σταθερούς συντελεστές). Επειδή όμως έχει δύο παραμέτρους  $r, z$  οφείλουμε να απαλείψουμε τη μία. Στα αξονοσυμμετρικά προβλήματα «εξαφανίζουμε» το  $r$ . Αυτό υλοποιείται με την τυποποιημένη διαδικασία των μετασχηματισμών Hankel. Επί της ουσίας αντικαθίσταται η μεταβλητή  $r$  με μία σταθερά  $\xi$  που μας περιγράφει ένα είδος μήκος κύματος. Με τον τρόπο αυτό παγώνουμε τη σταθερά και τη διώχνουμε από το πρόβλημά μας. Τότε η διαφορική εξίσωση γίνεται μία διαφορική εξίσωση ως προς  $z$ . Συγκεκριμένα, η μετασχηματισμένη λύση της  $\varphi$  ( $\bar{\varphi}$ ) έχει πάντοτε μία μορφή εκθετική ως προς  $z$ . Το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες φόρτισης για να ολοκληρώσουμε τη γενική επίλυση του προβλήματος. Όταν το  $z \rightarrow -\infty$  τότε το  $\bar{\varphi} \rightarrow 0$ . Αυτό θα δώσει τουλάχιστον δύο συνθήκες μηδενικές ( $C(\xi) = D(\xi) = 0$ ). Όταν  $z \rightarrow 0$  (βρισκόμαστε στην επιφάνεια)

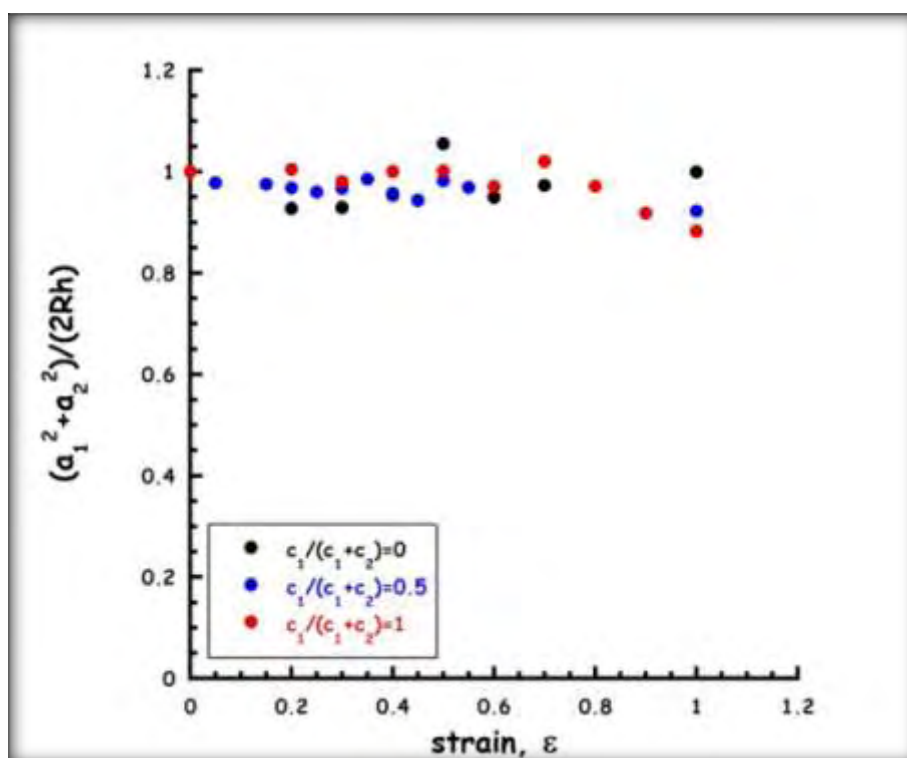
και η ανυπαρξία τριβής μας οδηγεί στο ότι το  $s_{rz}=0$  παντού για κάθε  $r>0$ . Αυτό θα δώσει την εσωτερική σχέση μεταξύ των δύο άλλων συντελεστών  $(A(\xi), B(\xi))$ . Άρα επειδή γνωρίζουμε ότι ο ένας από τους δύο συντελεστές  $(B(\xi))$  θα ακολουθήσει την κλασσική λύση του προβλήματος επαφής, μας αρκεί να βρούμε τις κλίμακες του  $u_z$  και το  $s_{zz}$  πάνω στην επιφάνεια ( $z=0$ ), διότι το  $u_z$  υποχρεώνεται από το σχήμα του διεισδυτή και κατά συνέπεια και του βάθους διείσδυσης, το δε  $s_{zz}$  όταν ολοκληρωθεί δίνει τη δύναμη.

Επομένως, εάν καταφέρουμε να δούμε πως η προένταση επηρεάζει το  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$  και το  $P$ , τότε μπορούμε να βρούμε πως επηρεάζεται το  $u_z$  και το  $s_{zz}$  από την προένταση. Επειδή όμως η επιρροή αυτή είναι πάντοτε πολλαπλασιαστική τότε η συνδυασμένη επιρροή τους (πηλίκιο) δίνει και τη συνολική επιρροή στη σχέση δύναμης-βύθισης και στη σχέση  $E_0$  με  $E^*$ .



## Παράρτημα Μ

### 3.21 Το «μοντέλο» της διείσδυσης ενός άκαμπτου σφαιρικού διεισδυτή σε έναν υπέρ-ελαστικό ημίσκωρο σύμφωνα με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων



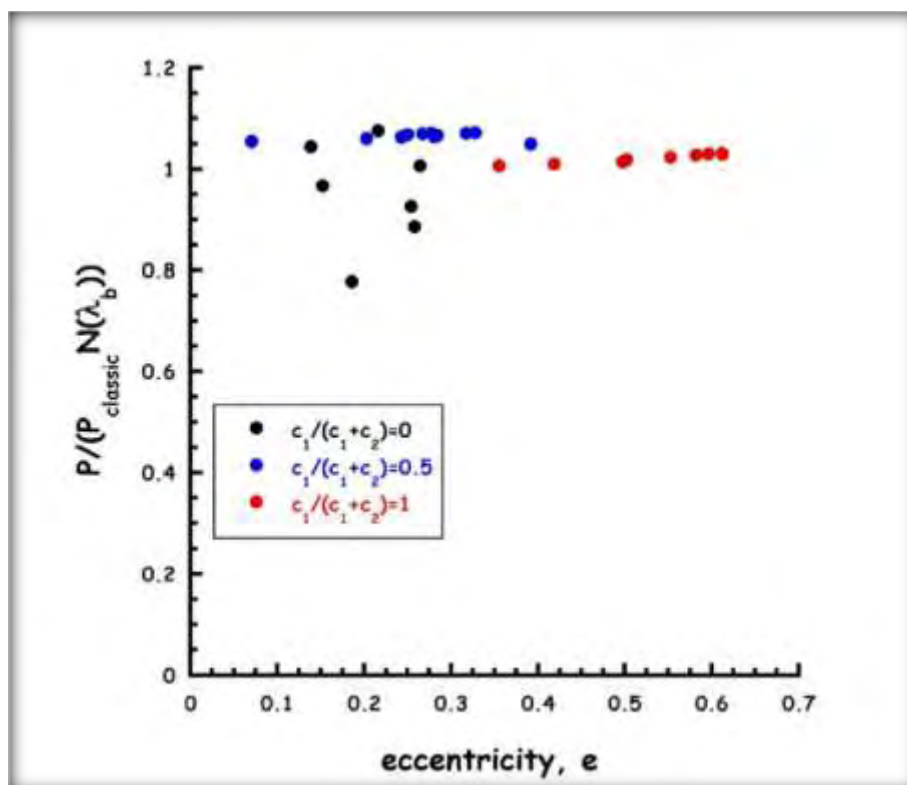
**Εικόνα 3.21.1** Γράφημα που εκφράζει τη μεταβολή της κανονικοποιημένης

ακτίνας επαφής  $\frac{(a_1^2 + a_2^2)}{(2Rh)}$  καθώς αυξάνεται η αρχική επιβαλλόμενη

παραμόρφωση στο υλικό  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \lambda - 1$ ). Με  $a_1$  και  $a_2$  συμβολίζονται οι ακτίνες επαφής του ελλειπτικού αποτυπώματος του διεισδυτή πάνω στο δείγμα. Η ποσότητα  $a_1$  παριστάνει την ακτίνα επαφής στη διεύθυνση επιβολής του μονοαξονικού ελκυσμού. Τα αποτελέσματα δείχθηκαν για  $h/R=0.32$ . Αν παρατηρήσουμε τα σημεία του διαγράμματος θα διαπιστώσουμε ότι ανεξάρτητα

με το υλικό και την επιβαλλόμενη παραμόρφωση  $\varepsilon$  ο λόγος  $\frac{(a_1^2 + a_2^2)}{(2Rh)}$

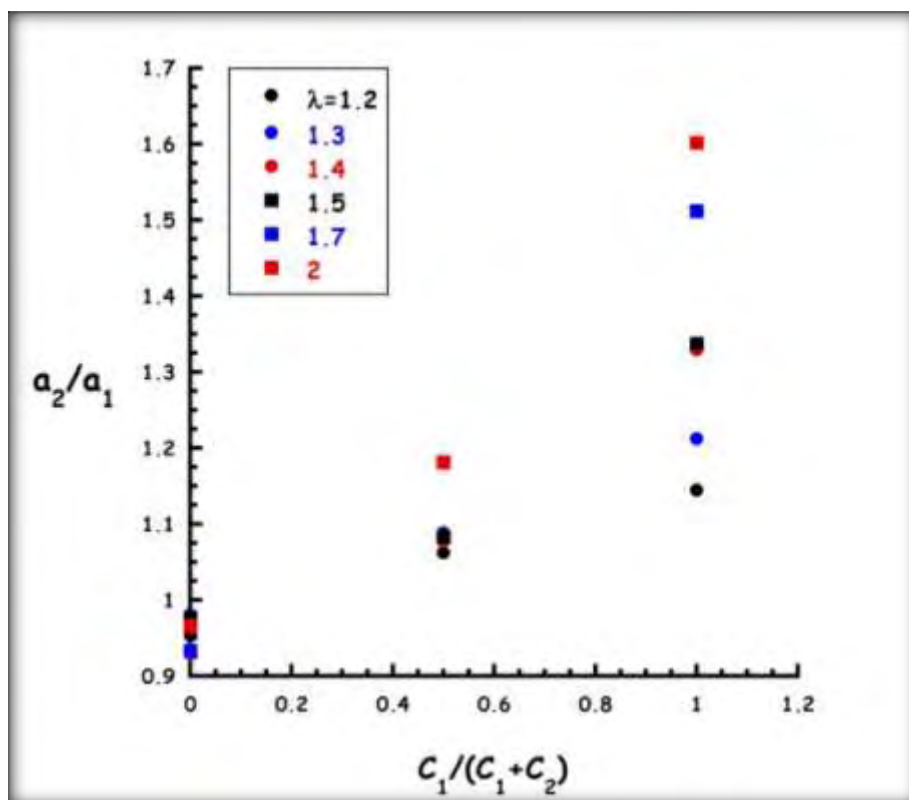
παραμένει σταθερός και ίσος με τη μονάδα. Επαληθεύεται λοιπόν, η θεωρία του Hertz. Το γράφημα προκύπτει σύμφωνα με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, όπως πραγματοποιήθηκε από τον κ. Ζήση.



**Εικόνα 3.21.2** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση του κανονικοποιημένου

φορτίου  $\frac{P}{(P_{classic} N(\lambda_b))}$  σε σχέση με την εκκεντρότητα που εμφανίζεται στο

αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στο δείγμα για διάφορους λόγους των σταθερών του υλικού στο προσομοίωμα των Mooney-Rivlin. Με  $\lambda_b$  παριστάνεται η μέση τιμή της παραμόρφωσης και με  $N(\lambda_b)$  η διόρθωση του συμμετρικού μέρους κατά Mooney-Rivlin. Στην περίπτωση που η εκκεντρότητα είναι ίση με μηδέν  $e=0$  δεν επιβάλλονται αρχικές τάσεις στο «σώμα». Τα αποτελέσματα δείχθηκαν για  $h/R=0.32$ . Έτσι λοιπόν, επιβεβαιώνονται οι θεωρίες των Willis και Vlassak et al. από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία για μικρές προεντάσεις. Το γράφημα προκύπτει σύμφωνα με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, όπως πραγματοποιήθηκε από τον κ. Ζήση.



**Εικόνα 3.21.3** Γράφημα που εκφράζει τη σχέση του λόγου των ακτινών επαφής  $\frac{a_2}{a_1}$  σαν συνάρτηση του λόγου των σταθερών παραμέτρων του υλικού

$\frac{C_1}{C_1+C_2}$ . Τα αποτελέσματα που παριστάνονται στο γράφημα αφορούν διάφορες

τιμές της αρχικής προέντασης  $\lambda$ . Η ποσότητα  $a_1$  παριστάνει την ακτίνα επαφής κατά τη διεύθυνση του μονοαξονικού ελκυσμού. Τα αποτελέσματα δείχθηκαν

για  $h/R=0.32$ . Η σχέση των ποσοτήτων  $\frac{a_2}{a_1}$  και  $\frac{C_1}{C_1+C_2}$  δείχνει να είναι

γραμμική σύμφωνα με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων και επαληθεύει το γράφημα που προκύπτει από την ανάλυση για τιμές του «τεντώματος» μικρότερες του δύο ( $\lambda < 2$ ).

## Κεφάλαιο 4

### 4.1 Πείραμα καμπτικής και εφελκυστικής διείδυσης σε δοκίμιο τύπου Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης (Gel-like material)

Έχοντας λοιπόν, μελετήσει αναλυτικά σε προηγούμενα κεφάλαια υλικά που ανήκουν στην κατηγορία των ελαστικών (rubber-like materials) σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά υλικών όπως είναι τα Gels. Τέτοιου τύπου υλικά είναι ο ανθρώπινος εγκέφαλος καθώς και τα νεφρά μας, των οποίων τις μηχανικές ιδιότητες θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε. Τα «σώματα» αυτά, εάν τα προσεγγίσουμε σαν υλικά δοκίμια, παρουσιάζουν σημαντικές ευαισθησίες και για το λόγο αυτό η μέτρηση τους πρέπει να υλοποιείται με μη καταστρεπτικές μεθόδους. Μία τέτοια μη καταστρεπτική για το δείγμα πειραματική μέθοδος που αποσκοπεί στον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων ενός Gel είναι η διείδυση! Έτσι, θα προτείνουμε δύο πειραματικές μεθόδους για να διειδύσουμε μέσα σε ένα Gel-like material που είναι οι ακόλουθες:

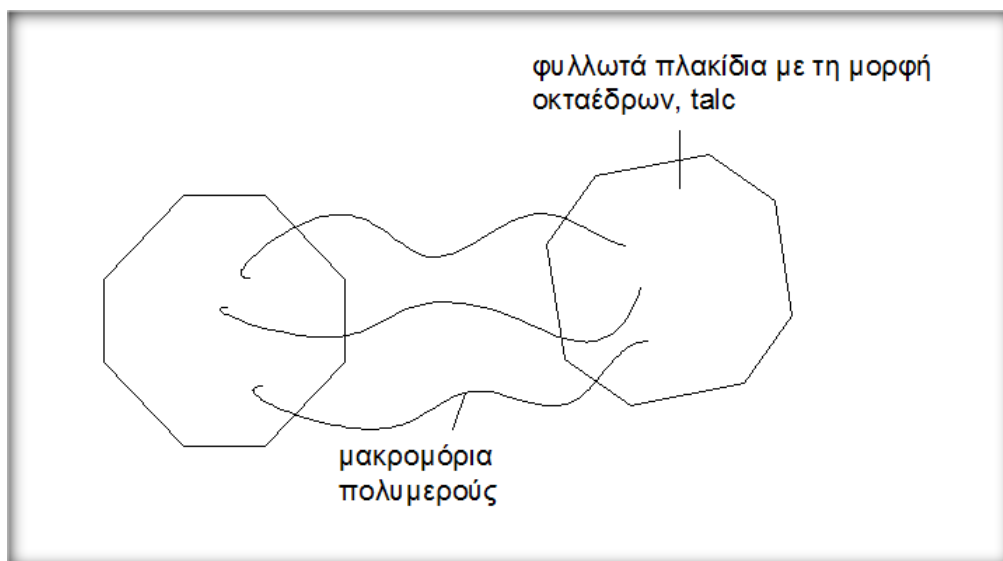
#### *Πείραμα καμπτικής διείδυσης (bending test)*

#### *Πείραμα εφελκυστικής διείδυσης (pull out test).*

Το δοκίμιο που επιλέχθηκε για τις μετρήσεις είναι ένα κοινό Gel του εμπορίου, του οποίου τα συστατικά είναι τα ακόλουθα: aqua, polyvinylpyrrolidone, carbomer, triethanolamine, propylene glycol, polysorbate 20, dimethicone copolyol, rapfum, benzyl alcohol, methylchloroisothiazolinone, methylisothiazolinone.

Για την ενίσχυση του δείγματος, έτσι ώστε να γίνει περισσότερο άκαμπτο, επιλέξαμε πούδρα τάλκης. Πρόκειται για το γνωστό Powder-talc το οποίο μπορούμε να προμηθευτούμε σε διάφορα καταστήματα. Το talc είναι ένα φυλλωτό πυριτικό ορυκτό με μία τρι-οκταεδρική σε στρώματα διάθρωση. Η χημική του σύσταση είναι  $Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$ . Η εξιδανικευμένη κρυσταλλική του δομή περιέχει μία σε στρώματα συγκρότηση από ένα «sandwich» από οξείδιο του μαγνησίου, όπως ο βουρσίτης, οκτάεδρα ανάμεσα σε τετράεδρα πυριτίου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται σαν αντί-τριβικό υλικό. Αυτό οδηγεί σε ένα ουδέτερο φορτισμένο σύστημα, με καθόλου επιφανειακό φορτίο. Σαν αποτέλεσμα, τα φυλλωτά πλακίδια είναι κρατημένα μαζί με δυνάμεις Van der Waals, που κάνουν το talc να είναι το μαλακότερο ορυκτό, χαρακτηρισμένο σαν νούμερο 1 στην κλίμακα σκληρότητας του Mohs. Επιπλέον, οι κυριότερες θέσεις για τη χημική επίθεση ή την αμφιφυλλική αντίδραση πάνω στην επιφάνεια του talc είναι οι ορυκτολογικές ατέλειες και οι αιχμές των πλακιδίων. **Το γέμισμα με talc, επομένως, μπορεί να περιορίσει την κινητικότητα και την παραμορφωσιμότητα της μήτρας του gel λόγω της εισαγωγής του μηχανικού περιορισμού-συγκράτησης.**

Έτσι, αυξάνεται η μηχανική ακαμψία, η ανθεκτικότητα, το μέτρο ελαστικότητας και η αντοχή του τελικού μίγματος, αφού μεταβάλλεται η μηχανική συμπεριφορά του υλικού.



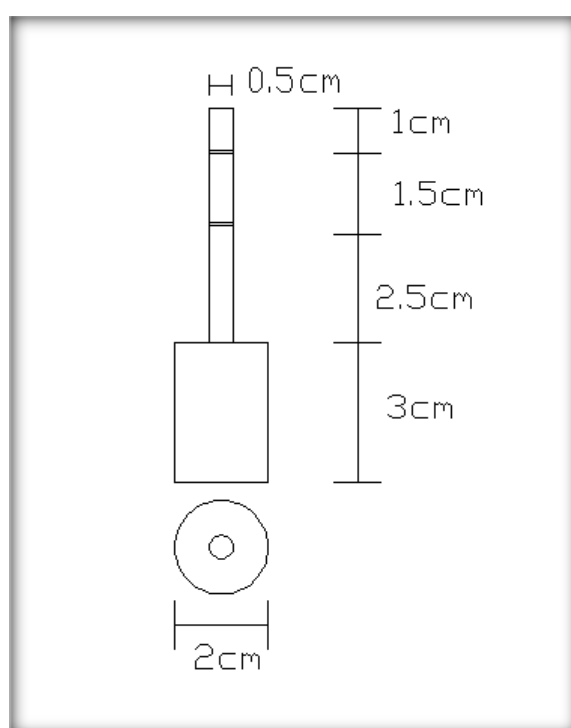
**Σχήμα 4.1.1** Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται οι συνδετήριοι δεσμοί μεταξύ του Gel και του talc. Τα μακρομόρια του πολυμερούς προσκολλώνται πάνω στα φυλλωτά πλακίδια του talc. Έτσι, προκύπτει το νέο σύνθετο υλικό που παρασκευάσαμε με αυξημένη μηχανική ακαμψία και ανθεκτικότητα.

Για την υλοποίηση των πειραμάτων που προαναφέρθηκαν χρησιμοποιήθηκαν τα εξής:

- ✓ **Ζυγός ακριβείας** με κωδικό OHAUS-CS 2000. Οι μετρήσεις στο ζυγό ακριβείας αντιστοιχούν σε γραμμάρια (gr)
- ✓ **Υπόβαθρο** με κωδικό cast acrylic sheets-set acryl
- ✓ **Μαγνητική βάση**, πάνω στην οποία τοποθετήθηκε το νήμα της στάθμης
- ✓ **Επίπεδος διεισδυτής** (flat punch) κατασκευασμένος από υλικό πολυουρεθάνης

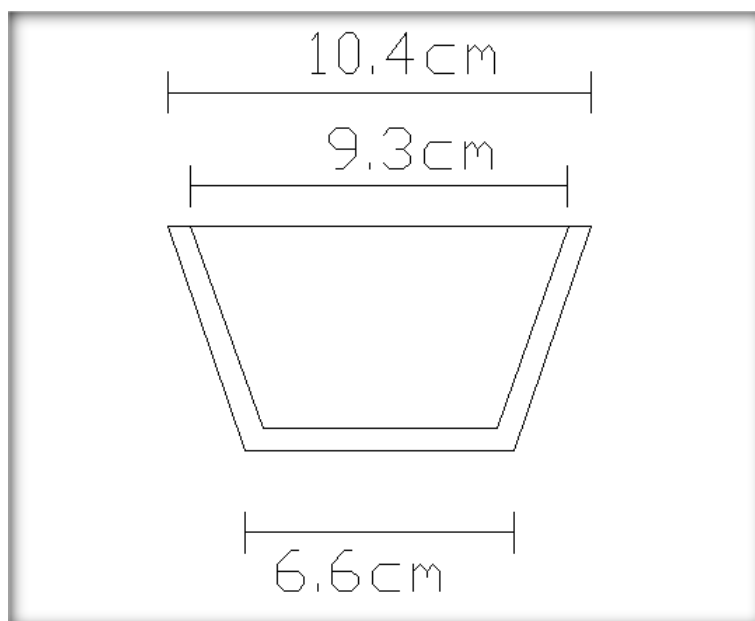
Όσον αφορά τον επίπεδο διεισδυτή (έμβολο) κατασκευάστηκε, όπως αναφέραμε παραπάνω, από πολυουρεθάνη. Η πολυουρεθάνη είναι η ένωση δύο στοιχείων της Πολυόλης και του Ισοκυανικού και ανήκει στην ευρύτερη οικογένεια των πλαστικών. Αντίθετα με τις γνωστές μέχρι σήμερα πλαστικές ύλες, η πολυουρεθάνη έχει αμέτρητες εφαρμογές και χρήσεις σε πολλαπλούς κλάδους. Σήμερα, η πολυουρεθάνη είναι ένα από τα πλέον σημαντικά και ασταθή μέλη της οικογένειας των πλαστικών, και αυτή ακριβώς η σύνθεσή της είναι που την κάνει τόσο εύχρηστη. Η πολυουρεθάνη βρίσκει εφαρμογή σε μια ευρεία γκάμα

προϊόντων, από τη δημιουργία ειδικών καλουπιών, μέχρι τη χρήση του ως μονωτικό υλικό και τη δημιουργία μηχανημάτων και επίπλων. Επίσης χρησιμοποιείται κατά κόρον στις κατασκευές για την δημιουργία θερμομονωτικών πάνελ πολυουρεθάνης. Το υλικό αυτό επιλέχθηκε έτσι ώστε να μπορεί να επικάθεται χωρίς να βυθίζεται στο ενισχυμένο Gel. Το βάρος του μετρήθηκε με ζυγό ακριβείας και με δυναμόμετρο. Οι ενδείξεις των οποίων ήταν 12 gr και 10 gr, αντίστοιχα. Στο σχήμα που ακολουθεί μπορούμε να διακρίνουμε τις ακριβείς διαστάσεις του εμβόλου, όπως αυτές δόθηκαν για την υλοποίησή του στο εργοστάσιο. Το εικονιζόμενο «θεμέλιο» σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε η επιρροή του με το σύνολο του δοχείου μέσα στο οποίο τοποθετείται το υλικό να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

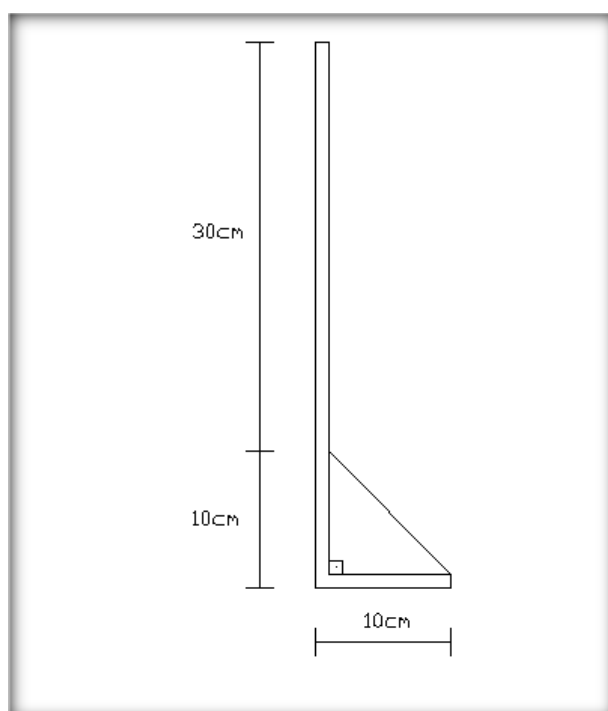


**Σχήμα 4.1.2** Στο παραπάνω σχέδιο μπορούμε να διακρίνουμε την όψη και την κάτοψη του επίπεδου δεισδυτή (flat punch). Πρόκειται για έμβολο πολυουρεθάνης, η βάση του οποίου χαρακτηρίζεται από μία κυκλική διατομή διαμέτρου 20 mm.

Στο σημείο αυτό παρατίθενται δύο σχήματα που απεικονίζουν το πήλινο δοχείο μέσα στο οποίο τοποθετήθηκε το μίγμα και το διάφανο υπόβαθρο. Στα σχήματα αυτά μπορούμε να δούμε τις διαστάσεις τους με ακρίβεια, με απώτερο στόχο την καλύτερη κατανόηση των πειραμάτων που θα ακολουθήσουν.



**Σχήμα 4.1.3** Πήλινο δοχείο μέσα στο οποίο τοποθετήθηκε το βισκοελαστικό υλικό που παρασκευάσαμε, το βάρος του οποίου έπειτα από τρεις διαδοχικές μετρήσεις προέκυψε ίσο με 173 gr. . Το δείγμα ανήκει στην κατηγορία των Gels ενισχυμένο με πούδρα τάλκης, ώστε να γίνει περισσότερο άκαμπτο. Το ύψος του δοχείου ισούται με  $h=5.8$  cm και το πάχος του τοιχώματος είναι  $c=1$  cm. Οι υπόλοιπες διαστάσεις φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.



**Σχήμα 4.1.4** Διάφανο υπόβαθρο, οι διαστάσεις του οποίου φαίνονται με ακρίβεια στην παραπάνω εικόνα. Κατά τη φάση της κατασκευής του δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στην ορθογωνικότητα και στην καθετότητα των πλευρών του.

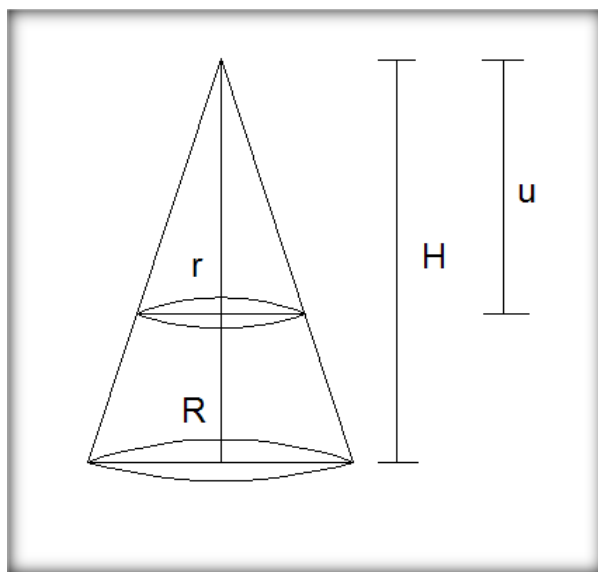
Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ορισμένες πληροφορίες και μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν πριν και κατά τη διάρκεια των πειραμάτων. Με τη χρήση φορητού Θέρμο-υγρόμετρου μετρήθηκαν οι συνθήκες θερμοκρασίας και υγρασίας, αντίστοιχα. Όσον αφορά τη θερμοκρασία μετρήθηκε ίση με 25,1 °C, ενώ το ποσοστό της υγρασίας φτάνει το 48 %. Τα πειράματα υλοποιήθηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών και Μικρομηχανικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Έχοντας ως στόχο την ομοιογένεια του τελικού προϊόντος, η παρασκευή του πραγματοποιήθηκε σε τέσσερις διαδοχικές στρώσεις. Η διαδικασία αυτή έγινε για να είναι το υλικό ομογενές, δηλαδή να εμφανίζει τις ίδιες ιδιότητες σε ολόκληρη τη μάζα του. Η ορθή ανάμιξη των δύο συστατικών (Gel και πούδρα) και των στρώσεων επιτυγχάνει την ισοτροπία του δείγματος. **Με τον όρο «ισότροπο» εννοούμε ότι το «σώμα» εμφανίζει τις ίδιες ιδιότητες σε ολόκληρη τη μάζα του.** Η συνολική μάζα του Gel μέσα στο μίγμα ισούται με 157 gr, ενώ η συνολική μάζα της πούδρας είναι 74 gr. Επομένως, η συνολική μάζα του δοκιμίου ισούται με 231 gr.

Για να προσδιορίσουμε το συνολικό όγκο του δείγματος αρκεί να υπολογίσουμε τον ολικό όγκο του δοχείου, μέσα στο οποίο τοποθετήσαμε το μίγμα. Το πήλινο δοχείο έχει σχήμα τραπεζίου. Έτσι, θα βρούμε τον όγκο του μεγάλου κώνου και θα αφαιρέσουμε τον όγκο του μικρού κώνου. Ο όγκος του κώνου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H \quad (4.1)$$

Όπου με R συμβολίζεται η ακτίνα στη βάση του κώνου και με H το συνολικό ύψος του κώνου. Αντίστοιχα, με r παριστάνεται η ακτίνα του μικρού κώνου και με u το ύψος του μικρού κώνου, όπως αυτά απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 4.1.5** Μικρός και μεγάλος κώνος.



Οι διαστάσεις του πήλινου δοχείου που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του πειράματος είναι οι εξής:

$$R = \frac{10.4}{2} = 5.2cm$$

$$h = 5.8cm$$

$$r = \frac{6.6}{2} = 3.3cm$$

Κάνοντας χρήση της ομοιότητας των τριγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος του μικρού κώνου  $u$ , όπως αυτό προκύπτει από την ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{5.2}{5.8+u} = \frac{3.3}{u}$$

Έτσι λοιπόν, προκύπτει:

$$u = 10.07cm$$

$$H = u + h = 15.8cm$$

Και με απλή αντικατάσταση προκύπτει ο όγκος του δοχείου που δίνεται παρακάτω:

$$V_{\text{minκώνου}} = \frac{1}{3} \pi r^2 u = 113.98cm^3$$

$$V_{\text{maxκώνου}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = 447.17cm^3$$

$$V_{\text{δοχείου}} = V_{\text{maxκώνου}} - V_{\text{minκώνου}} = 333.19cm^3$$

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την πυκνότητα  $\rho$  του υλικού, που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho = \frac{M_{\text{ολ}}}{V_{\text{δοχείου}}} = \frac{231}{333.19} = 0.7gr/cm^3$$

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύνθετο αυτό υλικό έχει πυκνότητα σχεδόν ίση με την αντίστοιχη πυκνότητα του νερού, που είναι ίση με  $1gr/cm^3$ .

Η διαδικασία παρασκευής του τελικού μίγματος διήρκησε 2 ώρες. Ακολούθησε στρώσιμο της εξωτερικής επιφάνειας του δοκιμίου με λείο λεπτό ξύλο, ώστε να είναι λεία η τελική επιφάνεια του ενισχυμένου Gel.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε μια σειρά διαδοχικών πειραμάτων εφελκυστικής και καμπτικής διείδυσης. Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων ήταν αναγκαία η χρήση του δυναμόμετρου, μέσω του οποίου επιβάλλεται η δύναμη στο διείδυτη και κατ επέκταση στο δείγμα.

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε το πείραμα της **εφελκυστικής διείδυσης**. Αρχικά, το έμβολο παραμένει ακίνητο και επικάθεται απλά στην εξωτερική επιφάνεια του παρασκευασμένου υλικού (απαραμόρφωτη κατάσταση του δοκιμίου). Στη συνέχεια, ο επίπεδος διείδυτης δέχεται μία κατακόρυφη εφελκυστική δύναμη μέσω του δυναμόμετρου. Η επιφάνεια του ενισχυμένου Gel προσκολλάται στη βάση του εμβόλου και με αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται η μέτρηση. Η δύναμη που επιβάλλουμε στο «σώμα» είναι γνωστή και λαμβάνοντας μία φωτογραφία στην παραμορφωμένη κατάσταση (spatial configuration) του δείγματος υπολογίζουμε την σχετική μετατόπιση. Με παρόμοιο τρόπο υλοποιήθηκε το πείραμα της **καμπτικής διείδυσης**. Αρχικά, ο επίπεδος διείδυτης εδράζεται απλά στην επιφάνεια του παρασκευασμένου υλικού (reference configuration). Στη συνέχεια, επιβάλλουμε στο έμβολο μία οριζόντια δύναμη, την οποία μπορούμε να μετρήσουμε με το δυναμόμετρο. Η δύναμη αυτή, έχει ως αποτέλεσμα τη στροφή του εμβόλου σε σχέση με την αρχική του κατάσταση και φωτογραφίζοντας το σύστημα του υλικού με το διείδυτη στην παραμορφωμένη κατάσταση μπορούμε να υπολογίσουμε τη στροφή. Ολοκληρώνοντας την περιγραφή των πειραματικών διαδικασιών παραθέτουμε τα μεγέθη των δυνάμεων που επιβάλλαμε μέσω του δυναμόμετρου.

**Πίνακας 4.1.1** Στον παραπάνω πίνακα μπορούμε να δούμε τα μεγέθη των δυνάμεων που επιβλήθηκαν κατά τη διάρκεια των πειραμάτων. Παρατηρώντας τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι για να εφελκύσουμε το μίγμα απαιτήθηκε μεγαλύτερη δύναμη (20 gr). Αυτό συμβαίνει διότι κατά τον ελκυσμό του ενισχυμένου Gel πρέπει να ανασηκωθεί ολόκληρη η βάση του διείδυτη, ενώ στην περίπτωση της κάμψης ανασηκώνεται το ένα τμήμα. Έτσι, στην περίπτωση του ελκυσμού το υλικό αντιστέκεται περισσότερο στην παραμόρφωση που προσπαθούμε να του επιβάλλουμε μέσω της δύναμης.

Πείραμα	Επιβαλλόμενη δύναμη
Εφελκυστική διείδυση	20 gr
Καμπτική διείδυση (1°)	6 gr
Καμπτική διείδυση (2°)	2 gr

Κατά τη διάρκεια των πειραματικών διαδικασιών έγινε λήψη μιας σειράς από φωτογραφίες πριν και μετά την επιβολή του φορτίου. Μετά το πέρας της διαδικασίας οι εικόνες αυτές εκτυπώθηκαν. Ακολούθησε, λοιπόν, μια σειρά μετρήσεων πάνω στις φωτογραφίες με χρήση της γεωμετρίας και με

τον τρόπο αυτό προέκυψαν οι σχετικές μετατοπίσεις αλλά και οι στροφές του επίπεδου κυκλικού διεισδυτή. Ακολουθεί, αναλυτική περιγραφή για τον υπολογισμό της μετατόπισης στο πείραμα της εφελκυστικής διείσδυσης (τα κάτωθι βήματα εκτελούνται πάνω στις φωτογραφίες που παρατίθενται στο παράρτημα στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου):

**Βήμα 1ο:** Σχεδιασμός της έλλειψης που προκύπτει στο ανώτερο τμήμα του πήλινου δοχείου και εύρεση του κέντρου της. Στη συνέχεια, φέρνουμε ευθεία με τυχαία κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο, η οποία πρέπει να διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης.

**Βήμα 2ο:** Σχεδιασμός της έλλειψης που προκύπτει στη βάση του εμβόλου και εύρεση του κέντρου της. Έτσι, φέρνουμε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της εν λόγω έλλειψης, η οποία είναι παράλληλη με εκείνη της έλλειψης που προκύπτει στο ανώτερο τμήμα του πήλινου δοχείου. Φέρνοντας μία οριζόντια ευθεία εφαπτόμενη στην έλλειψη του πήλινου δοχείου, βρίσκουμε το σημείο τομής της οριζόντιας με την ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της εν λόγω έλλειψης. Από το σημείο τομής φέρνουμε μία κατακόρυφη ευθεία, την οποία και προεκτείνουμε.

**Βήμα 3ο:** Σχεδιασμός της έλλειψης που προκύπτει στο άνω τμήμα του εμβόλου ύψους 3cm από τη βάση του. Βρίσκουμε το κέντρο της έλλειψης και φέρνουμε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της εν λόγω έλλειψης, η οποία είναι παράλληλη με εκείνη της έλλειψης που προκύπτει στη βάση του εμβόλου. Προεκτείνουμε αυτή την ευθεία και βρίσκουμε το σημείο τομής της με την κατακόρυφη ευθεία που φέραμε προηγουμένως. Τέλος, από το σημείο τομής φέρνουμε οριζόντια ευθεία και σημειώνουμε το σημείο πάνω στο ξύλινο αντικείμενο αναφοράς που βρίσκεται πάνω στη μαγνητική βάση και πίσω από το διάφανο υπόβαθρο.

Την ίδια ακριβώς διαδικασία κάνουμε και για τις δύο φάσεις του πειράματος, δηλαδή πριν και μετά την επιβολή της δύναμης. Μετράμε το μήκος της ξύλινης επιφάνειας αναφοράς, κάνουμε τις μετατροπές όσον αφορά την κλίμακα και βρίσκουμε τη διαφορά στο μήκος. Αυτή, λοιπόν, είναι η σχετική μετατόπιση στο πείραμα του εφελκυσμού.

Στο πείραμα της καμπτικής διείσδυσης ο υπολογισμός της στροφής λόγω της επιβολής μίας οριζόντιας δύναμης στο έμβολο προκύπτει από τη μέτρηση της στροφής με μοιρογνωμόνιο. Η στροφή είναι αποτυπωμένη στη φωτογραφία. Έτσι λοιπόν, η γωνία που μετράμε είναι εκείνη που σχηματίζεται μεταξύ της κατακόρυφης διεύθυνσης και του άξονα του εμβόλου στην τελική παραμορφωμένη κατάσταση. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία για τη μέτρηση της στροφής είναι απλούστερη και δεν απαιτεί ειδική γεωμετρική λύση. Κάνοντας εφαρμογή των παραπάνω διεργασιών προκύπτουν τα αποτελέσματα που αφορούν τα τρία διαδοχικά πειράματα.

### **Πείραμα καμπτικής διείδυσης (1<sup>ο</sup>)**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην άνω οπή).

Αρχική στροφή-κλίση εμβόλου:  $\alpha_x = 0^\circ$

Τελική στροφή-κλίση εμβόλου:  $\alpha_x = 15^\circ$

### **Πείραμα εφελκυστικής διείδυσης**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην άνω οπή).

Αρχικό μήκος πάνω σε ξύλινη επιφάνεια:  $\delta_1 = 2.5 \text{ cm}$

Στη συνέχεια, παρατίθενται τα στοιχεία για τη μετατροπή των διαστάσεων της φωτογραφίας σε πραγματικές διαστάσεις. Το ύψος του κατώτερου τμήματος του διειδυτή (εννοούμε το τμήμα που η διάμετρός του παραμένει σταθερή και ίση με τη διάμετρο της βάσης του εμβόλου) ισούται με 4.8 cm στην κλίμακα σχεδίου, ενώ το πραγματικό ύψος του ίδιου τμήματος ισούται με 3 cm.

Τελικό μήκος από προβολή πάνω στην ξύλινη επιφάνεια  $\delta_2 = 3.2 \text{ cm}$

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε ορισμένα στοιχεία, ώστε να μετατρέψουμε τις διαστάσεις της φωτογραφίας στις αντίστοιχες πραγματικές. Το ύψος του κατώτερου τμήματος εμβόλου (σταθερή διάμετρος) είναι 5.5 cm στην κλίμακα σχεδίου, ενώ το πραγματικό ύψος του ίδιου τμήματος ισούται με 3 cm.

### **Πείραμα καμπτικής διείδυσης (2<sup>ο</sup>)**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην κάτω οπή).

Αρχική στροφή-κλίση εμβόλου  $\alpha_x = 0^\circ$

Τελική στροφή-κλίση εμβόλου  $\alpha_x = 11.5^\circ$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν, τις μετρήσεις θα υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου Gel χρησιμοποιώντας εξισώσεις που αντιστοιχούν στην καθεμία από τις παραπάνω μεθοδολογίες. Η εξίσωση που εφαρμόζεται στο πείραμα της καμπτικής διείδυσης για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας είναι η ακόλουθη:

$$a_x = \frac{9M}{16a^3E} \quad (4.2)$$

Όπου με  $\alpha_x$  συμβολίζεται η στροφή που επιβάλλουμε, με  $M$  η αντίστοιχη ροπή, με  $a$  η ακτίνα του επίπεδου κυκλικού διειδυτή και με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας. Όσον αφορά το πείραμα της εφελκυστικής διείδυσης, η

προτεινόμενη σχέση για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας είναι η εξής:

$$K = 2\pi = \frac{P}{Ga\delta} \quad (4.3)$$

Όπου με  $P$  συμβολίζεται η επιβαλλόμενη εφελκυστική δύναμη, με  $\delta$  η αντίστοιχη μετατόπιση, με  $a$  η ακτίνα επαφής του διεισδυτή και με  $G$  το μέτρο διάτμησης που συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας. Η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη γράφεται ως εξής:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3} (\text{ασυμπίεστα!}) \quad (4.4)$$

Οι παραπάνω σχέσεις, εκτός από τα γραμμικά ελαστικά υλικά, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για υπέρ-ελαστικά δείγματα στην περίπτωση που επιβάλλουμε σχετικά μεγάλες παραμορφώσεις. **Στα πειράματα που εκτελέστηκαν υπολογίστηκε το αρχικό μέτρο ελαστικότητας!** Αυτό επιτυγχάνεται εκτελώντας σχετικά γρήγορα τα πειράματα, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επιρροή της βισκότητας (ερπυσμός ή χαλάρωση).

#### 4.1.1 Χρήση των αναλυτικών σχέσεων για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας

##### **Πείραμα καμπτικής διείσδυσης (1<sup>ο</sup>)**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην άνω οπή).

Μοχλοβραχίονας:  $l = 7 \text{ cm} = 0.07 \text{ m}$

Δύναμη:  $P = 6 \text{ gr} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0.05886 \text{ N}$  (1 kg αντιστοιχεί σε 9.81 N)

Ροπή:  $M = Pl = 4.1202 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$

Ακτίνα επίπεδου κυκλικού διεισδυτή:  $a = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$

Στροφή διεισδυτή:  $\alpha_x = 15^\circ = 0.26167 \text{ rad}$

Επιλύοντας την εξίσωση που εφαρμόζεται για το πείραμα της καμπτικής διείσδυσης και αναφέρθηκε προηγουμένως, προκύπτει τελικά ότι το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος ισούται με  $E = 8.857 \text{ kPa}$ .

##### **Πείραμα εφελκυστικής διείσδυσης**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην άνω οπή).

Σε αντίθεση με το προηγούμενο πείραμα, σε αυτή την περίπτωση διείσδυσης του εμβόλου στο δείγμα επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πραγματική μετατόπιση  $\delta$  του διεισδυτή, εξαιτίας της επιβαλλόμενης εφελκυστικής δύναμης. Έτσι, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τα

πραγματικά μήκη της ξύλινης επιφάνειας  $\delta_1$  και  $\delta_2$  εφαρμόζοντας απλή μέθοδο των τριών. Το αρχικό μήκος της ξύλινης επιφάνειας στη φωτογραφία είναι ίσο με  $\delta_1 = 2.5 \text{ cm}$ . Το ύψος του κατώτερου τμήματος του διεισδυτή (διαμέτρου ίση με τη βάση του εμβόλου) ισούται με  $4.8 \text{ cm}$  στην κλίμακα σχεδίου, ενώ το πραγματικό ύψος γνωρίζουμε ότι είναι  $3 \text{ cm}$ . Εφαρμόζοντας την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει το πραγματικό αρχικό μήκος της ξύλινης επιφάνειας που ισούται με  $\delta_1 = 1.5625 \text{ cm}$ . Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του μεγέθους  $\delta_2$ . Το τελικό μήκος της ξύλινης επιφάνειας στη φωτογραφία ισούται με  $\delta_2 = 3.2 \text{ cm}$ . Το ύψος του κατώτερου τμήματος του διεισδυτή στην κλίμακα σχεδίου ισούται με  $5.5 \text{ cm}$ , ενώ το αντίστοιχο πραγματικό ύψος είναι  $3 \text{ cm}$ . Εφαρμόζοντας λοιπόν, την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει ότι το πραγματικό τελικό μήκος της ξύλινης επιφάνειας ισούται με  $\delta_2 = 1.7455 \text{ cm}$ . Συνεπώς, η πραγματική μετατόπιση του διεισδυτή εξαιτίας της εφελκυστικής δύναμης ισούται με  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = 0.183 \text{ cm} = 1.83 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Εφελκυστική δύναμη:  $P = 20 \text{ gr} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0.1962 \text{ N}$

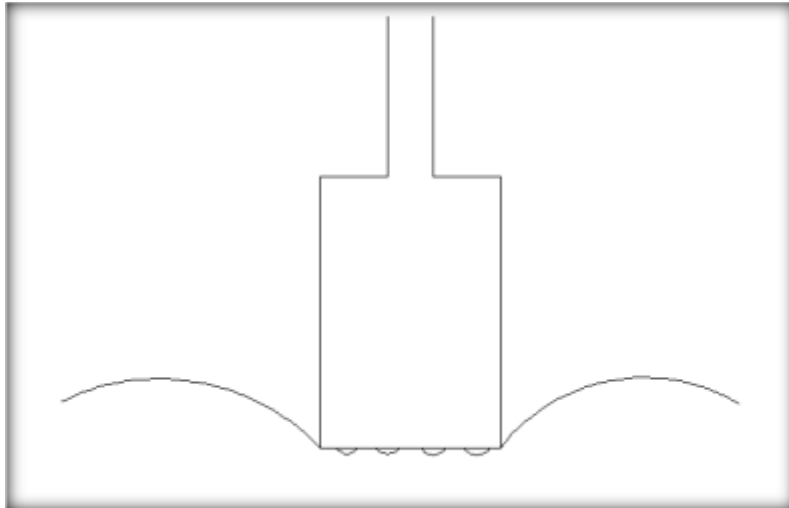
Ακτίνα επίπεδου κυκλικού διεισδυτή:  $a = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$

Πραγματική μετατόπιση του διεισδυτή:  $\delta = 1.83 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Αφού γνωρίζουμε τις ανωτέρω ποσότητες μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση που αντιστοιχεί στο πείραμα της εφελκυστικής διείσδυσης για να υπολογίσουμε τελικά το μέτρο διάτμησης  $G$  και κατ'επέκταση το μέτρο ελαστικότητας  $E$ . Έτσι προκύπτει ότι το μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου Gel ισούται με  $E = 5.122 \text{ kPa}$ .

**Σημείωση:** Για την περίπτωση ασυμπίεστων υλικών, ο συντελεστής Poisson  $\nu$  λαμβάνεται ίσος με  $0.5$ .

Τα αποτελέσματα που αναγράφονται παραπάνω και αφορούν το μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου με πούδρα τάλκης Gel είναι συγκρίσιμα με πολύ μικρή απόκλιση. Πιθανή αιτία της μικρής αυτής διαφοροποίησης των δύο τιμών ( $E_b = 8.857 \text{ kPa}$  και  $E_t = 5.122 \text{ kPa}$ ) είναι τα κενά που βρίσκονται στην επιφάνεια έδρασης του διεισδυτή (έμβολο). Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι διαφορές ως προς τα κενά στη βάση του επίπεδου διεισδυτή, τα οποία αποτελούν την πιθανότερη αιτία της διαφοροποίησης του μέτρου ελαστικότητας.

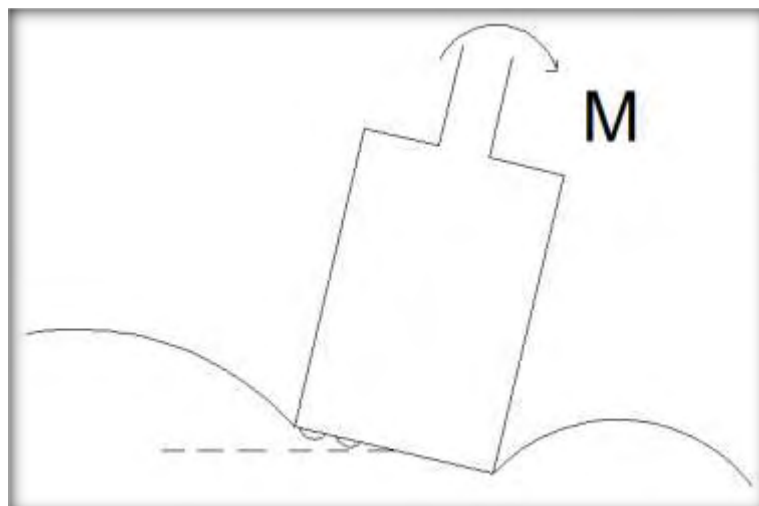


**Σχήμα 4.1.1.1** Επίπεδος κυκλικός διεισδυτής (flat punch) κατά τη διάρκεια του πειράματος της εφελκυστικής διείσδυσης. Στην έδραση του εμβόλου φαίνονται κάποια κενά, τα οποία έχουν δημιουργηθεί στο υλικό. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι τα κενά αυτά έχουν εμβαδόν σε ποσοστό  $\varepsilon$ .

Όσον αφορά το πείραμα του εφελκυσμού ισχύει η ισότητα που ακολουθεί:

$$E_t = E_0 (1 - \varepsilon) \quad (4.5)$$

Όπου με  $E_t$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, όπως αυτό προκύπτει στο πείραμα του εφελκυσμού, ενώ με  $E_0$  το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Το ποσοστό του εμβαδού των κενών στην έδραση του διεισδυτή παριστάνεται με  $\varepsilon$  στην παραπάνω σχέση.



**Σχήμα 4.1.1.2** Επίπεδος κυκλικός διεισδυτής (flat punch) κατά τη διάρκεια του πειράματος της καμπτικής διείσδυσης. Σε αντίθεση με το προηγούμενο σχήμα, μπορούμε να δούμε ότι ο αριθμός των κενών  $\varepsilon$  στην έδραση του εμβόλου, που επηρεάζουν εφελκυστικά το πρόβλημα, μειώνεται περίπου στο μισό. Αυτό οφείλεται στη στροφή του διεισδυτή εξαιτίας της επιβαλλόμενης

ροπής. Η επιβαλλόμενη αυτή ροπή «αναγκάζει» τελικά το έμβολο να ανασηκωθεί και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μισή επιφάνεια της έδρασης να μην εφαρμόζεται πάνω στο υλικό.

Όσον αφορά το πείραμα της καμπτικής διείδυσης ισχύει η ισότητα που ακολουθεί:

$$E_b = E_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (4.6)$$

Όπου με  $E_b$  συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, όπως αυτό προκύπτει στο πείραμα της καμπτικής διείδυσης, ενώ με  $E_0$  το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Το ποσοστό του εμβαδού των κενών στην έδραση του διειδυτή παριστάνεται με  $\varepsilon$  στην παραπάνω σχέση. Εάν διαιρέσουμε λοιπόν, κατά μέλη τις δύο σχέσεις που αναγράφονται παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\frac{E_b}{E_t} = \frac{\left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{(1 - \varepsilon)} \quad (4.7)$$

Εάν αντικαταστήσουμε τα αποτελέσματα των μέτρων ελαστικότητας που βρήκαμε προηγουμένως ( $E_b=8.857$  kPa και  $E_t=5.122$  kPa), στην περίπτωση που η θέση της κλωστής βρίσκεται στην άνω οπή, προκύπτει τελικά το εμβαδόν των κενών  $\varepsilon=0.59$  στην επιφάνεια έδρασης του επίπεδου διειδυτή. Επομένως, το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου Gel που προκύπτει από το πείραμα του εφελκυσμού είναι ίσο με  **$E_0=12.493$  kPa**. Αντίστοιχα με προηγουμένως, για το πείραμα της καμπτικής διείδυσης προκύπτει ότι το πραγματικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι  **$E_0=12.563$  kPa**. **Πράγματι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πραγματική τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E_0$  είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις διείδυσης που περιγράφηκαν παραπάνω.** Επομένως, το πείραμα ήταν επιτυχές και το αποτέλεσμα επαληθεύτηκε και με τις δύο πειραματικές μεθόδους διείδυσης στο υλικό.

### **Πείραμα καμπτικής διείδυσης (2<sup>ο</sup>)**

(Η θέση της κλωστής, η οποία συνδέει το έμβολο με το δυναμόμετρο, βρίσκεται στην κάτω οπή).

Μοχλοβραχίονας:  $l = 5.5$  cm = 0.055 m

Δύναμη:  $P = 2$  gr =  $2 \cdot 10^{-3}$  kg = 0.01962 N

Ροπή:  $M = Pl = 1.0791 \cdot 10^{-3}$  Nm

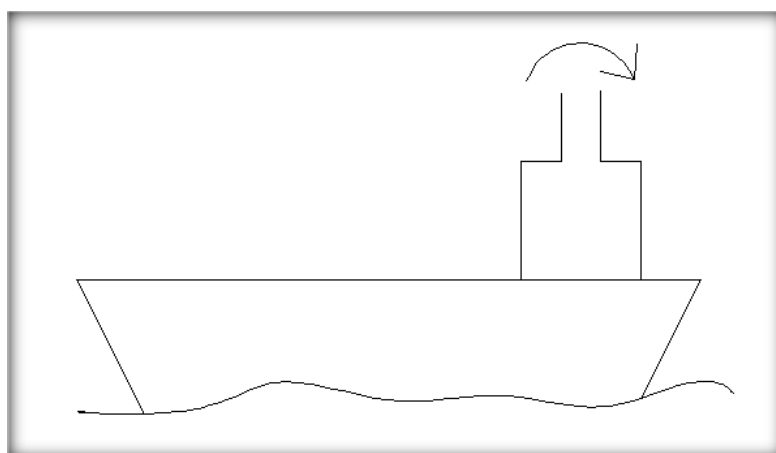
Ακτίνα επίπεδου κυκλικού διειδυτή:  $a = 1$  cm = 0.01 m

Στροφή εμβόλου:  $\alpha_x = 11.5^\circ = 0.2006$  rad



Επιλύοντας την εξίσωση που εφαρμόζεται για το πείραμα της καμπτικής διείσδυσης και αναφέρθηκε προηγουμένως, προκύπτει τελικά ότι το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος ισούται με  $E = 3 \text{ kPa}$ .

Έτσι λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου Gel σχεδόν ταυτίζεται με εκείνο που προέκυψε από τα δύο προηγούμενα πειράματα, αλλά λίγο μικρότερο σε σχέση με το αντίστοιχο που υπολογίστηκε προηγουμένως. Η μείωση αυτή δηλώνει ότι το μετρούμενο δείγμα είναι πιο μαλακό και πιο εύκαμπτο συγκριτικά με τα προηγούμενα. Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβεί! **Η απόκλιση της τιμής οφείλεται στην επιρροή του συνόρου.** Πιο συγκεκριμένα, το έμβολο τοποθετήθηκε κοντά στο άκρο του πήλινου δοχείου, δηλαδή κοντά στην περιοχή του συνόρου. Η πλευρά του διεισδυτή που ανασηκώνεται εξαιτίας της επιβολής της ροπής συνορεύει με μεγαλύτερη επιφάνεια του υλικού σε σχέση με τα προηγούμενα πειράματα όπου το έμβολο ήταν τοποθετημένο στο κέντρο του δείγματος, με αποτέλεσμα το μέτρο ελαστικότητας που υπολογίσαμε να είναι μικρότερο και το υλικό να είναι περισσότερο εύκαμπτο.



**Σχήμα 4.1.1.3** Επίπεδος κυκλικός διεισδυτής που επικάθεται κοντά στο σύνορο του πήλινου δοχείου. Η οριζόντια δύναμη που επιβλήθηκε στο έμβολο, είχε ως συνέπεια να ανασηκωθεί ως προς την αριστερή πλευρά η βάση του «θεμελίου». Ο διεισδυτής, σε αυτήν την περίπτωση, συνορεύει με αρκετά μεγάλη επιφάνεια του μετρούμενου υλικού. Έτσι, το παρασκευασμένο μίγμα παρουσιάζει μεγαλύτερη ευκαμψία λόγω της επιρροής του συνόρου!

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο, αξίζει να αναφέρουμε σε μορφή πίνακα ορισμένες ενδεικτικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας, που αφορούν τα εσωτερικά και τα εξωτερικά όργανα του ανθρώπου καθώς και άλλων ζωικών οργανισμών.

**Πίνακας 4.1.1.1** Ενδεικτικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας, που αφορούν τα εσωτερικά και τα εξωτερικά όργανα του ανθρώπου καθώς και άλλων ζωικών οργανισμών.

<b>Ζωτικό όργανο</b>	<b>Μέτρο ελαστικότητας E</b>
Συκώτι γουρουνιού	0.11 έως 4.0 MPa
Συκώτι ανθρώπου	0.27 MPa
Πόδι ανθρώπου	42.9 MPa
Εγκέφαλος ανθρώπου	243 Pa

## 4.2 Περίσφιξη δοκιμίου

**Σ**ε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε εκτενώς το πρόβλημα της προέντασης και την επιρροή που έχει η επιβολή κάποιας αρχικής εφελκυστικής δύναμης στις μηχανικές ιδιότητες του δοκιμίου. Είδαμε λοιπόν, ότι το «τέντωμα» του δοκιμίου ως προς τη μία ή και τις δύο διευθύνσεις αυξάνει τη σκληρότητα του δείγματος και κατ'επέκταση το μέτρο ελαστικότητας. Το υλικό γίνεται πιο άκαμπτο σε σχέση με την αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση.

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση που εκφράζει τη μεταβολή του λόγου του μέτρου ελαστικότητας προεντεταμένου και μη δοκιμίου ( $E^*/E_0$ ) σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$  για το μοντέλο neo-Hookean, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η καμπύλη για τιμές  $\lambda < 1$  παρουσιάζει ένα κρίσιμο σημείο. Η ελάχιστη τιμή του  $\lambda$  στο γράφημα λαμβάνεται λίγο μεγαλύτερη του  $2/3$ . Αυτό συμβαίνει διότι για την εν λόγω τιμή ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας μηδενίζεται. Εμφανίζεται λοιπόν, ένα κρίσιμο σημείο και εξαιτίας αυτού χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά το θλιπτικό φορτίο που θα επιβληθεί στο δοκίμιο κατά την περίσφιξη. **Χρησιμοποιώντας τον όρο «κρίσιμο σημείο» εννοούμε ότι με την επιβολή μεγάλης περίσφιξης στο δείγμα παρουσιάζεται κάποια μορφή αστάθειας στο υλικό.** Αντίθετα, αυτό δε συμβαίνει όταν το θλιπτικό φορτίο που επιβάλλουμε στο δοκίμιο είναι μικρό. Πράγματι, αυτό αποδεικνύεται και πειραματικά όπως θα δούμε παρακάτω.

Έτσι λοιπόν, επιλέξαμε ως δείγμα ένα κοινό γιαούρτι αγελάδας του εμπορίου βάρους 200 g και πάνω σε αυτό τοποθετήσαμε ένα κεράσι. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση ( $\lambda=1$ ), το κεράσι επικάθεται πάνω στην επιφάνεια του γιαουρτιού δίχως να εισχωρεί μέσα σε αυτό. Στο σημείο αυτό, αρχίζουμε να περισφίγγουμε περιμετρικά και ομοιόμορφα το δείγμα ( $\lambda < 1$ ). Αρχικά, επιβάλλουμε μικρή περίσφιξη (μικρό θλιπτικό φορτίο) στο υλικό και το αφήνουμε να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Εάν παρατηρήσουμε την επιφάνεια του γιαουρτιού θα δούμε ότι το κεράσι συνεχίζει να επικάθεται πάνω στο υλικό, ενώ η επιφάνεια του δοκιμίου δεν έχει υποστεί σοβαρές μεταβολές. Στη συνέχεια, περισφίγγουμε ξανά το δείγμα, περιμετρικά και ομοιόμορφα, όπως και προηγουμένως. Σε αυτή την περίπτωση το θλιπτικό φορτίο που επιβάλλουμε είναι πολύ μεγάλο. Το «σώμα» όντας ασυμπίεστο ανυψώνεται σημαντικά δίχως να διαφύγει ποσότητα υλικού. Αφήνουμε λοιπόν, το δείγμα να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η εξωτερική επιφάνεια του γιαουρτιού παρουσιάζει έντονες σχισμές και ρηγματώσεις, ενώ το κεράσι, που αρχικά ήταν τοποθετημένο πάνω στην επιφάνεια, αρχίζει να βυθίζεται μέσα στο υλικό. Η συμπεριφορά αυτή του υλικού υπό συνθήκες έντονης θλιπτικής παραμόρφωσης δηλώνει την αστάθεια του.

Το πείραμα που περιγράφηκε προηγουμένως μπορεί να δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά των ανθρώπινων ιστών, των οποίων η ελαστικότητα δεν απέχει σημαντικά από εκείνη του γιαουρτιού. Έτσι λοιπόν, σχετικά με τους ανθρώπινους ιστούς, οι υπεύθυνοι θα πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί και να αποφεύγουν οποιαδήποτε

συμπίεση αυτών. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν υπάρχει οποιοδήποτε ουσία πάνω σε αυτόν, την οποία δε μπορούμε να διακρίνουμε με γυμνό μάτι, υπάρχει κίνδυνος να εισέλθει μέσα στον ιστό και να τον καταστρέψει.

Αντίστοιχη περίπτωση αποτελεί ένα αντίσωμα τοποθετημένο πάνω σε ένα βακτήριο. Εάν το βακτήριο υποστεί συμπίεση με κάποιο τρόπο, το αντίσωμα μπορεί να εισέλθει μέσα σε αυτό και να το καταστρέψει!

## Παράρτημα Ν

### 4.3 Καμπτική και εφελκυστική διείδυση σε δοκίμιο τύπου Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης (Powder-talc)



**Εικόνα 4.3.1** Έμβολο με επίπεδη βάση (flat punch) κατασκευασμένο από πολυουρεθάνη που χρησιμοποιήθηκε ως διειδυτής για τη μέτρηση των μηχανικών ιδιοτήτων σε δοκίμιο τύπου Gel. Η πολυουρεθάνη είναι η ένωση δύο στοιχείων της Πολυόλης και του Ισοκυανικού και ανήκει στην ευρύτερη οικογένεια των πλαστικών. Αντίθετα με τις γνωστές μέχρι σήμερα πλαστικές ύλες, η πολυουρεθάνη έχει αμέτρητες εφαρμογές και χρήσεις σε πολλαπλούς κλάδους. Σήμερα, η πολυουρεθάνη είναι ένα από τα πλέον σημαντικά και ασταθή μέλη της οικογένειας των πλαστικών, και αυτή ακριβώς η σύνθεσή της είναι που την κάνει τόσο εύχρηστη. Όσον αφορά τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν, είναι δύο και είναι τα εξής: (α) πείραμα εφελκυσμού (pull out test) και (β) πείραμα καμπτικής διείδυσης (bending test). Το βάρος του εμβόλου ισούται με 12 gr, υπολογισμένο με ζυγό ακριβείας με κωδικό OHAUS – CS 2000. Αντίθετα, το βάρος του εμβόλου με τη χρήση δυναμόμετρου υπολογίστηκε ίσο με 10 gr. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στη γεωμετρική ευθυγράμμιση κατά τη φάση της κατασκευής του, δηλαδή δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην καθετότητα και την παραλληλία των τμημάτων που το αποτελούν. Το υλικό παρασκευής του εμβόλου δέχθηκε τέτοια κατεργασία, ώστε η συνολική του επιφάνεια και κυρίως η επιφάνεια της βάσης του να είναι λεία. Το εικονιζόμενο έμβολο κατασκευάστηκε σε εργοστάσιο στην περιοχή του Βόλου Μαγνησίας.



**Εικόνα 4.3.2** Ζυγός ακριβείας με κωδικό OHAUS-CS 2000. Ο εικονιζόμενος ζυγός χρησιμοποιήθηκε πριν την υλοποίηση των πειραμάτων (pull out test και bending test) για τη μέτρηση του βάρους των συστατικών που αποτελούν το σύνθετο υλικό που παρασκευάστηκε (Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης).



**Εικόνα 4.3.3** Δοχείο μέσα στο οποίο τοποθετήθηκε ορισμένη ποσότητα πούδρας (powder-talc), βασικό συστατικό για την παρασκευή του τελικού μετρούμενου δείγματος. Το εικονιζόμενο άδειο δοχείο ( χωρίς το βάρος του Powder-talc ) έχει βάρος ίσο με 3 gr, έπειτα από τρεις διαδοχικές μετρήσεις. Αντίθετα, το συνολικό βάρος του δοχείου μέσα στο οποίο έχει τοποθετηθεί Powder-talc μετρήθηκε ίσο με 130 gr. Επομένως, το συνολικό βάρος της πούδρας που εμπεριέχεται στο δοχείο ισούται με 127 gr ( $130 \text{ gr} - 3 \text{ gr}$ ).



**Εικόνα 4.3.4** Πήλινο δοχείο, μέσα στο οποίο τοποθετήθηκε το μετρούμενο δείγμα. Πρόκειται για ένα υλικό αποτελούμενο από Gel αναμεμιγμένο με πούδρα τάλκης. Προτού γίνει η ανάμιξη των υλικών μέσα στο δοχείο, πραγματοποιήθηκε πολύ καλός καθαρισμός του εσωτερικού τμήματος του δοχείου. Αυτό συνέβη για να απομακρυνθούν τυχόν ουσίες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν δυσμενώς τη σύσταση και την ομοιογένεια του υπό εξέταση δείγματος.



**Εικόνα 4.3.5** Μαγνητική βάση πάνω στην οποία τοποθετήθηκε το νήμα της στάθμης. Το νήμα της στάθμης που επιλέχθηκε έχει σχετικά μικρές διαστάσεις όσον αφορά το τμήμα του κώνου, ενώ η κλωστή που συγκρατεί τον κώνο έχει τα εξής χαρακτηριστικά: λεπτή, ισχυρή και με έντονο χρώμα, για να προσδιορίζεται εύκολα το κατακόρυφο σύστημα συντεταγμένων. Το σύστημα

αυτό δημιουργήθηκε για να δείχνει την κατακόρυφη διάσταση, έτσι ώστε να γίνουν σωστά οι μετρήσεις της στροφής του εμβόλου και να προκύψουν τα σωστά αποτελέσματα ως προς το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.



**Εικόνα 4.3.6** Στην παραπάνω φωτογραφία απεικονίζεται το Gel, το οποίο επιλέχθηκε ως το βασικό συστατικό του υλικού που παρασκευάσαμε. Πρόκειται για ένα κοινό Gel του εμπορίου και μπορούμε να το προμηθευτούμε σε διάφορα καταστήματα. Τα συστατικά του αναγράφονται στο περιτύλιγμα του δοχείου και είναι τα εξής : aqua, polyvinylpyrrolidone, carbomer, triethanolamine, propylene glycol, polysorbate 20, dimethicone copolyol, rapfum, benzyl alcohol, methylchloroisothiazolinone, methylisothiazolinone.





**Εικόνα 4.3.7** Στην παραπάνω φωτογραφία απεικονίζεται το τελικό μίγμα που παρασκευάστηκε. Στο βάθος της φωτογραφίας φαίνεται το διάφανο υπόβαθρο (cast acrylic sheets-Setacryl) και η μαγνητική βάση πάνω στην οποία τοποθετείται το νήμα της στάθμης.



**Εικόνα 4.3.8** Απεικόνιση του συστήματος πριν την υλοποίηση του πειράματος της καμπτικής διεύθυνσης (τοποθετημένη κλωστή στην άνω οπή του επίπεδου διευσδυτή). Το επίπεδο έμβολο (flat punch) πολυουρεθάνης επικάθεται απλά πάνω στο δοκίμιο τύπου Gel και συνδέεται οριζόντια, μέσω μίας κλωστής, με το δυναμόμετρο (Σουηδικής προέλευσης). Η θέση του δυναμόμετρου είναι τέτοια ώστε να μπορεί να επιβληθεί η οριζόντια δύναμη στο έμβολο μέσω του δυναμόμετρου και ύστερα να ακολουθήσει η μέτρηση της στροφής του εμβόλου σε σχέση με την αρχική του κατάσταση, όταν αυτό εδράζεται απλά πάνω στο παρασκευασμένο μίγμα.



**Εικόνα 4.3.9** Επίπεδος διεισδυτής επικάθεται απλά πάνω στο υπό εξέταση υλικό. Το «σώμα» βρίσκεται στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration), πριν την εκτέλεση του πειράματος της καμπτικής διείσδυσης.



**Εικόνα 4.3.10** Στην παραπάνω φωτογραφία παριστάνεται το πείραμα της καμπτικής διείσδυσης (bending test). Ειδικότερα, μπορούμε να δούμε την τελική θέση-στροφή του επίπεδου διεισδυτή μετά την επιβολή της οριζόντιας δύναμης.



**Εικόνα 4.3.11** Αρχική κατάσταση του υλικού (reference configuration), πριν την επιβολή της προς τα άνω-εφελκυστικής δύναμης που επιβάλλεται μέσω του δυναμόμετρου.



**Εικόνα 4.3.12** Πείραμα του εφελκυστικής διεύθυνσης (pull out test). Ειδικότερα, μπορούμε να δούμε την τελική θέση του εμβόλου και την αντίστοιχη μετατόπισή του προς τα άνω μετά την επιβολή της εφελκυστικής δύναμης μέσω του δυναμόμετρου.



**Εικόνα 4.3.13** Αρχική κατάσταση του δείγματος, πριν το πείραμα της καμπτικής διείδυσης. Η βάση του επίπεδου διεισδυτή είναι τοποθετημένη κοντά στο σύνορο του δοχείου. . Ειδικότερα, φαίνεται η αρχική θέση του εμβόλου πριν την επιβολή της οριζόντιας δύναμης-στροφής. Αντίθετα με το προηγούμενο πείραμα καμπτικής διείδυσης, η κλωστή σύνδεσης με το δυναμόμετρο βρίσκεται στην κάτω οπή.



**Εικόνα 4.3.14** Τελική θέση του εμβόλου μετά την επιβολή της οριζόντιας δύναμης.

## Παράρτημα Ε

### 4.4 Περίσφιξη σε γιαούρτι αγελάδας βάρους 200 g



**Εικόνα 4.4.1** Γιαούρτι αγελάδας βάρους 200 g. Αρχικά, φροντίζουμε με ένα κουτάλι να διαμορφώσουμε την ανώτερη επιφάνεια του δείγματος, ώστε να είναι όσο το δυνατότερο λεία για την υλοποίηση του πειράματος. Επιλέχθηκε πλάστικό δοχείο, μέσα στο οποίο είναι τοποθετημένο το γιαούρτι, έτσι ώστε να είναι δυνατή η περισφίξή του.



**Εικόνα 4.4.2** Κεράσι επικάθεται πάνω στο δείγμα, δίχως να εισχωρεί μέσα σε αυτό.



**Εικόνα 4.4.3** Αρχίζουμε να συμπιέζουμε περιμετρικά το δοκίμιο.



**Εικόνα 4.4.4** Περίσφιξη περιμετρικά του δοκιμίου. Στο δείγμα επιβάλλουμε **μικρό** θλιπτικό φορτίο σε όλο το μήκος της περιμέτρου του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανύψωση του γιαουρτιού, όπως μπορούμε να διακρίνουμε στην εικόνα. Η ανύψωση του δοκιμίου οφείλεται στο γεγονός ότι το γιαούρτι ανήκει στην κατηγορία των ασυμπίεστων υλικών. Έτσι λοιπόν, το υλικό προκειμένου να διατηρήσει τον αρχικό του όγκο ανασηκώνεται, δίχως να υπάρχει απώλεια του υλικού εξωτερικά του πλαστικού δοχείου, μέσα στο οποίο είναι τοποθετημένο.





**Εικόνα 4.4.5 Το δείγμα μετά την επιβολή μικρού θλιπτικού φορτίου.**

Μετά την περίσφιξη του υλικού, το δείγμα αφήνεται ελεύθερο να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω, η επιφάνεια του γιαουρτιού δεν παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές συγκρινόμενη με εκείνη που αντιστοιχεί στην τελείως απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ το κεράσι συνεχίζει να επικάθεται πάνω στο υλικό.

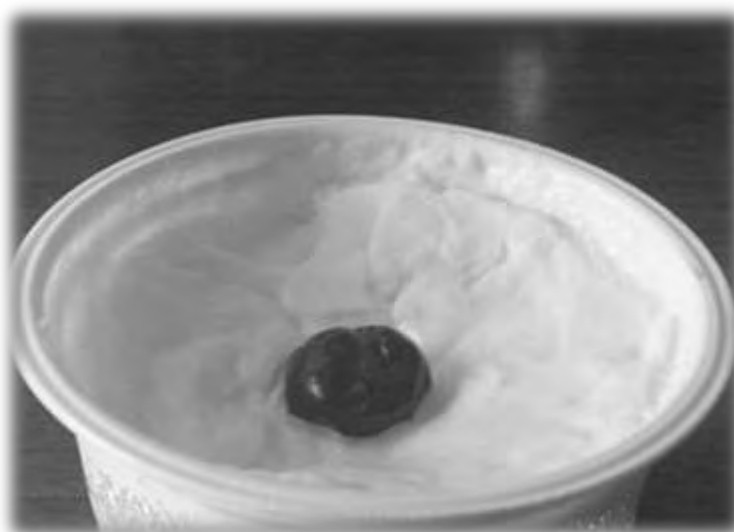


**Εικόνα 4.4.6 Περίσφιξη περιμετρικά του δοκιμίου. Στο δείγμα επιβάλλουμε μεγάλο θλιπτικό φορτίο σε όλο το μήκος της περιμέτρου του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την έντονη ανύψωση του γιαουρτιού, όπως μπορούμε να διακρίνουμε στην εικόνα. Η ανύψωση του δοκιμίου οφείλεται στο γεγονός ότι το γιαούρτι ανήκει στην κατηγορία των ασυμπίεστων υλικών, όπως προαναφέρθηκε.**



**Εικόνα 4.4.7 Το δείγμα μετά την επιβολή μεγάλου θλιπτικού φορτίου.**

Μετά την περίσφιξη του υλικού, το δείγμα αφήνεται ελεύθερο να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω, η επιφάνεια του γιαουρτιού παρουσιάζει έντονες σχισμές και ρηγματώσεις συγκρινόμενη με εκείνη που αντιστοιχεί στην τελείως απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ το κεράσι «βυθίζεται», έχοντας εισχωρήσει σημαντικά μέσα στο γιαούρτι. **Η παραπάνω εικόνα εκφράζει την αστάθεια του υλικού, όταν υποστεί περίσφιξη όπου η ποσότητα  $\lambda$  (stretch) προσεγγίζει την τιμή μηδέν ( $\lambda \approx 2/3$ ).**



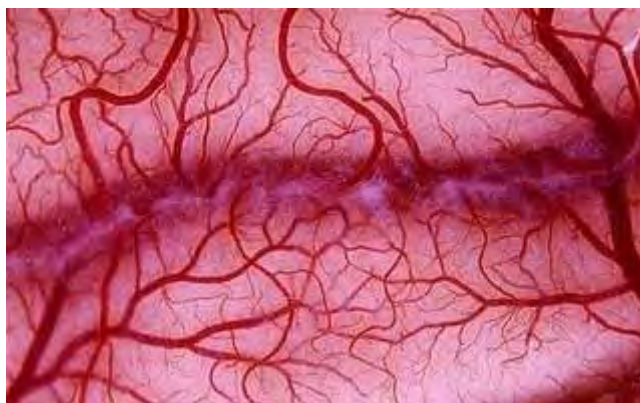
**Εικόνα 4.4.8 Έντονες ρηγματώσεις και σχισμές στην εξωτερική επιφάνεια του γιαουρτιού επιβάλλοντας μεγάλη περίσφιξη περιμετρικά στο δοκίμιο. Το κεράσι «βυθίζεται» εσωτερικά του γιαουρτιού.**



## Κεφάλαιο 5

### 5.1 Αρτηρίες και φλέβες

**Α**ρτηρίες ονομάζονται τα αγγεία του οργανισμού που μεταφέρουν οξυγονωμένο αίμα από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα. Όσο απομακρύνονται από την καρδιά διακλαδίζονται και σχηματίζουν όλο και μικρότερα αγγεία, μικρότερες αρτηρίες και αρτηρίδια τα οποία τελικά καταλήγουν στα τριχοειδή αγγεία. Το αίμα φτάνει σε όλα τα σημεία του σώματος, καθώς κυκλοφορεί αδιάκοπα στον οργανισμό μας μέσα από ένα δίκτυο αγγείων, που ονομάζονται αιμοφόρα αγγεία.



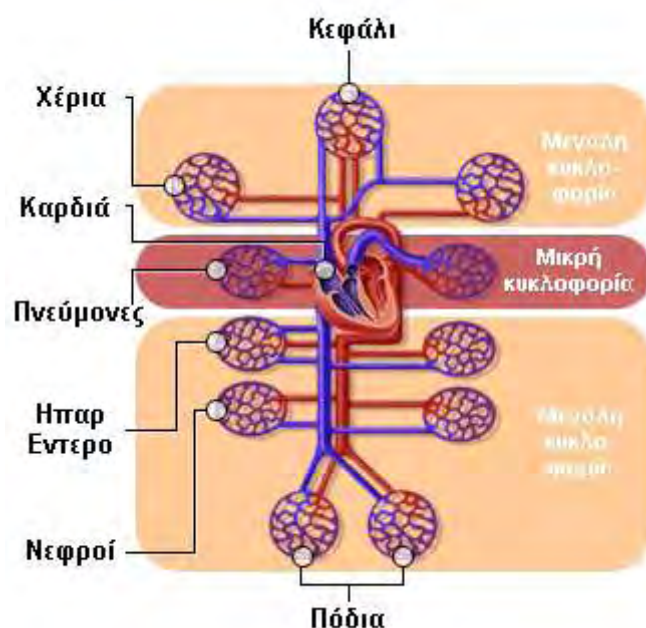
**Εικόνα 5.1.1** Στην παραπάνω εικόνα μπορούμε να διακρίνουμε ένα δίκτυο αγγείων που μεταφέρουν το αίμα στα διάφορα όργανα του σώματος μας και ονομάζονται αιμοφόρα αγγεία. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post\\_18.html](http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post_18.html).

Η κυκλοφορία του αίματος στο σώμα μας γίνεται μέσα από δύο «διαδρομές» ή αλλιώς μέσα από δύο κυκλοφορίες που περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω:

#### ***Μικρή κυκλοφορία (Πνευμονική κυκλοφορία)***

Είναι η κυκλοφορία του αίματος από την καρδιά προς του πνεύμονες και αντίστροφα. Η πνευμονική αρτηρία ξεκινά από τη δεξιά κοιλία και χωρίζεται στη δεξιά και στην αριστερά πνευμονική αρτηρία, οι οποίες κατευθύνονται στους αντίστοιχους πνεύμονες. Και οι δύο αυτές αρτηρίες μετά την είσοδο τους στους πνεύμονες χωρίζονται σε τόσους κλάδους, όσοι είναι οι λοβοί του πνεύμονα. Ύστερα από μία ακόμη υποδιαίρεση, στο ύψος των πνευμονικών λοβίων, αναλύονται στα τριχοειδή αγγεία του πνεύμονα. Τα τοιχώματα των τριχοειδών αγγείων είναι πολύ λεπτά, γι' αυτό και τα αέρια τα διαπερνούν πολύ εύκολα. Έτσι το οξυγόνο του αέρος πέρνα από τις πνευμονικές κυψελίδες στο αίμα. Εξ

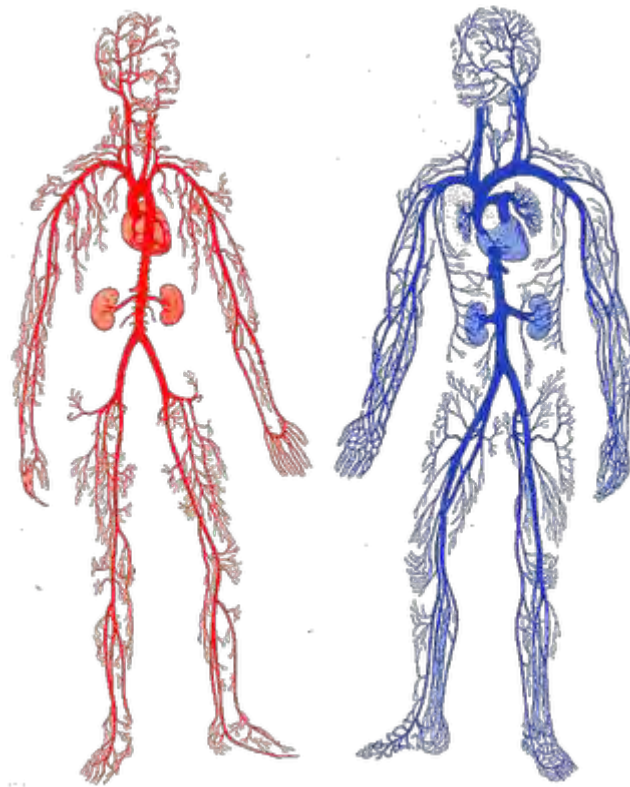
άλλου το διοξείδιο του άνθρακα αποβάλλεται από το αίμα και πέρνα στις πνευμονικές κυψελίδες για να μεταφερθεί προς τα έξω.



**Εικόνα 5.1.2** Σχηματική απεικόνιση για την καλύτερη κατανόηση της μεγάλης και της μικρής κυκλοφορίας του αίματος στον οργανισμό μας. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε παραπάνω κατά τη μικρή κυκλοφορία το αίμα μεταφέρεται από την καρδιά στους πνεύμονες, ενώ κατά τη μεγάλη κυκλοφορία η μεταφορά γίνεται από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα του ανθρώπινου σώματος. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.incardiology.gr/kardia/mikri\\_megali.htm](http://www.incardiology.gr/kardia/mikri_megali.htm)

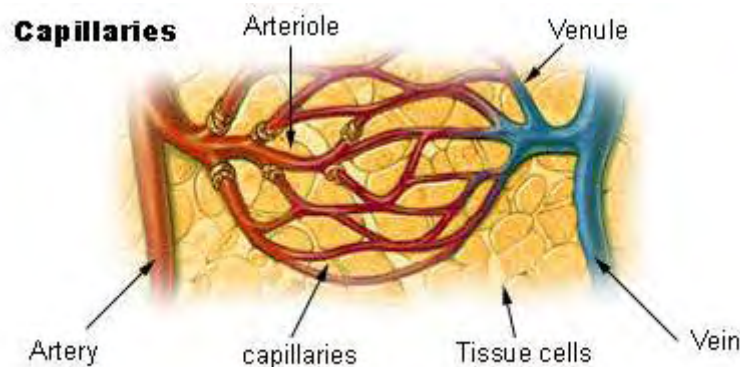
Μικρές φλέβες παραλαμβάνουν από τα τριχοειδή του πνεύμονα το αίμα. Οι φλέβες αυτές ενώνονται μεταξύ τους και σχηματίζουν τελικά τις πνευμονικές φλέβες, οι οποίες, ακολουθώντας τη διαδρομή των αρτηριών, φθάνουν στον αριστερό κόλπο. Η πνευμονική φλέβα περιέχει αίμα σκοτεινόχρωμο και πλούσιο σε διοξείδιο του άνθρακα (φλεβικό αίμα), ενώ οι πνευμονικές αρτηρίες περιέχουν αίμα που έχει αποβάλει το διοξείδιο του άνθρακα και έχει παραλάβει το οξυγόνο. Γι' αυτόν τον λόγο, το χρώμα τους είναι καθαρό ερυθρό (αρτηριακό αίμα).

Όπως προαναφέρθηκε, το αίμα μεταφέρεται από την καρδιά προς τα διάφορα όργανα του σώματός μας μέσα από τα αγγεία και συγκεκριμένα από τις αρτηρίες. Το αίμα στις αρτηρίες είναι πλούσιο σε οξυγόνο και έχει έντονο κόκκινο χρώμα. Από τα διάφορα όργανα του σώματός μας το αίμα ρέει προς την καρδιά μέσα από τις φλέβες. Το αίμα στις φλέβες περιέχει διοξείδιο του άνθρακα και έχει πιο σκούρο χρώμα. Γι' αυτό σχεδιάζουμε τις αρτηρίες με κόκκινο χρώμα και τις φλέβες με μπλε, όπως μπορούμε να διακρίνουμε χαρακτηριστικά στην εικόνα που ακολουθεί.



**Εικόνα 5.1.3** Στην παραπάνω εικόνα διακρίνεται το εσωτερικό του ανθρώπινου σώματος. Το σχήμα στα αριστερά της εικόνας απεικονίζει με κόκκινο χρώμα το αρτηριακό αίμα, που έχει αποβάλλει το διοξείδιο του άνθρακα και έχει παραλάβει οξυγόνο. Αντίθετα, στο δεξιό τμήμα της εικόνας παριστάνεται με σκούρο μπλε χρώμα το φλεβικό αίμα που είναι πλούσιο σε διοξείδιο του άνθρακα. Η παραπάνω εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post\\_18.html](http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post_18.html)

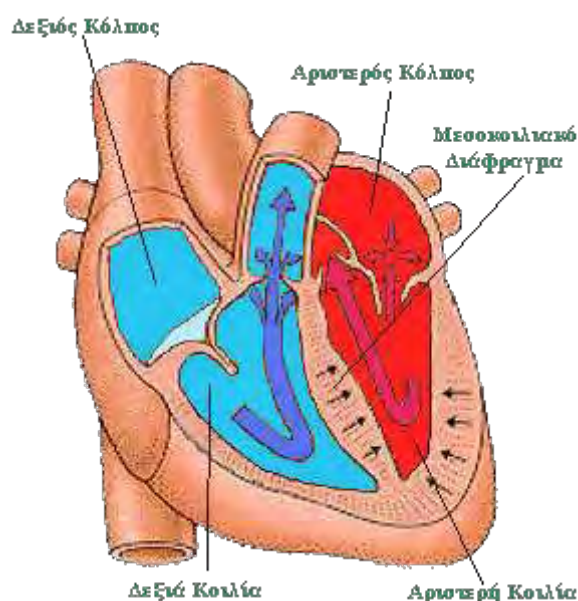
Οι φλέβες και οι αρτηρίες διακλαδίζονται συνεχώς σε όλο και πιο λεπτά αγγεία. Τα λεπτά αυτά αγγεία ονομάζονται τριχοειδή.



**Εικόνα 5.1.4** Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα η αρτηρία ενός ανθρώπινου οργανισμού και με μπλε χρώμα η φλέβα. Μεταξύ της αρτηρίας και της φλέβας παριστάνονται με τη μορφή λεπτότερων σωλήνων τα τριχοειδή αγγεία και με κίτρινο χρώμα διακρίνουμε τους κυτταρικούς ιστούς. Η

εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση  
[http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post\\_18.html](http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post_18.html)

Το αίμα φτάνει σε όλα τα μέρη του σώματός μας λόγω της πίεσης που δημιουργείται από την καρδιά. Η πίεση αυτή ονομάζεται αρτηριακή. Η αρτηριακή πίεση δεν πρέπει να είναι ούτε ψηλότερη ούτε χαμηλότερη από τα φυσιολογικά επίπεδα.



**Εικόνα 5.1.5** Σχηματική απεικόνιση του εσωτερικού τμήματος της ανθρώπινης καρδιάς. Όπως μπορούμε να δούμε στην εικόνα η καρδιά αποτελείται από το Δεξιό Κόλπο και τη Δεξιά Κοιλία, τον Αριστερό Κόλπο και την Αριστερή Κοιλία, και το Μεσοκοιλιακό Διάφραγμα. Η έναρξη της κυκλοφορίας του αίματος πραγματοποιείται από την Αριστερή Κοιλία. Σχηματίζει ένα μεγάλο τόξο που κατευθύνεται προς τα πίσω και αριστερά (αορτικό τόξο). Κατεβαίνει κατακόρυφα, ακολουθώντας τη σπονδυλική στήλη και χορηγεί με αίμα μέσω των αρτηριών τα υπόλοιπα όργανα του ανθρώπινου σώματος. Το σχήμα βρίσκεται στη ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.incardiology.gr/kardia/mikri\\_megali.htm](http://www.incardiology.gr/kardia/mikri_megali.htm)

### **Μεγάλη κυκλοφορία (Συστηματική κυκλοφορία)**

Είναι η κυκλοφορία του αίματος από την καρδιά προς τα άλλα όργανα του σώματός μας και αντίστροφα. Η αορτή από την οποία αρχίζει η μεγάλη κυκλοφορία, ξεκινά από την αριστερά κοιλία. Σχηματίζει ένα μεγάλο τόξο που κατευθύνεται προς τα πίσω και αριστερά (αορτικό τόξο). Κατεβαίνει κατακόρυφα, ακολουθώντας τη σπονδυλική στήλη, πέραν το διάφραγμα και μπαίνει στην κοιλιακή χώρα. Στο τέλος της διαδρομής η αορτή χωρίζεται στις δύο λαγόνιες αρτηρίες, που κατευθύνονται στα κάτω άκρα. Από την αορτή ξεκινούν διάφοροι κλάδοι, οι οποίοι μεταφέρουν το αίμα στα διάφορα όργανα. Από το αορτικό τόξο ξεκινούν οι υποκλειδίες αρτηρίες, που τροφοδοτούν με αίμα τα άνω άκρα και οι καρωτίδες αρτηρίες, που μεταφέρουν το αίμα στο κεφάλι. Από τη θωρακική αορτή

αρχίζουν οι βρογχικές αρτηρίες, οι οποίες κατευθύνονται στους βρόγχους και στους πνεύμονες, οι αρτηρίες του οισοφάγου και οι μεσοπλευρίες αρτηρίες. Από την κοιλιακή αορτή ξεκινούν οι έξης κλάδοι:

- ❖ Ηπατική αρτηρία, η σπληνική αρτηρία και η στεφανιαία αρτηρία του στομάχου
- ❖ Μεσεντέριες αρτηρίες, που κατευθύνονται στα έντερα
- ❖ Νεφρικές αρτηρίες, οι οποίες κατευθύνονται στους νεφρούς
- ❖ Γεννητικές αρτηρίες που προορίζονται για τα γεννητικά όργανα

Τέλος η αορτή χωρίζεται στις δύο λαγόνιες αρτηρίες που αρχίζουν από την κοιλία, διασχίζουν την κνήμη και φθάνουν ως την άκρη του ποδιού. **Η αορτή είναι το μεγαλύτερο σε εύρος αρτηριακό στέλεχος, το οποίο χορηγεί αίμα σε όλες τις αρτηρίες του σώματος.** Εκφύεται από την αριστερή κοιλία της καρδιάς και ανάλογα με την πορεία της διακρίνεται σε τρία μέρη:

- ❖ την ανιούσα αορτή,
- ❖ το αορτικό τόξο και
- ❖ την κατιούσα αορτή (θωρακική και κοιλιακή αορτή).

### Αρτηρίες και Φλέβες

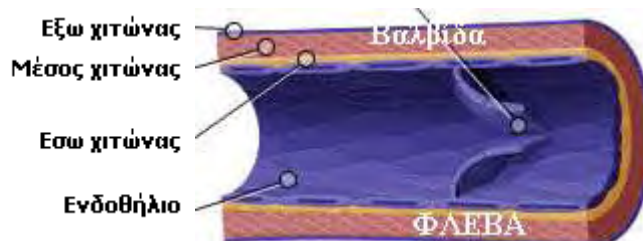
Το αίμα για να φθάσει σε κάθε τμήμα του οργανισμού μας, ρέει μέσα σε ειδικούς σωλήνες που ονομάζονται αγγεία. Τα αγγεία τα οποία ξεκινούν από την καρδιά και κατευθύνονται στην περιφέρεια ονομάζονται αρτηρίες. Εκείνα τα οποία ακολουθούν αντίθετη κατεύθυνση, δηλ. από την περιφέρεια προς την καρδιά, ονομάζονται φλέβες.



**Εικόνα 5.1.6** Στην εικόνα μπορούμε να διακρίνουμε το εσωτερικό μίας ανθρώπινης αρτηρίας. Ειδικότερα, βλέπουμε μία αρτηρία σε τομή κατά μήκος και κατά πλάτος που αποτελείται από δύο στρώματα. Το εξωτερικό στρώμα διαθέτει μεγαλύτερο πάχος σε σχέση με το εσωτερικό, όπως μπορούμε να

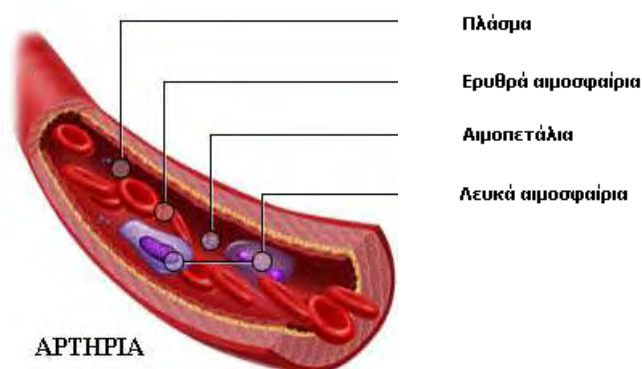


δούμε στην παραπάνω εικόνα. Έτσι λοιπόν, μία αρτηρία προχωρώντας προς το εσωτερικό της αποτελείται από τα εξής: Έξω χιτώνας, Μέσος χιτώνας, Έσω χιτώνας και Ενδοθήλιο. Ο Έξω χιτώνας είναι ουσιαστικά το περίβλημα, ο Μέσος χιτώνας αποτελεί το εξωτερικό παχύ στρώμα, ο Έσω χιτώνας διαχωρίζει τα δύο στρώματα και τέλος το Ενδοθήλιο παριστάνει το εσωτερικό λεπτό στρώμα της αρτηρίας. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>



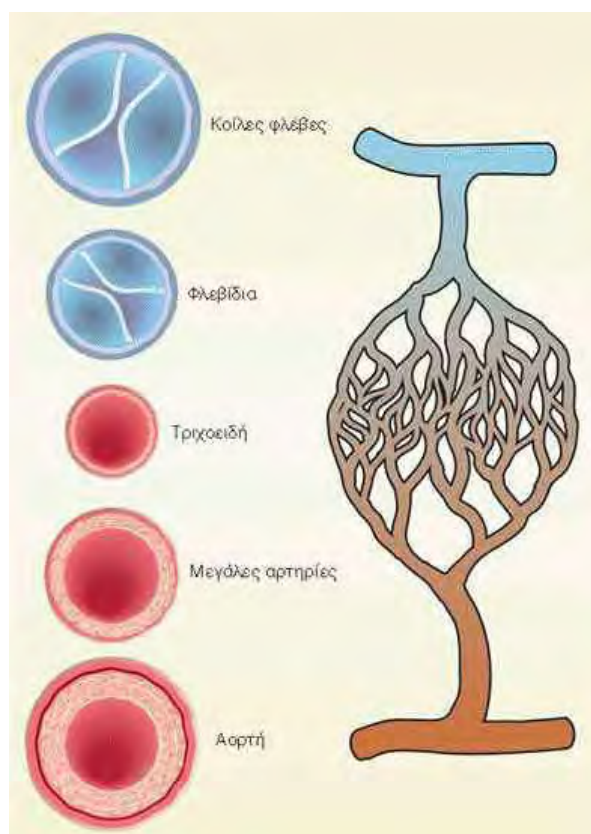
**Εικόνα 5.1.7** Όπως μπορούμε να δούμε στην παραπάνω εικόνα, τα συστατικά που αποτελούν τη φλέβα δε διαφέρουν σε σχέση με εκείνα που αποτελούν την αρτηρία. Έτσι λοιπόν, η ανθρώπινη φλέβα αποτελείται από τα εξής: Έξω χιτώνας (περίβλημα φλέβας), Μέσος χιτώνας (παχύ εξωτερικό στρώμα), Έσω χιτώνας (επιφάνεια που διαχωρίζει τα δύο στρώματα που αποτελούν τη φλέβα) και Ενδοθήλιο (λεπτό εσωτερικό στρώμα της φλέβας). Εσωτερικά του Ενδοθηλίου διακρίνουμε τη βαλβίδα. Η φλέβα έχει αντίθετη αποστολή σχετικά με την αρτηρία. Η αρτηρία μεταφέρει το αίμα από την καρδιά προς την περιφέρεια, ενώ η φλέβα επιστρέφει ουσιαστικά το αίμα από την περιφέρεια στην καρδιά. Η εικόνα βρίσκεται αναρτημένη στην ηλεκτρονική σελίδα <http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>

Γενικά στις αρτηρίες ρέει αίμα πλούσιο σε οξυγόνο και θρεπτικές ουσίες οι οποίες μεταφέρονται στους διάφορους ιστούς του οργανισμού μας. Στις φλέβες συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. επαναφέρουν το αίμα από την περιφέρεια στην καρδιά, πλούσιο σε άχρηστα προϊόντα και διοξείδιο του άνθρακα. Τα άχρηστα προϊόντα κατόπιν απομακρύνονται μέσω των νεφρών, τα οποία έχουν ως αποστολή τους τη διήθηση (καθαρισμό) του αίματος, το δε διοξείδιο του άνθρακα απομακρύνεται από τους πνεύμονες με την αναπνοή.



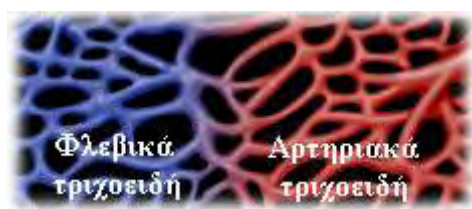
**Εικόνα 5.1.8** Κατά μήκος τομή μίας ανθρώπινης αρτηρίας. Αποστολή της αρτηρίας είναι να μεταφέρει το αίμα από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα του ανθρώπινου σώματος. Το αίμα που ρέει στο εσωτερικό της αρτηρίας αποτελείται από το πλάσμα, τα ερυθρά αιμοσφαίρια, τα αιμοπετάλια και τα λευκά αιμοσφαίρια. Η παραπάνω εικόνα μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>

Οι αρτηρίες, όταν φθάνουν στην περιφέρεια του ανθρώπινου σώματος, δηλ. στους μύες, το δέρμα, σε όλα τα όργανα, διακλαδίζονται σε ολοένα μικρότερες αρτηρίες, ωσότου η διάμετρός τους γίνει μικροσκοπική. Σε αυτό το σημείο ακριβώς συντελείται η ανταλλαγή μεταξύ του αίματος και των κυττάρων. Τα μικροσκοπικά αυτά αγγεία ονομάζονται τριχοειδή και σχηματίζουν μέσα στα διάφορα όργανα και ιστούς ένα εκτεταμένο δίκτυο. Τα τριχοειδή συμβάλλουν σε μικρές φλέβες οι οποίες λίγο-λίγο ενώνονται ή μία με την άλλη σε όλο μεγαλύτερες φλέβες και επαναφέρουν το αίμα στην καρδιά.



**Εικόνα 5.1.9** Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται οι διαφορές στις διατομές, όσον αφορά τη διάμετρο, των αρτηριών και των φλεβών. Οι κοινές φλέβες που μεταφέρουν το αίμα από την περιφέρεια στην καρδιά αποτελούν «σωλήνες» με μεγάλη διάμετρο. Τα φλεβίδια έχουν ακριβώς την ίδια λειτουργία με τις κοινές φλέβες, όμως διαθέτουν μικρότερη διάμετρο. Τα φλεβίδια είναι εκείνα που συμβάλλουν με τα τριχοειδή αγγεία, τα οποία έχουν τη μικρότερη διάμετρο σε σχέση με τα υπόλοιπα. Η αορτή αποτελεί το μεγαλύτερο σε εύρος αρτηριακό στέλεχος, το οποίο χορηγεί αίμα σε όλες τις αρτηρίες του σώματος και διαθέτει τη μέγιστη διάμετρο σε σύγκριση με τις υπόλοιπες αρτηρίες. Οι μεγάλες

αρτηρίες χαρακτηρίζονται από μικρότερη διάμετρο σχετικά με την αορτή και καταλήγουν τελικά στα τριχοειδή αγγεία. Η εικόνα εντοπίζεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>



**Εικόνα 5.1.10** Τα φλεβικά τριχοειδή αγγεία απεικονίζονται με μπλε χρώμα εξαιτίας της μεταφοράς διοξειδίου του άνθρακα διαμέσου του αίματος από την περιφέρεια του οργανισμού στην καρδιά. Αντίθετα, τα αρτηριακά τριχοειδή αγγεία παριστάνονται με κόκκινο χρώμα εξαιτίας την μεταφοράς του οξυγόνου από την καρδιά προς την περιφέρεια. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>

Συνοψίζοντας λοιπόν, γνωρίζουμε ότι από την καρδιά ξεκινούν δύο μεγάλες αρτηρίες. Η πνευμονική αρτηρία και η αορτή. Η πνευμονική αρτηρία έχει προορισμό να φέρει το αίμα στους πνεύμονες, για να αφήσει το διοξείδιο του άνθρακα και προσλάβει το οξυγόνο. Έπειτα το αίμα επιστρέφει στην καρδιά, περνώντας από τις πνευμονικές φλέβες. Αυτό αποτελεί τη μικρή κυκλοφορία του αίματος, όπως προαναφέρθηκε αναλυτικά σε προηγούμενη παράγραφο. Η αορτή μεταφέρει το αίμα στο υπόλοιπο τμήμα του οργανισμού μας και οι πολυάριθμοι κλάδοι της σχηματίζουν το δίκτυο των τριχοειδών όλων των οργάνων. Το αίμα επιστρέφει και πάλι στην καρδιά περνώντας από τις φλέβες, οι οποίες ενώνονται σε δύο μεγάλους κλάδους, την άνω και κάτω κοίλη φλέβα που εκβάλλουν στον δεξιό κόλπο. Είναι η λεγόμενη μεγάλη κυκλοφορία.

**Οι φλέβες λοιπόν, σε αντίθεση με τις αρτηρίες, χαρακτηρίζονται ως ομογενή υλικά και δεν εμφανίζουν αρχικές τάσεις. Δεν είναι δηλαδή προεντεταμένες!**

### 5.1.1 Γήρανση των αρτηριών

Τα τοιχώματα των αρτηριών είναι «επενδυμένα» με τρεις στιβάδες κυττάρων (τον έξω, το μέσο και τον έσω χιτώνα). Το μεσαίο «στρώμα» κυττάρων (ο μέσος χιτώνας) αποτελείται από λεία μυϊκά κύτταρα και από ίνες κολλαγόνου και ελαστίνης, σε καθορισμένες αναλογίες. **Με την πάροδο των χρόνων, μειώνεται η ελαστινίνη, αλλοιώνεται η ποιότητά της και αυξάνεται το κολλαγόνο. Αυτές οι μεταβολές έχουν ως αποτέλεσμα το αγγείο να γίνεται πιο δύσκαμπτο (πιο σκληρό), γεγονός που έχει στενή σχέση με την αύξηση της αρτηριακής πίεσης και την πρόκληση υπέρτασης.** Καθώς τα αγγεία «σκληραίνουν», αυξάνεται η διαφορά μεταξύ των τιμών της συστολικής πίεσης (μεγάλης) και της διαστολικής πίεσης (μικρής). Οι μεταβολές αυτές αυξάνουν, παράλληλα, και τη διαφορά ανάμεσα στις δύο πιέσεις



(τη διαφορετική πίεση). Η διαδικασία αυτή της γήρανσης των αγγείων είναι γνωστή και ως αρτηριοσκλήρυνση.

### **5.1.2 Πότε αρχίζουν να γερνούν τα αγγεία**

Η ηλικία των 55-60 ετών (ειδικότερα για τις γυναίκες μετά την εμμηνόπαυση) θεωρείται ότι σηματοδοτεί την προοδευτική αλλαγή στην ελαστικότητα των αγγείων. Ωστόσο, εκτιμάται ότι τα ηλικιακά όρια είναι μάλλον εξατομικευμένα. Σύμφωνα μάλιστα με ορισμένες θεωρίες, ακόμη και το πολύ χαμηλό ή το πολύ αυξημένο βάρος γέννησης του νεογνού, καθώς και η πρόωρη γέννηση, αποτελούν παράγοντες ταχύτερης αγγειακής γήρανσης. Εντούτοις, διεξάγονται μελέτες, προκειμένου να διαπιστωθεί αν ευσταθούν οι παραπάνω θεωρίες.

### **5.1.3 Παράγοντες γήρανσης των αγγείων**

Οι ειδικοί εξηγούν ότι αναμφίβολα υπάρχει μια γενετική προδιάθεση για την εμφάνιση της αρτηριοσκλήρυνσης. Πέραν της κληρονομικότητας, όμως, η γήρανση των αγγείων επιδεινώνεται και επιταχύνεται από παράγοντες που σχετίζονται με τον τρόπο ζωής και τη γενικότερη κατάσταση της υγείας. Ένας 50χρονος με σακχαρώδη διαβήτη, λόγου χάρη, έχει κατά κανόνα αγγεία που αντιστοιχούν σε έναν 65χρονο. Παρουσιάζει, δηλαδή, το λεγόμενο «σύνδρομο πρόωρης αγγειακής γήρανσης». Με απλά λόγια, η λειτουργικότητα των αρτηριών του αντιστοιχεί σε άτομο μεγαλύτερης ηλικίας. Σύμφωνα με τους ειδικούς, οι κυριότεροι παράγοντες που επιταχύνουν τη γήρανση των αγγείων είναι οι εξής:

- ❖ Ο διαβήτης, επειδή προκαλεί τις μεγαλύτερες φθορές στα αγγεία, αλλάζοντας τόσο τη δομή όσο και τη λειτουργία τους
- ❖ Η υπέρταση
- ❖ Η αυξημένη χοληστερίνη
- ❖ Το κάπνισμα.

## 5.2 Γενικά για την αθηροσκλήρωση

**Ο**ι αρτηρίες είναι τα αιμοφόρα αγγεία που μεταφέρουν οξυγόνο και θρεπτικές ουσίες από την καρδιά προς το υπόλοιπο σώμα. Εκτείνονται από τον εγκέφαλο, μέχρι τις άκρες των δακτύλων. **Οι υγιείς αρτηρίες είναι εύκαμπτες, ισχυρές, ελαστικές και καθαρές από οποιεσδήποτε αποθέσεις και το αίμα ρέει ανάμεσά τους εύκολα.** Με την ηλικία όμως, σχηματίζονται στα εσωτερικά τοιχώματά τους, αποθέσεις λιπαρών ουσιών, χοληστερόλης, κυτταρικών αποβλήτων και ασβεστίου. Αυτή η αρτηριακή πλάκα, μπορεί να μειώσει τη ροή του αίματος ή, σε ορισμένες περιπτώσεις, να την εμποδίσει εντελώς.

**Καθώς οι αποθέσεις πλάκας αυξάνονται, δημιουργείται μία κατάσταση, γνωστή ως αθηροσκλήρωση, η οποία προκαλεί στις αρτηρίες σμίκρυνση, στένεμα και σκλήρυνση.** Με την εμφάνιση της αθηροσκλήρωσης οι αρτηρίες «στενεύουν» επειδή στα τοιχώματά τους συσσωρεύονται λιπώδη ιζήματα. Όταν, όμως, οι αρτηρίες είναι πιο στενές από το φυσιολογικό, η ροή του αίματος δυσχεραίνεται (όπως ακριβώς συμβαίνει όταν σε έναν σωλήνα συσσωρεύεται πουρί). Οι φραγμένες αρτηρίες σε διάφορα μέρη του σώματος, μπορεί να οδηγήσουν σε διάφορα ιατρικά προβλήματα, όπως μειωμένη ροή αίματος στα πόδια και τα υπόλοιπα άκρα (λόγω των φραγμένων περιφερειακών αρτηριών), στηθάγχη (πόνος στο στήθος), καρδιακή νόσο ή καρδιακή προσβολή (λόγω απόφραξης των στεφανιαίων αρτηριών), εγκεφαλικό επεισόδιο (λόγω στένωσης των καρωτίδων αρτηριών που παρέχουν αιμάτωση στον εγκέφαλο).

### 5.2.1 Που οφείλεται η αρτηριοσκλήρωση

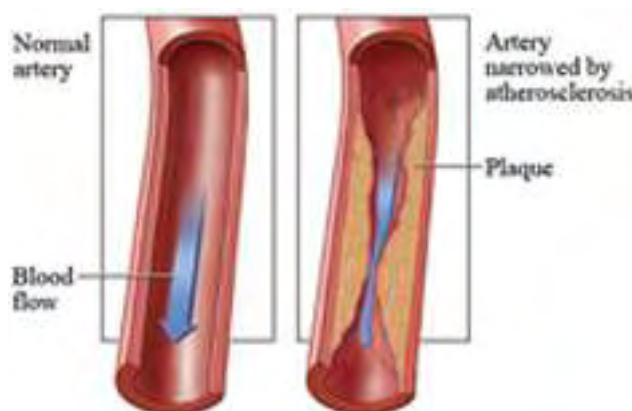
Η αρτηριοσκλήρωση, όπως προαναφέρθηκε, είναι μία σοβαρή πάθηση, που εμφανίζεται συνήθως σε προχωρημένη ηλικία. Τα τοιχώματα των αρτηριών παχαίνουν, το εσωτερικό τους στενεύει. Τα αγγεία αυτά χάνουν την ελαστικότητά τους και την συσταλτικότητά τους και σκληραίνουν. Σαν άμεση συνέπεια της φθοράς τους, έχουμε τις κυκλοφοριακές διαταραχές των οργάνων εκείνων στα οποία πηγαίνει το αίμα.

Τα τοιχώματα των αγγείων υφίστανται κάποια τριβή εξαιτίας του αίματος που ρέει μέσα σε αυτά. Οι κοπιαστικές σωματικές εργασίες, οι εξαντλητικές πνευματικές εργασίες, η νευρική υπερδιέγερση, οι στενοχώριες επιφέρουν βλάβες στα αγγεία. Η κύρια αιτία για την οποία φράζουν οι αρτηρίες έχει συνδεθεί με την αυξημένη κατανάλωση επεξεργασμένων τροφίμων που περιέχουν κορεσμένα λίπη, χημικές ουσίες και τοξίνες. Επίσης, διατροφή πλούσια σε χοληστερίνη (λιπαρές ουσίες) μπορεί να προκαλέσει την πάθηση. Γενικά η πολυφαγία και η πολυποσία έχουν καταστροφικά αποτελέσματα για τα αγγεία. Τα αίτια της πάθησης είναι συχνά κληρονομικά. Επίσης η αυξημένη αρτηριακή

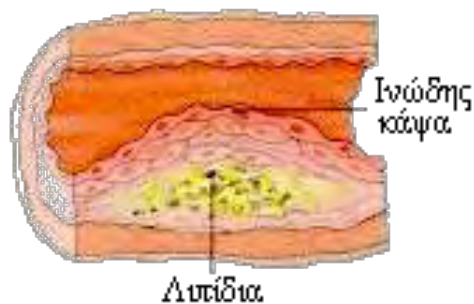
πίεση του αίματος, δηλαδή η υπέρταση, μπορεί να προκαλέσει την αρτηριοσκλήρωση.

Η πάθηση έχει διαδοθεί πολύ στη σημερινή εποχή και εμφανίζεται συνήθως μετά τα 40 χρόνια. Η αθηροσκλήρωση των στεφανιαίων αρτηριών είναι μια νόσος της αρχαιότητας, όπως τεκμηριώνεται από νεκροψία σε μια 50 ετών μούμια από την 21η Αιγυπτιακή δυναστεία του 1000 π.Χ. περίπου, όπου βλέπουμε σε τομές των στεφανιαίων αρτηριών πάχυνση και εναπόθεση ασβεστίου. Από τους Αρχαίους Αιγυπτιακούς πάπυρους υπάρχουν περιγραφές στεφανιαίας νόσου και αιφνίδιου θανάτου.

Η στεφανιαία νόσος επιμένει να είναι ένα μέγιστο πρόβλημα υγείας και είναι η υπ' αριθμόν μία αιτία θανάτου στο σύγχρονο κόσμο. Είναι επικίνδυνη, γιατί επιδρά σε διάφορα όργανα του σώματος. Έτσι εμφανίζεται ανεπαρκής αιμάτωση του εγκεφάλου, του μυοκαρδίου (στεφανιαία νόσος), του νεφρού κλπ. Συνηθισμένο επακόλουθο είναι και η θρόμβωση (γάγγραινα στο πόδι ή στο χέρι, έμφραγμα κ.ά.). Επίσης η εγκεφαλική αιμορραγία και το αιμάτωμα.



**Εικόνα 5.2.1.1** Στην εικόνα αριστερά μπορούμε να διακρίνουμε μία φυσιολογική ανθρώπινη αρτηρία (Normal artery). Η ροή του αίματος (Blood flow) σε αυτή την περίπτωση δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αντίθετα, στην εικόνα δεξιά η ίδια αρτηρία έχει υποστεί στένωση εξαιτίας της αρτηριοσκλήρωσης. Η στένωση αυτή οφείλεται στο κίτρινο λιπώδες στρώμα (αθηρωματική πλάκα) που έχει αναπτυχθεί στο ενδοθήλιο της αρτηρίας, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται κατά πολύ η ροή του αίματος. Η παραπάνω εικόνα μπορεί να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.e-hospital.gr/index.php?id=5078>



**Εικόνα 5.2.1.2** Η αρτηρία που απεικονίζεται παραπάνω έχει υποστεί αρτηριοσκλήρωση. Η αρτηριοσκλήρωση ή αθηροσκλήρωση είναι η άθροιση λιπαρών ουσιών στα τοιχώματα των αρτηριών μέσου και μεγάλου μεγέθους. Τα λιπίδια αυτά παριστάνονται με κιτρινο χρώμα, όπως φαίνεται στην εικόνα, και αναπτύσσονται στο εσωτερικό του ενδοθηλίου της αρτηρίας. Οι κλινικές εκδηλώσεις της αρτηριοσκλήρωσης αποτελούν τις ισχαιμικές επιπλοκές της νόσου. Δεν οφείλονται δηλαδή στη λιπώδη διήθηση, αλλά σε αποφρακτικές βλάβες, όπως ινώδεις πλάκες, ασβεστώσεις και βλάβες που έχουν ως αποτέλεσμα αιμορραγίες, εξελκώσεις ή θρομβώσεις. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://medlab.cs.uoi.gr/telemedicine/Cardiology/ch4/ch451.html>

## 5.2.2 Πως αναπτύσσεται σταδιακά η αρτηριοσκλήρωση

Η αρτηριοσκλήρωση είναι μια ασθένεια του εσωτερικού χιτώνα των μεγάλων και μεσαίων αρτηριών, που την χαρακτηρίζουν δυο πρωταρχικές βλάβες:

- ❖ η αθηρωματική πλάκα η οποία αποτελείται από λιποειδή ιζήματα
- ❖ η πάχυνση των ινών

Πιο συγκεκριμένα η αρτηριοσκλήρωση είναι μια χρόνια εκφυλιστική ασθένεια που επηρεάζει της μεσαίες και μεγάλες αρτηρίες. Χαρακτηρίζεται από το σχηματισμό μιας κιτρινωπής πλάκας που ονομάζεται αθήρωμα στον εσωτερικό χιτώνα των αγγείων, την ατροφία του συνδετικού ιστού την αποτιάνωση (απώλεια ασβεστίου) και νέκρωση.

Η πάθηση δεν μπορεί να εντοπιστεί με ακτινογραφία και ανεμπόδιστη προχωρά στην καταστροφή των αγγείων. Ξεκινά με μια δυσμενή αλλαγή στον ελαστικό ιστό του εσωτερικού χιτώνα των αγγείων, ο οποίος χάνει τη συνοχή του και παραμορφώνεται ελαφρά. Τότε παρατηρούμε κάτω από το ενδοθήλιο μια παθολογική εξάπλωση των μεγάλων συνδετικών κυττάρων (ιστοκύτταρα) στα οποία προσκολλάται η αρχική ουσία.

Σ' αυτό το στάδιο το σώμα έχει ακόμα την ικανότητα να αποβάλλει αυτά τα κατάλοιπα μέσω του μηχανισμού που δεν έχει ακόμα εξηγηθεί επαρκώς. Παρόλα αυτά ο μηχανισμός μπορεί να αντιμετωπίσει εμπόδια από διάφορους παράγοντες, οι οποίοι ενεργούν συγχρονισμένα ή χωριστά.

Κατόπιν, σε μια τρίτη φάση τα λιποειδή εισχωρούν στην πληγή, εμφανίζονται αφρώδη κύτταρα και λιπαρά μυώδη κύτταρα. Η πλάκα λοιπόν αρχίζει να παίρνει τη μορφή μιας σκληρής μάζας λιπαρού ιστού, που δημιουργεί αναταράξεις στη ροή του αίματος και στην οποία διάφορες ουσίες που βρίσκονται μέσα στο αίμα (ιδιαίτερα τα αιμοπετάλια) αρχίζουν να προσκολλώνται.

Βαθμιαία αυξάνεται το μέγεθος της πλάκας. Το αγγείο παραμορφώνεται αισθητά και συστέλλεται αναλογικά η διάμετρός του. Συνήθως η πλάκα σημειώνει απώλεια ασβεστίου και η αρτηρία γίνεται ινώδης. Το περιεχόμενό της που μοιάζει με λιπαρό πολτό (το αθήρωμα προέρχεται από την ελληνική λέξη αθήρα, που σημαίνει πολτός) διοχετεύεται στο κυκλοφοριακό. Σε ένα περισσότερο εξελιγμένο στάδιο, σχηματίζεται θρόμβος στην οπή του αγγείου, ο θρόμβος αποτελείται κυρίως από αιμοπετάλια και ινώδεις ακαθαρσίες. Ο θρόμβος μπορεί να προκαλέσει, όταν αναπτυχθεί πλήρως, εμπόδιο στο αγγείο ή να σπάσει και να προκαλέσει αρτηριακή εμβολή ή ακόμα να είναι η αιτία της καταστροφής των ελαστικών και να έχει σαν αποτέλεσμα αρτηριακά ανευρύσματα, πράγμα που είναι ιδιαίτερα σοβαρό.

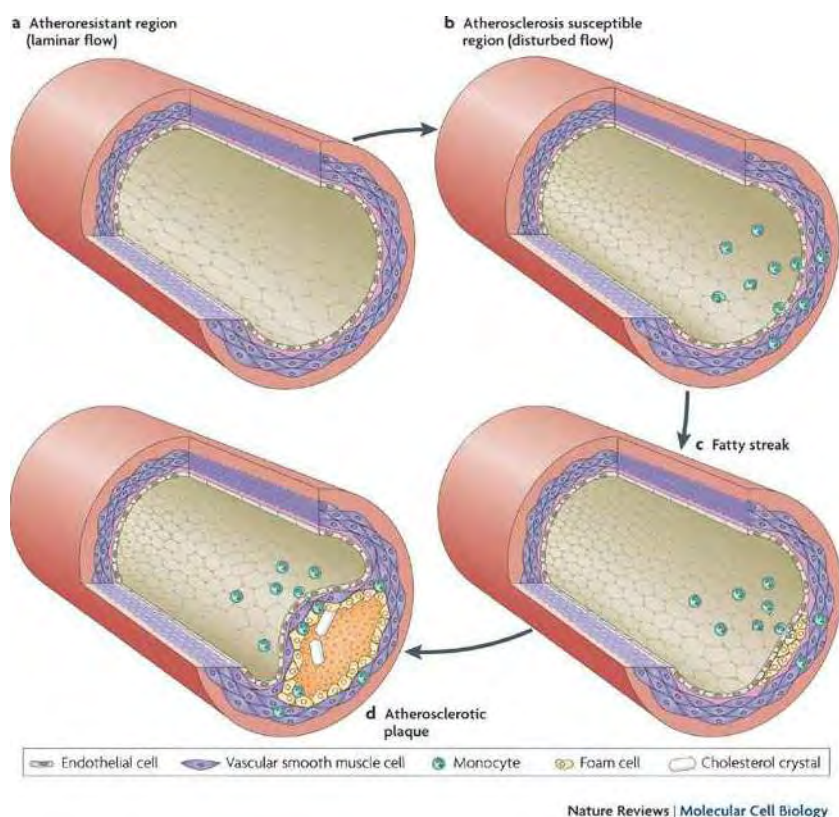


**Εικόνα 5.2.2.1** Σταδιακή μεταβολή μιας φυσιολογικής αρτηρίας σε αρτηρία με αθηροσκλήρωση. Στην πρώτη εικόνα μπορούμε να δούμε μία φυσιολογική αρτηρία. Το τοίχωμα μιας αρτηρίας αποτελείται από διάφορα στρώματα. Η



εσωτερική επένδυση ή το εσωτερικό στρώμα (ενδοθήλιο) είναι συνήθως ομαλή και συνεχής. Η αρτηριοσκλήρωση, όπως φαίνεται στη δεύτερη εικόνα, αρχίζει όταν τραυματίζεται το ενδοθήλιο. Κατόπιν ορισμένα λευκοκύτταρα του αίματος, αποκαλούμενα μονοκύτταρα, ενεργοποιούνται και κινούνται από το αίμα και μέσω του τραυματισμένου ενδοθηλίου μιας αρτηρίας στο τοίχωμα αυτής. Μέσα στο τοίχωμα μετασχηματίζονται σε αφρώδη κύτταρα, τα οποία είναι κύτταρα που συλλέγουν τα λιπαρά υλικά, κυρίως χοληστερόλη. Ταυτόχρονα, τα λεία μυϊκά κύτταρα κινούνται από το μέσο χιτώνα προς το ενδοθήλιο και εκεί πολλαπλασιάζονται. Επίσης, συνδετικός και ελαστικός ιστός συσσωρεύεται κάτω από το ενδοθήλιο, όπως επίσης και συντρίμμια κυττάρων, κρύσταλλοι χοληστερόλης και ασβέστιο. Αυτή η συσσώρευση των αφρωδών κυττάρων, των λείων μυϊκών κυττάρων, και άλλων υλικών διαμορφώνει μια ετερόκλητη συσσώρευση αποκαλούμενη αθήρωμα ή αθηρωσκληρυντική πλάκα. Καθώς η πλάκα μεγαλώνει από τη συνεχή εναπόθεση των ανωτέρω υλικών, παχύνεται και καταλαμβάνει το εσωτερικό της αρτηρίας, όπως δείχνεται στην τρίτη εικόνα. Αυτό δημιουργεί τοπικά στένωση της αρτηρίας που εμποδίζει την ομαλή ροή του αίματος. Έτσι λοιπόν, υπό την επίδραση των προδιαθεσικών παραγόντων επέρχεται δυσλειτουργία του ενδοθηλίου των στεφανιαίων αρτηριών, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Εν συνεχεία, η χοληστερίνη και ειδικά η LDL (κακή) χοληστερίνη εισέρχεται στο τοίχωμα του αγγείου και προσελκύει τα μονοκύτταρα που και αυτά προσλαμβάνουν χοληστερίνη. Έτσι σχηματίζεται η αθηρωματική πλάκα ή αθήρωμα. Τα σχήματα βρίσκονται στην ηλεκτρονική διεύθυνση

[http://www.ladakis.gr/item.asp?CONTENT\\_PAGE=item.asp&webitemid=Wi000001080&CODE2=CARDIOLOGICAL&CODE3=HEALTH](http://www.ladakis.gr/item.asp?CONTENT_PAGE=item.asp&webitemid=Wi000001080&CODE2=CARDIOLOGICAL&CODE3=HEALTH)



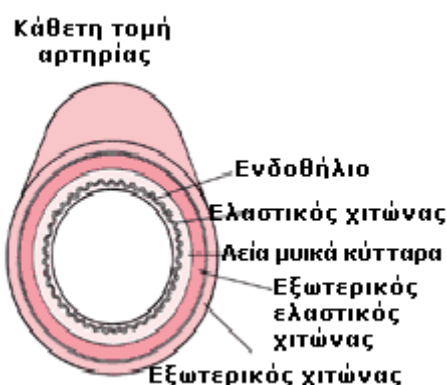
**Εικόνα 5.2.2.2** Ο σχηματισμός πλάκας σε μία αρτηρία είναι η βασική αιτία για το φραγμό μίας κύριας εγκεφαλικής αρτηρίας που μπορεί να οδηγήσει

τελικά σε εγκεφαλικό ή καρδιακό επεισόδιο καθώς και σε καρδιοαγγειακές νόσους. Στην εικόνα παριστάνονται τα βήματα «κλειδιά» που οδηγούν μια αρτηρία με φυσιολογικά και υγιή τοιχώματα σε μία αρτηρία με αθηρωματική πλάκα. Στην εικόνα (a) το τοίχωμα της αρτηρίας είναι ανθεκτικό στην αθηρωματική πλάκα. Στη συνέχεια, εικόνα (b), παρατηρούμε μία περιοχή ευπαθή στην αθηρωσκλήρωση. Στην εικόνα (c) τα λιπίδια συσσωρεύονται στο τοίχωμα της αρτηρίας, ενώ στην τελευταία εικόνα (d) έχει σχηματιστεί η αθηρωματική πλάκα που τελικά αποτελείται από τη συσσώρευση αφρώδη κυττάρων. Η εικόνα προέρχεται από το abstract των Yang et al. με τίτλο «Mathematical Modeling and Simulation of the Formation and Evolution of Plaques in Blood Vessels», 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.

### 5.2.3 Η ανατομία της καρδιάς και των στεφανιαίων αρτηριών

Η καρδιά είναι μια τετράχωρος (δύο κόλποι και δύο κοιλίες) μυϊκή αντλία για την κυκλοφορία του αίματος στο σώμα μας. Έχει 4 βαλβίδες (τριγλώχινα, πνευμονική, μιτροειδή και αορτική βαλβίδα). Επιπρόσθετα, έχει δύο προσαγωγά αγγεία (άνω και κάτω κοίλες φλέβες, πνευμονικές φλέβες) και δύο αγγεία (πνευμονική αρτηρία και αορτή).

Ο καρδιακός μυς χρειάζεται οξυγόνο και θρεπτικές ουσίες, τις οποίες παίρνει από τις στεφανιαίες αρτηρίες. Η αορτή μόλις βγει από την καρδιά και αμέσως πάνω από την αορτική βαλβίδα δίνει τη δεξιά και αριστερά στεφανιαία αρτηρία. Η δεξιά στεφανιαία διακλαδίζεται σε επιχείλιο κλάδο, οπίσθιο κατιόντα και οπισθοπλάγιο κλάδο. Η αρχή της αριστεράς στεφανιαίας ονομάζεται στέλεχος και μετά διχάζεται στον πρόσθιο κατιόντα (κλάδοι: διαγώνιοι και διαφραγματικοί) και περισπωμένη (κλάδοι: επιχείλιος).



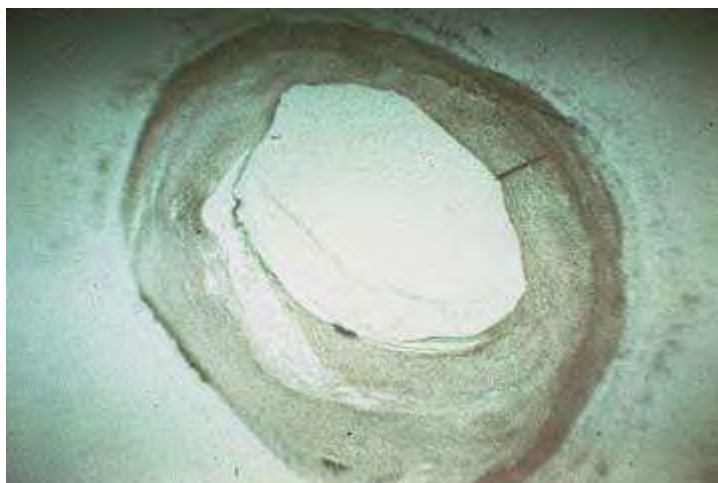
**Εικόνα 5.2.3.1** Κάθετη τομή ανθρώπινης αρτηρίας. Παρατηρώντας την ανωτέρω εικόνα μπορούμε να δούμε τα στρώματα που αποτελούν την αρτηρία. Στο εσωτερικό της αρτηρίας βρίσκεται ένα λεπτό στρώμα που ονομάζεται Ενδοθήλιο, ενώ στο εξωτερικό τμήμα υπάρχει ένα παχύτερο στρώμα που ονομάζεται Εξωτερικός χιτώνας. Η παραπάνω εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση

#### 5.2.4 Θρόμβωση και αθηροσκλήρωση

Ο θρόμβος είναι μια μάζα από αίμα που πήζει μέσα στην καρδιά ή στις αρτηρίες όλου του σώματος. Οι θρόμβοι δημιουργούνται συχνά μέσα στις κοιλότητες της καρδιάς (κόλποι ή κοιλίες) ή μέσα στις αρτηρίες. Συνηθέστερα, οι θρόμβοι δημιουργούνται μέσα στις στεφανιαίες αρτηρίες της καρδιάς, τις αρτηρίες του εγκεφάλου, αλλά και σε μεγαλύτερου μεγέθους αρτηρίες, όπως π.χ. στα τοιχώματα της αορτής, ειδικά όταν αυτή είναι ανευρυσματική, όταν, δηλαδή, υπάρχει ανεύρυσμα της αορτής.

Η δημιουργία θρόμβου μέσα σε μια μικρού ή μεσαίου μεγέθους αρτηρία προκαλεί απόφραξη (φράξιμο) της αρτηρίας, οπότε παύει να αιματώνεται η συγκεκριμένη περιοχή που αρδεύει αυτή η αρτηρία. Έτσι, δημιουργούνται τα εμφράγματα σε διάφορα όργανα του σώματος (π.χ. καρδιά, εγκέφαλος, πνεύμονες). Αντίθετα, οι θρόμβοι στις μεγάλες αρτηρίες, όπως είναι η αορτή για παράδειγμα, δημιουργούνται συνήθως στο ανευρυσματικό μέρος του τοιχώματός της και μπορεί να αποσπαστούν και να δημιουργήσουν περιφερικό έμβολο.

**Σε αντιδιαστολή με τις θρομβώσεις όπου το αίμα πήζει και παρεμποδίζεται η κυκλοφορία στις αρτηρίες, με την αρτηριοσκλήρυνση συσσωρεύονται βαθμιαία λιπώδη ιζήματα στα εσωτερικά τοιχώματα του.**



**Εικόνα 5.2.4.1** Στη φωτογραφία μπορούμε να δούμε μια τομή κανονικής αρτηρίας. Συνήθως οι ανθρώπινες αρτηρίες διαθέτουν μεγάλα ανοίγματα για την μεταφορά οξυγόνου καθώς και όλων των άλλων θρεπτικών συστατικών σε όλους τους ιστούς του σώματος. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)





**Εικόνα 5.2.4.2** Σε αντίθεση με την προηγούμενη εικόνα, σε αυτή την περίπτωση της αρτηρίας το αίμα έχει πήξει, εμποδίζοντας την ροή του αίματος σε αυτή την αρτηρία. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται θρόμβωση αρτηρίας. Χωρίς κυκλοφορία, ο ιστός στον οποίο οδηγεί αυτή η αρτηρία κυριολεκτικά θα πεθάνει από ασφυξία και θα αχρηστευτεί σε μερικά λεπτά. Μερικές φορές η αρτηρία είναι στεφανιαία, δηλαδή αφορά την τροφοδότηση της ίδιας της καρδιάς με αίμα. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)

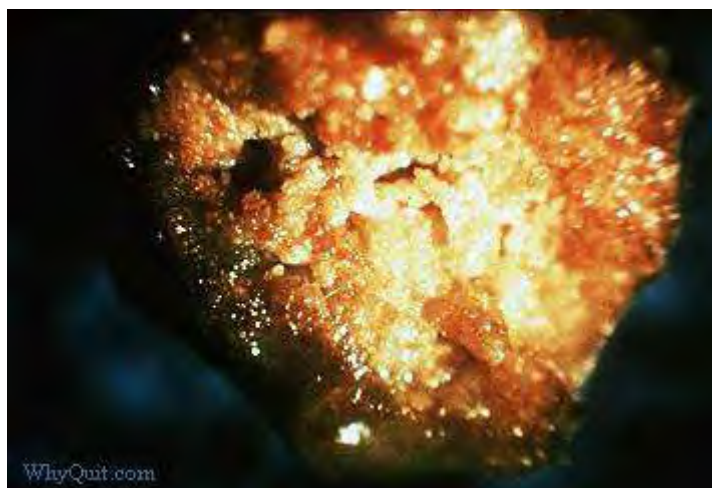


**Εικόνα 5.2.4.3** Παραπάνω βλέπουμε νεκρό μυ της καρδιάς (έμφραγμα του μυοκαρδίου). Ο ιστός είναι εύθραυστος όπως φαίνεται από τα σπασίματα. Αντί να στέλνει αίμα, όλη αυτή η περιοχή του μυ δεν μπορεί να εκτελέσει το σκοπό της. Οι καπνιστές παθαίνουν τέτοιες παθήσεις πολύ πιο συχνά λόγω των συνεπειών της νικοτίνης και του μονοξειδίου του άνθρακα. Η νικοτίνη λόγω των άμεσων συνεπειών στην ίδια την καρδιά, και το μονοξείδιο του άνθρακα με την καταλήστευση της παροχής οξυγόνου. Και τα δύο μαζί φράσσουν την κυκλοφορία του αίματος. Αν η περιοχή της καρδιάς που επηρεάστηκε ήταν αρκετά μεγάλη, τότε ο καπνιστής θα πέθαινε από το καρδιακό επεισόδιο. Άλλες φορές μικρότερες περιοχές επηρεάζονται και ο ασθενής επιζεί, αλλά καταστρέφονται περιοχές της καρδιάς με συνέπεια μόνιμες βλάβες από τη μειωμένη λειτουργία της καρδιάς. Το κάπνισμα τσιγάρων αυξάνει το ρίσκο από θρομβώσεις κατακόρυφα. Αν η θρόμβωση είναι σε αρτηρία και το αίμα δεν μπορεί να κυκλοφορήσει, τότε ο σχετικός ιστός που ανεφοδιάζεται χάνει την

επαφή με οξυγόνο και θρεπτικά συστατικά και πεθαίνει σε μερικά λεπτά. Αλλά οι θρομβώσεις δεν είναι ο μόνος τρόπος που η κυκλοφορία στις αρτηρίες εμποδίζεται. Ένας άλλος τρόπος είναι από την αθηρωμάτωση, που περιγράφηκε αναλυτικά προηγουμένως. Η φωτογραφία βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)



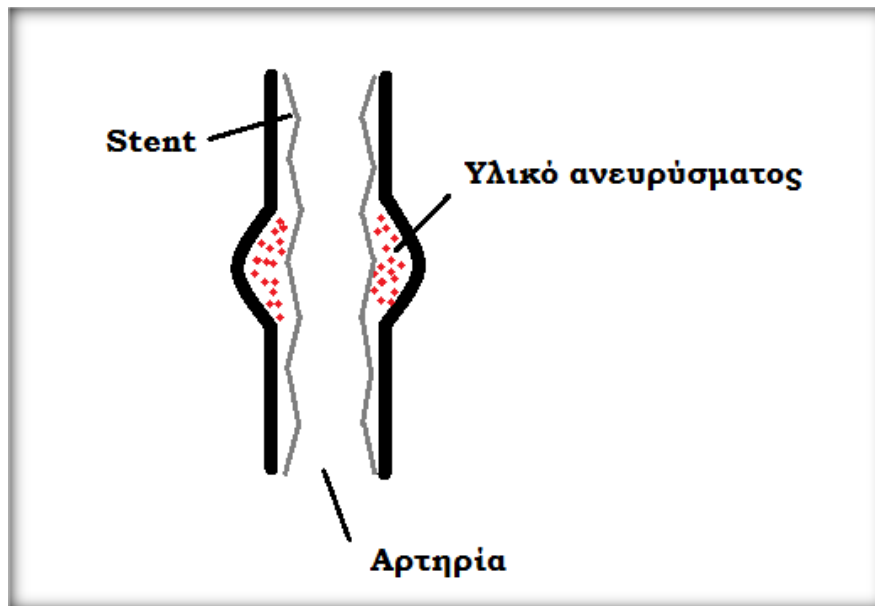
**Εικόνα 5.2.4.4** Στην εικόνα παριστάνεται μια στεφανιαία αρτηρία στην οποία έχει συσσωρευτεί λίπος. Με την πάροδο του χρόνου, αυτό το άνοιγμα γίνεται όλο και στενότερο και η ροή αίματος όλο και δυσκολεύεται. Αυτό αυξάνει φυσικά το φόρτο εργασίας της καρδιάς, λόγω της άντλησης του αίματος μέσω των μικρότερων αρτηριών με την αυξανόμενη αντίσταση. Αλλά αυτή η απόφραξη συμβαίνει όχι μόνο στις στεφανιαίες αρτηρίες, αλλά κυριολεκτικά σε όλες του σώματος. Είναι γνωστό ότι η νικοτίνη που περιέχεται στο τσιγάρο είναι όχι μόνο αγγειοσυσταλτική, κάνοντας τις αρτηρίες να συστέλλονται, αλλά προκαλεί επίσης στο σώμα απελευθέρωση του αποθηκευμένου λίπους και χοληστερόλης στις αρτηρίες. Εκτός από αυτό, το μονοξείδιο άνθρακα προκαλεί ένα φαινόμενο που κάνει το λίπος να επικολλάται στις αρτηρίες. Ο λόγος είναι ότι το μονοξείδιο άνθρακα χαμηλώνει το επίπεδο οξυγόνου του αίματος και αυτό επιδρά στα τοιχώματα των αρτηριών. Η φωτογραφία βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)



**Εικόνα 5.2.4.5** Παραπάνω απεικονίζεται μία αρτηρία που είναι φραγμένη τελείως με λίπος εξαιτίας της αθηρωματικής πλάκας. Όπως και στις θρομβώσεις, το αίμα δεν κυκλοφορεί και ο ιστός που σχετιζόταν με την αρτηρία καταστρέφεται. Αν αυτή η αρτηρία οδηγούσε στην καρδιά, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν καρδιακό επεισόδιο με καταστροφή μέρους της καρδιάς. Φυσικά θα ήταν αιτία θανάτου αν αφορούσε μεγάλο μέρος της καρδιάς. Η φωτογραφία βρίσκεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)

### 5.2.5 Ανευρύσματα

Το υλικό του ανευρύσματος ανήκει στην κατηγορία των Gels (gel-like material). Παρόλα αυτά, οι ιδιότητες του δεν είναι γνωστές, κυμαίνονται από υδαρή φάση μέχρι πιο άκαμπτη μορφή Gel. Επομένως, οι μηχανικές του ιδιότητες έχουν μεγάλη σημασία για την επιλογή του stent που θα τοποθετηθεί μέσα στο αγγείο καθώς και τον τρόπο εναπόθεσης του πάνω στα τοιχώματα του ανευρύσματος. Ο μηχανισμός αυτός εμφανίζει μεγάλες ομοιότητες με την υποστήριξη τμημάτων σπινθηρών. Ένας τρόπος για να ποσοτικοποιηθεί η ακαμψία του υλικού του ανευρύσματος (πιθανόν ο μοναδικός τρόπος) είναι να υλοποιηθούν πειράματα αντίστροφης-εφελκυστικής διεύθυνσης (pull-out test), όπου μπορεί να μετρηθεί η ακαμψία του υλικού και μάλιστα τοπικά σε διαφορετικά σημεία (σε περίπτωση που το υλικό είναι ομοιογενές). Επομένως, απαιτούνται οι σχετικές θεωρίες ανάλυσης του πειράματος της εφελκυστικής διεύθυνσης σε υλικό τύπου Gel. Το αρχικά ανισότροπο «σώμα» δείχνει να μετασχηματίζεται σε ένα ισότροπο, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες βάση του προτεινόμενου πειράματος διεύθυνσης. Βέβαια δεν έχουν όλα τα ανευρύσματα τις ίδιες ιδιότητες. Τα ανευρύσματα είναι ισότροπα υλικά που περιγράφονται από τον καταστατικό νόμο του Fung για ασυμπίεστα ελαστικά ισότροπα δείγματα. Συνθέτουν μία μη υγιή αρτηρία, φουσκώνουν ανεξέλεγκτα και σε κάποια στιγμή διαρρηγνύονται κιόλας. Σε ένα ανεύρυσμα συνήθως προηγείται της θραύσης η ευστάθεια.



**Σχήμα 5.2.5.1** Στο σχήμα βλέπουμε μία αρτηρία που νοσεί. Στα τοιχώματα της αρτηρίας έχει σχηματιστεί ανευρύσμα, το υλικό του οποίου ανήκει στην κατηγορία των gels. Για την «επισκευή» της αρτηρίας πραγματοποιείται αρχικά αφαίρεση του gel από το τοίχωμα και ακολουθεί ενίσχυση της περιοχής με μεταλλικού τύπου δικτυώματα που ονομάζονται stent.

## 5.2.6 Τα είδη της αρτηριοσκλήρωσης

- ❖ **Αρτηριοσκλήρωση** είναι κάθε σκλήρυνση (απώλεια της ελαστικότητας) των αρτηριδίων (μικρών αρτηριών), η οποία συχνά οφείλεται σε υπέρταση.
- ❖ Η **αθηροσκλήρωση** είναι η σκλήρυνση μιας αρτηρίας που οφείλεται στην αθηρωματική πλάκα. Η αθηροσκλήρωση είναι η πιο κοινή μορφή της αρτηριοσκλήρωσης. Η αθηροσκλήρωση χαρακτηρίζεται από πάχυνση του έσω χιτώνα με πλάκες που μπορούν να περιέχουν λιπίδια φορτωμένα μακροφάγα ("αφρώδη κύτταρα"). Οι πλάκες περιέχουν ελεύθερα λιπίδια (χοληστερόλη) και είναι επιρρεπείς σε αβεστοποίηση και εξέλκωση.
- ❖ **Αρτηριοσκλήρωση αποφρακτική** συνήθως εμφανίζεται σε μεσαίες και μεγάλες αρτηρίες του κάτω άκρου. Χαρακτηρίζεται από ίνωση του έσω χιτώνα και αβεστοποίηση.
- ❖ **Σκλήρυνση του αβεστοποιού Monckeberg** θεωρείται ως επί το πλείστον στους ηλικιωμένους, συνήθως στις αρτηρίες του θυρεοειδούς και της μήτρας. Χαρακτηρίζεται από αβεστοποίηση του εσωτερικού ελαστικού έλασμα, αλλά χωρίς την πάχυνση του έσω χιτώνα.



### 5.3 Η έννοια της αγγειοπλαστικής

**Α**γγειοπλαστική ονομάζεται η τεχνική της μηχανικής διάνοιξης ενός στενωμένου ή αποφραγμένου αγγείου, που συνήθως είναι αποτέλεσμα αρτηριοσκλήρωσης ή κακοήθους εξεργασίας. **Το stent (ενδοπρόθεση) είναι ένας σωλήνας, κατασκευασμένος από ευγενή μέταλλα, που τοποθετείται στον αυλό του αγγείου με σκοπό να διατηρήσει τη βατότητά του και να αποτρέψει την απόφραξή του.**

Ο γιατρός εισάγει ένα καθετήρα (ονομάζεται οδηγός καθετήρας αγγειοπλαστικής) σε μια μεγάλη αρτηρία (συνήθως τη μηριαία αρτηρία), τον οποίο οδηγεί στο στόμιο της στενωμένης αρτηρίας της καρδιάς. Στη συνέχεια, μέσα από τον καθετήρα εισάγει ένα μακρύ και πολύ λεπτό σύρμα (ονομάζεται οδηγό σύρμα αγγειοπλαστικής) το οποίο φθάνει και περνά μέσα από τη στένωση της αρτηρίας. Πάνω σε αυτό το σύρμα «κυλά» ένας καθετήρας που στην άκρη του φέρει ένα μπαλόνι το οποίο τοποθετείται μέσα στη στένωση. Κατόπιν, ο γιατρός φουσκώνει το μπαλόνι το οποίο συμπιέζει την αθηρωματική πλάκα και διαστέλλει τη στενωμένη αρτηρία. Στη συνέχεια, αφαιρείται ο καθετήρας-μπαλόνι. Εάν ο γιατρός αποφασίσει να τοποθετήσει stent πάνω από τον οδηγό σύρμα, «κυλά» ένας άλλος καθετήρας ο οποίος φέρνει στην άκρη του μπαλόνι που έξω από αυτό τοποθετείται το συρμάτινο πλέγμα (stent). Με το φούσκωμα του μπαλονιού διαστέλλεται και το stent. Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας, το μπαλόνι κρατά τη στένωση ανοικτή. Κατόπιν το μπαλόνι ξεφουσκώνει και αφαιρείται, ενώ το stent παραμένει μέσα στη στένωση, κρατώντας την αρτηρία ανοικτή.



**Εικόνα 5.3.1** Αγγειοπλαστική με τοποθέτηση stent στο εσωτερικό της μη υγιούς αρτηρίας. Η αρτηρία του σχήματος εμφανίζει στο ενδοθήλιο ένα κίτρινο λιπώδες στρώμα που είναι γνωστό ως αθηρωματική πλάκα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη σκλήρυνση της αρτηρίας και τη μείωση της ροής του αίματος μέσα από αυτή. Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου τοποθετείται στο εσωτερικό της αρτηρίας ένα μεταλλικό πλέγμα γνωστό σαν stent. Η τοποθέτησή του έχει σαν στόχο να αποτρέψει την απόφραξη της αρτηρίας. Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://dedesioannis.com/2.6>

### 5.3.1 Σύντομη ιστορία του stent

Η έννοια του stent δημιουργήθηκε μετά τη χρήση των μπαλονιών για τη διαστολή των στεφανιαίων αρτηριών (αγγειοπλαστική). Και αυτό επειδή η αγγειοπλαστική δημιουργούσε ένα σοβαρό πρόβλημα. Περίπου το 30% των στεφανιαίων αρτηριών που διατείνονταν μέσα στο πρώτο εξάμηνο, λόγω μιας υπέρ-πλαστικής αντίδρασης του τοιχώματος της αρτηρίας από το τραυματισμό της, ή λόγω της διάτασης του μπαλονιού ξανάκλεινε ή δημιουργούσε σοβαρή στένωση. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα ήταν η εγχείρηση bypass.

Η σκέψη για λύση αυτού του προβλήματος ήταν απλή. Να δημιουργηθεί ένας σωλήνας ή ένας "νάρθηκας" από μέταλλο που να τοποθετείται στο στενωμένο σημείο της αρτηρίας και να την κρατά ανοικτή. Έτσι δημιουργήθηκαν τα stent που αποτελούνται από ένα ελαστικό μέταλλο σαν πλέγμα τοποθετημένο πάνω από ένα μπαλόνι αγγειοπλαστικής που βρίσκεται στο άκρο ενός ειδικού καθετήρα. Το stent μόλις τοποθετηθεί πάνω από τη στένωση εκπύσσεται κατά πλάτος με το φούσκωμα του μπαλονιού. Το 1986, στην Τουλούζη της Γαλλίας, ο Ζακ Puel και ο Ulrich Sigwart τοποθέτησαν το πρώτο stent σε μια ανθρώπινη στεφανιαία αρτηρία. Το 1994 το πρώτο Palmaz-Schatz stent εγκρίθηκε για χρήση στις Ηνωμένες Πολιτείες. Κατά τη διάρκεια της επόμενης δεκαετίας, διάφορες γενεές, από γυμνό μέταλλο, stent αναπτύχθηκαν, με όλο και καλύτερα αποτελέσματα.



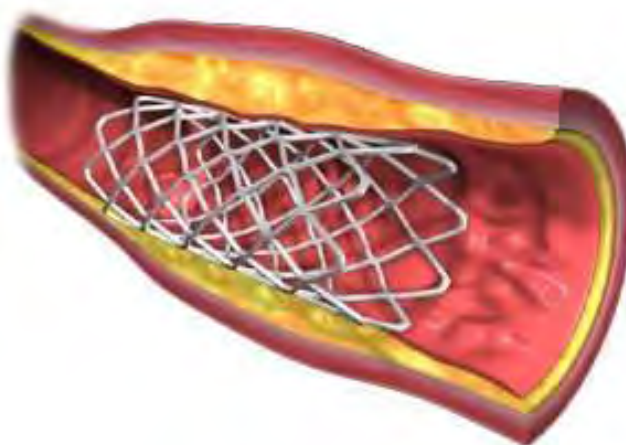
**Εικόνα 5.3.1.1** Στην εικόνα παριστάνεται ένα μεταλλικό πλέγμα που ονομάζεται stent. Πρόκειται για ένα κυλινδρικό μεταλλικό πλέγμα που τοποθετείται συνήθως μέσα στο αγγείο. Σκοπός του είναι να αποτρέψει την απόφραξη του αγγείου και να συμβάλλει με τον τρόπο αυτό στην καλύτερη ροή του αίματος διαμέσου του αγγείου. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση [http://www.incardiology.gr/pathiseis\\_stefaniaia/pc\\_stent.htm](http://www.incardiology.gr/pathiseis_stefaniaia/pc_stent.htm)

### 5.3.2 Τι είναι και που τοποθετείτε το stent

Το stent είναι ένα συρμάτινο πλέγμα που χρησιμοποιείται για να διατηρήσει μια αρτηρία ανοιχτή κατά τη διάρκεια της αγγειοπλαστικής. Το stent αρχικά είναι συμπτυγμένο και τοποθετείται γύρω από το μπαλονάκι που χρησιμοποιείται για την επέμβαση και, καθώς αυτό φουσκώνει, τεντώνονται μαζί με την αρτηρία και μένει εκεί για να την διατηρήσει ανοιχτή όταν το μπαλονάκι αφαιρεθεί. Αυτό έχει σαν συνέπεια την καλύτερη ροή του αίματος στον μυ της καρδιάς και την ανακούφιση των συμπτωμάτων (συνήθως θωρακικός πόνος). Παρόλα αυτά, η τεχνική αυτή δεν είναι κατάλληλη για όλους τους ασθενείς. Είναι καλύτερη για ασθενείς με μία ή δύο περιοχές στενώσεως σε μεγάλες αρτηρίες, ενώ δεν προσφέρει πολλά σε όσους έχουν πολλές μικρές στενωμένες περιοχές ή στένωση και στις τρεις βασικές στεφανιαίες αρτηρίες. Στους παραπάνω ασθενείς τα stents βοηθάνε στην μη επαναστένωση που μπορεί να προκύψει μετά την επέμβαση με το μπαλονάκι ή από άλλες διαδικασίες που χρησιμοποιούν καθετήρα. Επίσης, βοηθάνε στην αποκατάσταση της ροής του αίματος στις περιπτώσεις που μια αρτηρία μπορεί να έχει τραυματιστεί από τον καθετήρα του μπαλονιού κατά τη διάρκεια μιας επέμβασης.

Η επαναστένωση της αρτηρίας μπορεί να συμβεί ακόμα και μετά την τοποθέτηση του stent. Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται ειδικά stent εμποτισμένα με φάρμακα τα οποία απελευθερώνονται σταδιακά στα τοιχώματα της αρτηρίας και την κρατάνε ανοιχτή. Τα νέα αυτά stent υπόσχονται καλύτερη μακροπρόθεσμη πορεία για τον ασθενή.

Οι ασθενείς που έχουν κάνει τοποθέτηση stent πρέπει να λαμβάνουν φάρμακα που βοηθούν την αραιώση του αίματος (π.χ. Ασπιρίνη). Κάτι πολύ σημαντικό είναι ότι ο ασθενής πρέπει να αποφύγει την Μαγνητική τομογραφία για τις πρώτες 4 εβδομάδες μετά την επέμβαση και να έρθει σε επαφή με το γιατρό του αν πρέπει να υποβληθεί σε μια τέτοια εξέταση.



**Εικόνα 5.3.2.1** Παρατηρώντας την εικόνα παραπάνω βλέπουμε μία αρτηρία που έχει υποστεί αρτηριοσκλήρωση. Μια φυσιολογική αρτηρία αποτελείται από

δύο στρώματα, το ενδοθήλιο στο εσωτερικό της και τον Έξω χιτώνα στο εξωτερικό της. Στην περίπτωση μη υγιούς αρτηρίας, όπως στην εικόνα, αναπτύσσεται ένα τρίτο στρώμα πάνω στο ενδοθήλιο που είναι γνωστό ως αθηρωματική πλάκα. Με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται το πάχος του κιτρινωπού λιπώδους στρώματος που «προχωρά» στην απόφραξη της αρτηρίας, με αποτέλεσμα να παρεμποδίζεται η ροή του αίματος. Για την αντιμετώπιση της αθηροσκλήρωσης οι επιστήμονες τοποθετούν stent (μεταλλικό πλέγμα) στο εσωτερικό της αρτηρίας, έτσι ώστε να κρατήσουν «ανοιχτή» την αρτηρία για τη διευκόλυνση της κυκλοφορίας του αίματος. Η παραπάνω εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://kardiologia.blogspot.com/2009/02/stent-to.html>

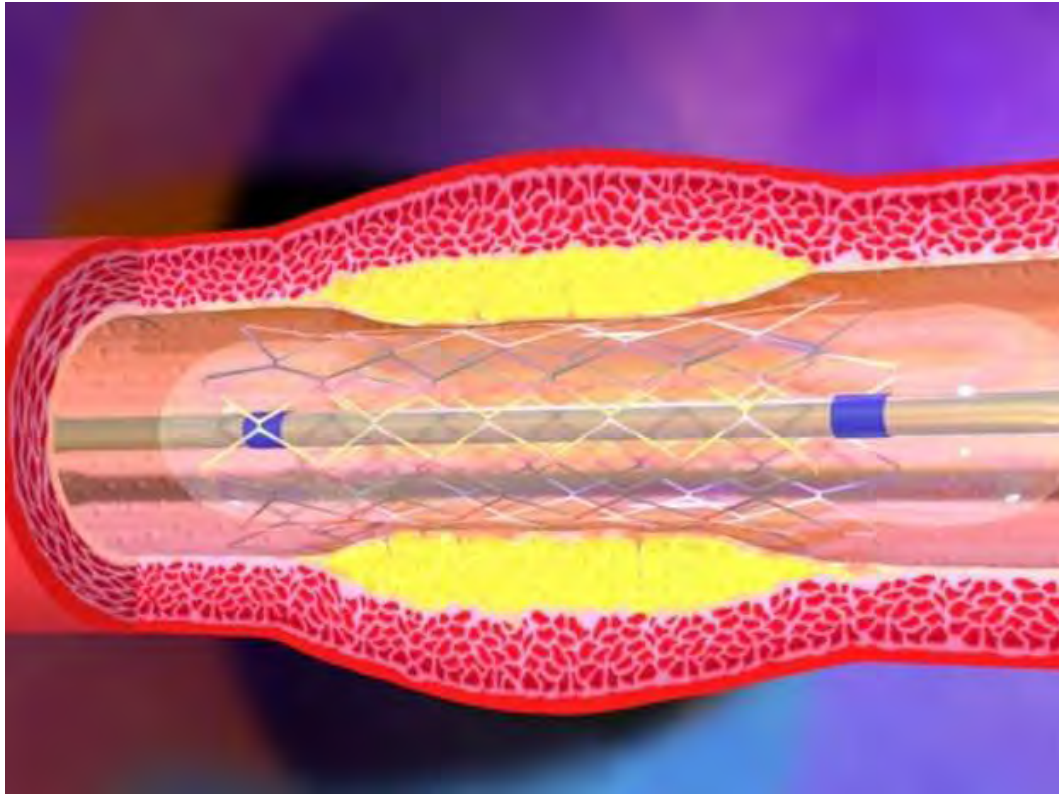
Παρόλο που τα γυμνά stents ουσιαστικά μείωσαν σημαντικά το ποσοστό επαναστένωσης δεν το εξάλειψαν. Έτσι, σε ένα ποσοστό 25% των περιπτώσεων στους έξι μήνες χρειάζονταν επανάληψη της αγγειοπλαστικής ή τη διενέργεια bypass. Η επαναστένωση οφειλόταν κυρίως σε παθολογικά υπερβολική αύξηση των λείων μυϊκών ινών του τοιχώματος της αρτηρίας από το φούσκωμα του μπαλονιού και τον αποκαλούμενο «ελεγχόμενο τραυματισμό».

Από τη χρήση των stents κατανοήθηκε ότι η λύση του προβλήματος της επαναστένωσης δεν θα προερχόταν από την καθαρώς βελτίωση της μηχανικής λειτουργίας του stent αλλά με άλλο τρόπο και μάλιστα από τις φαρμακολογικές προόδους. Εάν η ιατρική χρησιμοποιεί το κυκλοφορικό σύστημα του ανθρώπου ως «εθνική οδό» για να εφαρμόσει μια θεραπεία με διάφορες συσκευές, θα μπορούσε επίσης να το χρησιμοποιήσει για τη χορήγηση τοπικά κάποιου φαρμάκου. Έτσι δοκιμάστηκαν διάφορα φάρμακα που ήταν γνωστό ότι διακόπτουν τις βιολογικές διαδικασίες που προκαλούν τη επαναστένωση.

Τα stents «ντύθηκαν» με αυτά τα φάρμακα, που προσαρμόστηκαν σε ένα λεπτό πολυμερές στρώμα στην εξωτερική πλευρά του stent. Μερικές φορές τα stent αυτά αναφέρονται και ως «ντυμένα» ή «εμποτισμένα» stent και χαρακτηρίζονται από τρία στοιχεία.

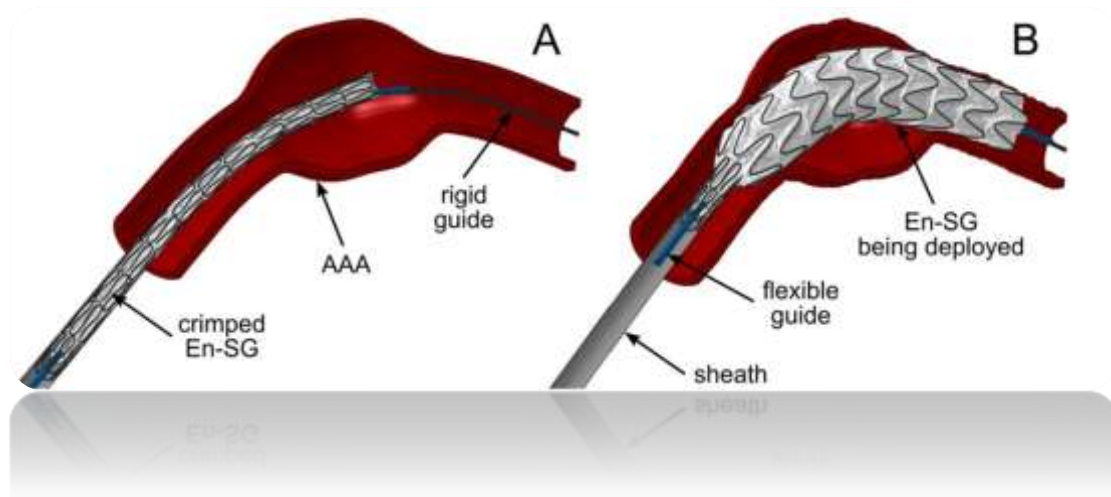
- ❖ Ο τύπος του stent που φέρνει το επίστρωμα φαρμάκου
- ❖ Ο τρόπος απελευθέρωσης του φαρμάκου
- ❖ Το είδος του φαρμάκου που απελευθερώνεται και το πώς ενεργεί στο αρτηριακό τοίχωμα για να αποτρέψει την επαναστένωση.





**Εικόνα 5.3.2.2** Παραπάνω απεικονίζεται ένα stent που απελευθερώνει φάρμακο. Τα stents τέτοιου τύπου χορηγούν στον οργανισμό φάρμακα που διακόπτουν τις βιολογικές διαδικασίες που προκαλούν επαναστένωση. Τα φάρμακα αυτά προσαρμόζονται σε ένα λεπτό πολυμερές στρώμα στην εξωτερική πλευρά του stent. Η εικόνα βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.tovima.gr/science/medicine-biology/article/?aid=389784>

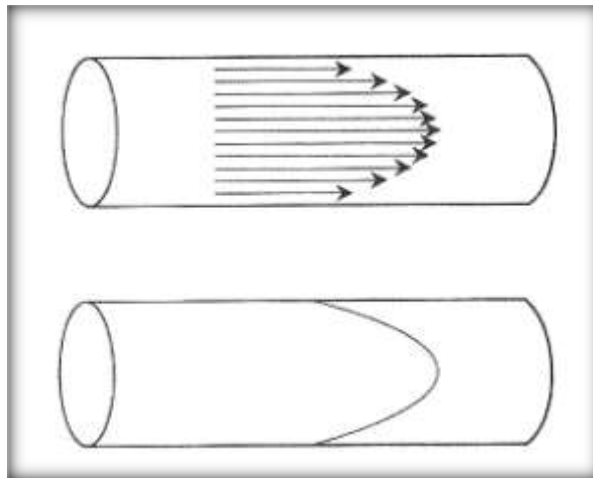
Μια άλλη βασική παράμετρος για την επιτυχή τοποθέτησή του είναι η ικανοποιητική διάταση αυτού, ώστε να μη παραμένουν κενά μεταξύ του stent και του αρτηριακού τοιχώματος τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε σοβαρά προβλήματα, όπως είναι η οξεία ή υποξεία θρόμβωση. Συνήθως η επιλογή του μεγέθους και της διάτασης γίνεται κατά την διάρκεια της στεφανιογραφίας, στο εργαστήριο καθετηριασμών, αν και μερικοί καρδιολόγοι χρησιμοποιούν περισσότερες αναλυτικές πληροφορίες που λαμβάνονται μέσω της ενδοαγγειακής απεικόνισης υπερήχων με ειδική συσκευή καθετήρα (ενδοστεφανιαίο υπερηχογράφημα).



**Εικόνα 5.3.2.3** Η «επισκευή» ανευρισμάτων είναι μια καθιερωμένη χειρουργική επέμβαση που μπορεί να εφαρμοστεί σε περίπλοκα κοιλιακά αορτικά ανευρίσματα. Πολλές φορές όμως, μια δευτερεύουσα επιπλοκή, μετά την «επισκευή» του ήδη υπάρχοντος ανευρίσματος, είναι συχνή. Για να αποφύγουμε αυτή την επιπλοκή μπορούμε να εφαρμόσουμε, σε περιπτώσεις ανευρισμάτων, τη νέα γενιά των stent που είναι πιο ευέλικτα συγκριτικά με τα παλαιότερα. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα stent που απεικονίζονται παραπάνω. Η στρατηγική του σχεδιασμού τους παραμένει εμπειρική. Στην εικόνα (A) μπορούμε να δούμε την είσοδο του ευέλικτου stent στο κοιλιακό αορτικό ανεύρισμα και στην εικόνα (B) τη διόγκωση του stent μέσα σε αυτό. Σύμφωνα λοιπόν, με προηγούμενες μελέτες επιβεβαιώνεται ότι η συμπεριφορά σε κάμψη της νέας γενιάς των stent είναι καλύτερη σε σχέση με παλαιότερα. Στην πράξη, η χρήση ευέλικτων stent μειώνει τη συχνότητα των επιπλοκών, όπως είναι για παράδειγμα η ενδοδιαρροή, η στένωση ή η θρόμβωση και η θραύση των τοποθετημένων stent μέσα σε ένα κοιλιακό αορτικό ανεύρισμα. Η εικόνα προέρχεται από το abstract των Demanget et al. με τίτλο «Computational Comparison of the Mechanical Behavior of Two Stent-Grafts Within a Tortuous Abdominal Aortic Aneurysm», 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.

## 5.4 Χαρακτηριστικά της ροής του αίματος

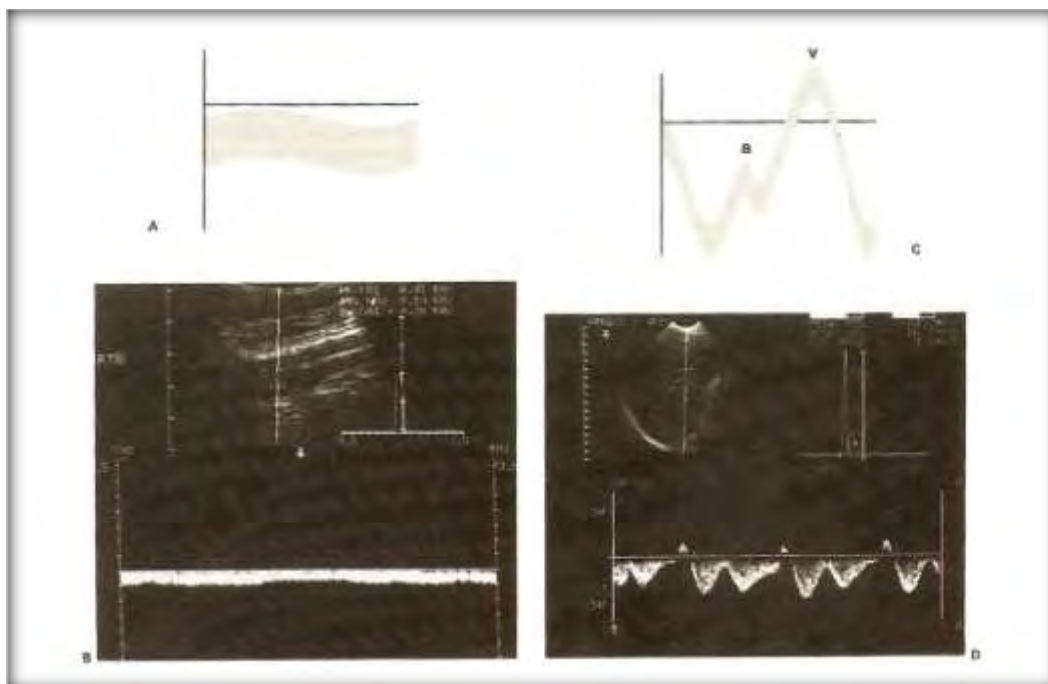
**Α**ποτέλεσμα της ροής του αίματος μέσα σε ένα αγγείο είναι η ανάπτυξη φαινομένων τριβής των στερεών συστατικών του αίματος, δηλαδή των ερυθρών αιμοσφαιρίων με τα τοιχώματα του αγγείου. Η παρουσία της τριβής έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας του αίματος κοντά στα τοιχώματα. Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνεται η χαρακτηριστική κατά σιβάδες ροή του αίματος με μεγαλύτερες ταχύτητες στο κέντρο και μικρότερες κοντά στα τοιχώματα του αγγείου.



**Εικόνα 5.4.1** Ροή του αίματος κατά σιβάδες

### 5.4.1 Φυσιολογική φλεβική ροή

Στις περιφερικές φλέβες η ροή του αίματος είναι σχεδόν συνεχής με χαμηλή ταχύτητα κίνησης η οποία δεν υπερβαίνει τα 2-3 cm/sec. Στις κεντρικές φλέβες, όπως η σφαγίτιδα, η λαγόνιος φλέβα, η κάτω κοίλη φλέβα κλπ, η ροή επηρεάζεται σε ένα βαθμό από την καρδιακή λειτουργία και συγκεκριμένα από τις μεταβολές της πίεσεως στις δεξιές κοιλότητες της καρδιάς (Εικόνα 5.4.1.1). Επιπρόσθετα, η ροή επηρεάζεται και από τις αναπνευστικές κινήσεις. Ο βαθμός επηρεασμού είναι διαφορετικός από άνθρωπο σε άνθρωπο αλλά γενικότερα τα φαινόμενα είναι πιο έντονα στις φλέβες οι οποίες βρίσκονται πλησιέστερα στην καρδιά. Ο υπολογισμός του όγκου ροής γίνεται με τη θεώρηση ότι το αγγείο είναι στρογγυλό και ενώ αυτό ισχύει για τις αρτηρίες δεν ισχύει πάντα για τις φλέβες οι οποίες αλλάζουν σχήμα (κυρίως οι επιπολής φλέβες) από την εξωτερική πίεση του ηχοβολέα.



**Εικόνα 5.4.1.1** Μεταβολές ροής οφειλόμενες στις μεταβολές πίεσεως στις δεξιές κοιλότητες της καρδιάς

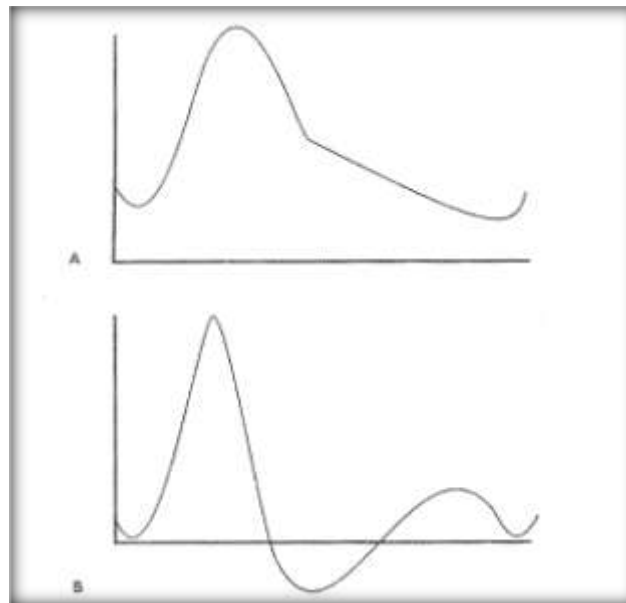
## 5.4.2 Φυσιολογική αρτηριακή ροή

Η ροή στις αρτηρίες είναι πολύπλοκη. Το αρτηριακό τοίχωμα είναι ελαστικό και διατείνεται καθώς το συστολικό κύμα ταξιδεύει κατά μήκος της αρτηρίας. Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής της αρτηρίας μεγαλώνει κατά 20-25%. Ταυτόχρονα υπάρχει ακτινική κίνηση του αίματος για να καταληφθεί το δημιουργικό κενό.

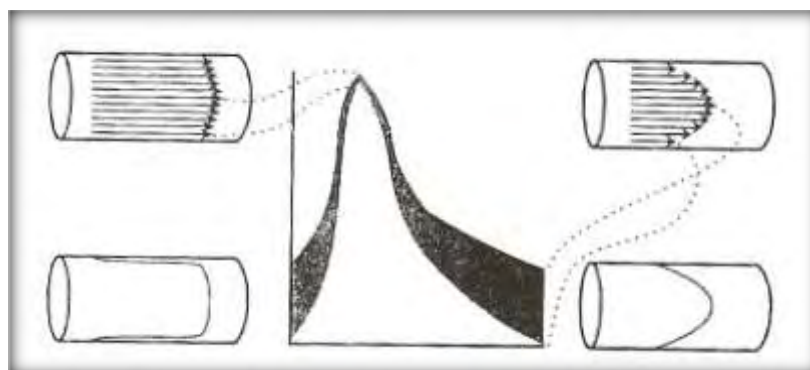
Κατά τη μελέτη της ροής και στον υπολογισμό της ταχύτητας κίνησης του αίματος με τη μέθοδο Doppler δε λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή της διαμέτρου του αγγείου και η ακτινική κίνηση του αίματος.

Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνονται οι κυματομορφές που αντιστοιχούν σε ροή σε αρτηρίες με χαμηλή περιφερική αντίσταση (A) και υψηλή (B), αντίστοιχα. Κατά τη συστολική φάση η κυματομορφή χαρακτηρίζεται από ταχεία άνοδο η οποία ακολουθείται από ταχεία κάθοδο στην αρχή της διαστολικής φάσης. Η ροή του αίματος κατά τη διαστολική φάση επηρεάζεται από παράγοντες όπως η αιμοδυναμική της καρδιάς, η κατάσταση του αρτηριακού τοιχώματος και η φύση του αρτηριακού δικτύου που τροφοδοτείται από την υπό μελέτη αρτηρία. Η κυματομορφή (A) αντιστοιχεί σε αρτηρία η οποία τροφοδοτεί δίκτυο με χαμηλή περιφερική αντίσταση (εγκέφαλος, νεφρά), ενώ η (B) αντιστοιχεί σε αρτηρία η οποία τροφοδοτεί δίκτυο με υψηλή περιφερική αντίσταση (περιφερικές αρτηρίες). Στη φάση της διαστολής η παρουσία των τριβών έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερη μείωση της ταχύτητας κοντά στα τοιχώματα και μεταβολή του προφίλ της ταχύτητας (Εικόνα 5.4.2.1). Στις αρτηρίες οι οποίες τροφοδοτούν δίκτυα υψηλής περιφερικής αντίστασης

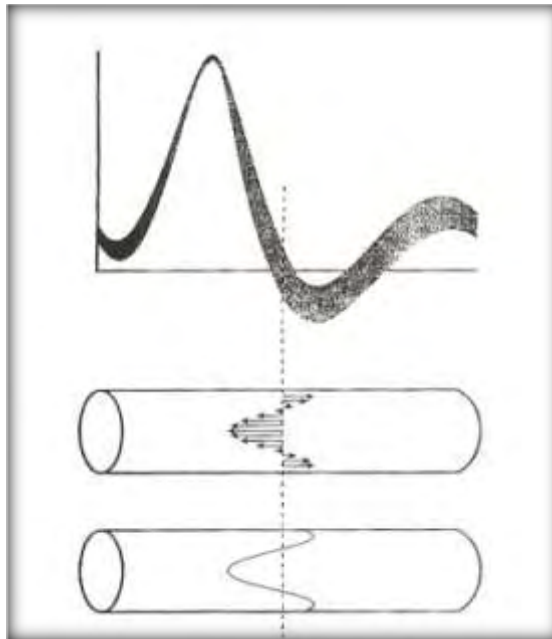
σε ορισμένες φάσεις του καρδιακού κύκλου παρατηρείται ταυτόχρονη κίνηση του αίματος και προς τις δύο κατευθύνσεις (Εικόνα 5.4.2.2).



**Εικόνα 5.4.2.1** Α. Ροή σε αρτηρία με χαμηλές περιφερικές αντιστάσεις, Β. Ροή σε αρτηρία με υψηλές περιφερικές αντιστάσεις

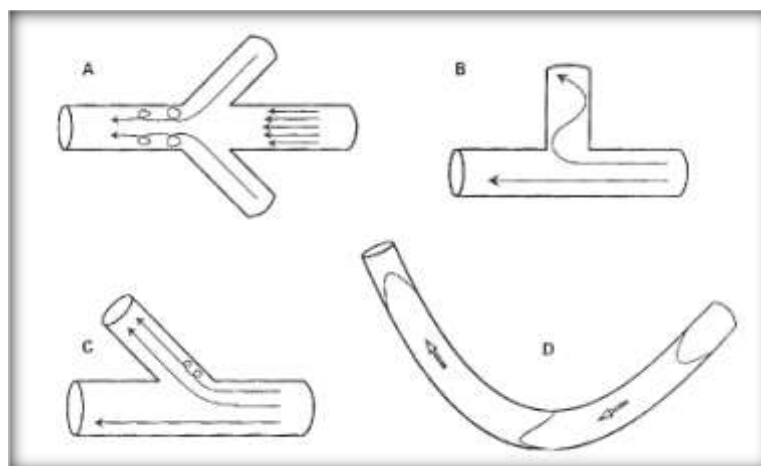


**Εικόνα 5.4.2.2** Μεταβολή ταχυτήτων στον καρδιακό κύκλο



**Εικόνα 5.4.2.3** Ταυτόχρονη κίνηση του αίματος και προς τις δύο κατευθύνσεις

Στη μελέτη με Doppler υποθέτουμε ότι η κίνηση του αίματος είναι παράλληλη με τα τοιχώματα του αγγείου το οποίο όμως δεν είναι πάντα αλήθεια (Εικόνα 5.4.2.4). Γωνιώσεις και κλάδοι καθώς επίσης μεταβολές της διαμέτρου των αγγείων, προκαλούν στροβιλισμούς και αναστροφή της ροής όπως συμβαίνει στον καρωτιδικό διχασμό. Τα ανωτέρω αιμοδυναμικά φαινόμενα είναι φυσιολογικά.

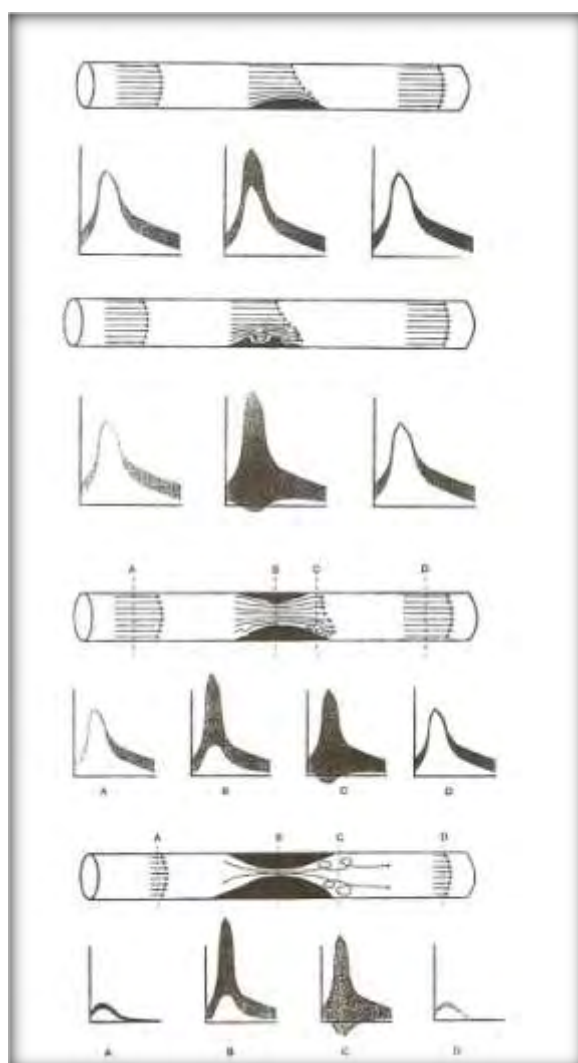


**Εικόνα 5.4.2.4** Διαταραχές της ροής ανατομικής αιτιολογίας

### 5.4.3 Ροή σε παθολογικές αρτηρίες

Τοιχωματικές αλλοιώσεις, όπως αθηρωματικές πλάκες, οι οποίες προκαλούν στένωση στον αυλό του αγγείου προκαλούν και ανάλογες

διαταραχές της αιματικής ροής. Οι διαταραχές αυτές είναι ανάλογες του βαθμού στένωσης και της μορφής της επιφάνειας της βλάβης. Στην Εικόνα που ακολουθεί φαίνονται σχηματικά οι διαταραχές της αιματικής ροής και οι κυματομορφές Doppler οι οποίες αναλογούν στις διαταραχές αυτές. Είναι σαφές ότι για στενώσεις μικρότερες του 50% και για ομαλές αθηρωματικές πλάκες δεν προκαλούνται αξιόλογες διαταραχές της ροής. **Αντίθετα, για στενώσεις μεγαλύτερες του 50% και κυρίως για στενώσεις μεγαλύτερες του 75% με την παρουσία αθηρωματικών πλακών με ανώμαλη επιφάνεια προκαλούνται αξιοσημείωτες διαταραχές της αιματικής ροής.**



#### 5.4.3.1 Αντιστοιχία μεταξύ διαταραχής ροής και κυματομορφών Doppler

Στις στενώσεις οι οποίες είναι μεγαλύτερες του 90%, όπως φαίνεται καθαρά στη εικόνα, πέραν της αύξησης της ταχύτητας στο σημείο της μέγιστης στένωσης και της παρουσίας έντονων στροβιλισμών, παρατηρείται σημαντική μείωση της ταχύτητας κίνησης του αίματος περιφερικά της στενώσεως.



## 5.5 Έμβιο-μηχανική των μαλακών ιστών

**Μ**ε τον όρο «μαλακός ιστός» εννοούμε μία πρωταρχική ομάδα ιστών που δεσμεύει, υποστηρίζει και προστατεύει το ανθρώπινο σώμα όπως είναι για παράδειγμα τα όργανα.

**Οι συνδετικοί ιστοί διαχωρίζονται από τους σκληρούς ιστούς όπως είναι τα κόκκαλα, για την υψηλή τους ευελιξία και τις «μαλακές» τους μηχανικές ιδιότητες.** Παραδείγματα μαλακών ιστών είναι οι τένοντες, οι σύνδεσμοι, τα αιμοφόρα αγγεία, το δέρμα και οι αρθρικοί χόνδροι μεταξύ πολλών άλλων. Οι τένοντες είναι το όργανο που συνδέει τους μυς με τα οστά και παράγει κίνηση, ενώ οι σύνδεσμοι συνδέουν τα κόκκαλα μεταξύ τους περιορίζοντας τη σχετική κίνηση. Τα αιμοφόρα αγγεία είναι «εξέχοντα» όργανα αποτελούμενα από μαλακούς ιστούς και τροφοδοτούν με αίμα κάθε κύτταρο του οργανισμού. Το δέρμα είναι το μεγαλύτερο όργανο και αποτελεί το 16% του βάρους ενός ενήλικα. Αυτό υποστηρίζει τα εσωτερικά όργανα και προστατεύει το σώμα μας! Ο αρθρικός χόνδρος είναι ένας λευκός, ελαστικός, λείος ιστός, πάχους 1-5 χιλιοστά, ο οποίος καλύπτει τα οστά που έρχονται σε επαφή σε μία άρθρωση και επιτρέπει την ομαλή, με ελάχιστη τριβή, κίνηση των αρθρικών επιφανειών.

Οι μαλακοί συνδετικοί ιστοί του σώματος είναι πολύπλοκες σύνθετες δομές οπλισμένες με ίνες. Η μηχανική τους συμπεριφορά είναι ισχυρά επηρεασμένη από τη συγκέντρωση και τη διάρθρωση συστατικών, όπως το κολλαγόνο και η ελαστίνη.

Το κολλαγόνο είναι ινώδης πρωτεΐνη του δερματικού ιστού και είναι πολύ σημαντικό για την ανθρώπινη φυσιολογία. Πρόκειται για ένα μακρομόριο μήκους γύρω στα 280 nm. Τα μόρια του κολλαγόνου είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ομοιοπολικούς δεσμούς «χτίζοντας» τα ινίδια κολλαγόνου, των οποίων η διάμετρος ποικίλει και είναι της τάξης του μεγέθους των 1.5 nm. Στη δομή των τενόντων και των συνδέσμων, για παράδειγμα, το κολλαγόνο εμφανίζεται σαν παράλληλα προσανατολισμένα ινίδια, ενώ πολύ άλλοι ιστοί έχουν ένα πολύπλοκο διαταραγμένο δίκτυο. Τα περισσότερα μόρια κολλαγόνου αποτελούνται από τρία αμινοξέα, τη γλυκίνη (33%), η οποία ενισχύει τη σταθερότητα των μορίων, την προλίνη (15%) και την υδροξυπρολίνη (15%).

Η ελαστίνη, όπως και το κολλαγόνο, είναι μία πρωτεΐνη που υπάρχει στο δέρμα και σε άλλους ιστούς που για τη λειτουργία τους απαιτείται ελαστικότητα. Το μόριο της ελαστίνης αυξομειώνεται σε μήκος καθώς έχει ελαστικές ιδιότητες. Η μείωση της ποσότητας της στο δέρμα προκαλεί χαλάρωση. Τα μόρια της ελαστίνης είναι ευέλικτα σε μεγάλο βαθμό και συγκεντρώνουν ένα τρισδιάστατο δίκτυο (όπως τα ελαστικά υλικά), το οποίο μπορεί να επιμηκυνθεί γύρω στις 2.5 φορές από το αρχικό του μήκος στην αφόρτιστη κατάσταση. Όπως και στην περίπτωση του κολλαγόνου, το 33% των συνολικών αμινοξέων της ελαστίνης αποτελείται από τη γλυκίνη. Αντίθετα, η προλίνη και η υδροξυπρολίνη περιέχονται σε χαμηλότερα ποσοστά σε σχέση με αυτά των μορίων του κολλαγόνου.



**Πίνακας 5.5.1** Μηχανικές ιδιότητες και βιοχημικές πληροφορίες για τα όργανα που αναφέρονται στον ανωτέρω πίνακα, τα οποία αποτελούνται κυρίως από μαλακούς συνδετικούς ιστούς. Παρατηρώντας τα μηχανικά χαρακτηριστικά του δέρματος και του αρθρικού χόνδρου όσον αφορά την παραμόρφωση βλέπουμε ότι παρουσιάζουν μεγάλη ελαστικότητα και μπορούν να δεχθούν μεγάλο ποσοστό επιμήκυνσης, σε αντίθεση με τον τένοντα.

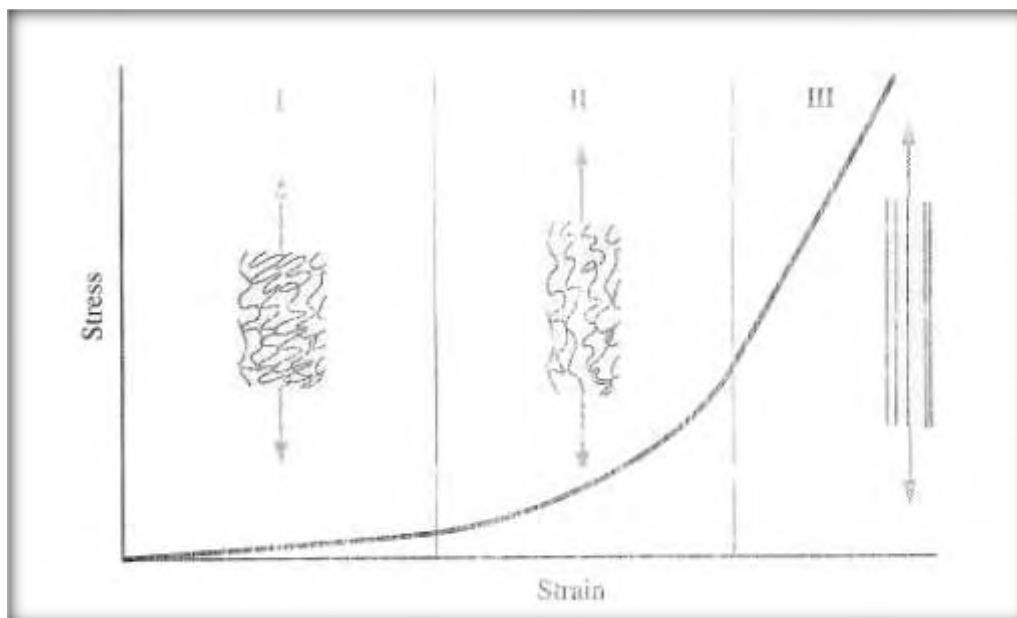
Υλικό	Τελική εφελκυστική δύναμη [MPa]	Τελική εφελκυστική παραμόρφωση [%]	Κολλαγόνο (% ξηρό βάρος)	Ελασίνη (% ξηρό βάρος)
Τένοντας	50-100	10-15	75-85	<3
Δέρμα	1-20	30-70	60-80	5-10
Αρθρικός χόνδρος	9-40	60-120	40-70	-

### 5.5.1 Γενικά μηχανικά χαρακτηριστικά των μαλακών ιστών

Οι μαλακοί ιστοί συμπεριφέρονται ανισότροπα επειδή οι ίνες τους τείνουν να έχουν προτιμητέες κατευθύνσεις. Με μία μικροσκοπική ματιά είναι μη ομογενή υλικά εξαιτίας της σύνθεσής τους. Η απόκριση σε εφελκυσμό ενός μαλακού ιστού είναι μη γραμμική και η εφελκυστική δύναμη εξαρτάται από το ρυθμό παραμόρφωσης. Σε αντίθεση με τους σκληρούς ιστούς, οι μαλακοί ιστοί συνήθως υποβάλλονται σε μεγάλες παραμορφώσεις. Ορισμένοι μαλακοί ιστοί παρουσιάζουν βισκοελαστική συμπεριφορά (χαλάρωση ή ερπυσμό), η οποία συσχετίζεται με την διατμητική αντίδραση του κολλαγόνου με τη μήτρα της πρωτεογλυκάνης.

Με ένα απλουστευμένο τρόπο, θα εξηγήσουμε την εφελκυστική συμπεριφορά του δέρματος, ένα όργανο που αποτελείται κυρίως από συνδετικούς ιστούς, το οποίο μπορεί να εκπροσωπήσει όσον αφορά τις μηχανικές του ιδιότητες πολλούς μαλακούς συνδετικούς ιστούς. Το δέρμα αποτελεί ένα τρισδιάστατο δίκτυο από ίνες που εμφανίζουν τυχαίες διευθύνσεις παράλληλες στην επιφάνεια. Στην εικόνα που ακολουθεί παριστάνεται ένα σχηματικό διάγραμμα μίας τυπικής καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης για το δέρμα. Η καμπύλη του διαγράμματος, είναι αντιπροσωπευτική για πολλούς μαλακούς ιστούς,

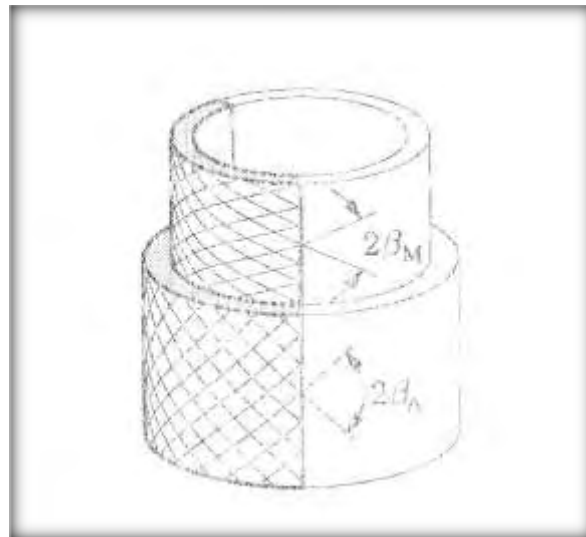
διαφέρει όμως σημαντικά από τις καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης σκληρών ιστών ή από άλλους τύπους (μηχανικών) υλικών. Επιπρόσθετα, η παρακάτω εικόνα δείχνει πώς οι ίνες κολλαγόνου ισιώνουν με την αύξηση της τάσης.



**Εικόνα 5.5.1.1** Σχηματικό διάγραμμα μίας τυπικής εφελκυστικής καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης για το δέρμα, που μπορούμε να διακρίνουμε τη μορφολογία των ινών κολλαγόνου. Η συμπεριφορά του δέρματος όσον αφορά την παραμόρφωση μπορεί να μελετηθεί σε τρεις φάσεις I, II και III. Κατά τη φάση I, με την απουσία του φορτίου οι ίνες κολλαγόνου, οι οποίες μοιάζουν με «υφαντά» μέσα σένα ρομβικού σχήματος πρότυπο, βρίσκονται σε κατάσταση χαλάρωσης και εμφανίζουν κυματισμούς και πτυχώσεις. Το απαραμόρφωτο δέρμα συμπεριφέρεται προσεγγιστικά ισοτροπικά. Αρχικά, απαιτούνται μικρές τάσεις για να επιτύχουμε μεγάλες παραμορφώσεις ατομικά στις ίνες κολλαγόνου. Στη φάση I λοιπόν, ο ιστός συμπεριφέρεται σαν ένα πολύ μαλακό (ισότροπο) ελαστικό φύλλο, και οι ίνες της ελαστίνης (που κρατούν το δέρμα λείο) είναι κυρίως υπεύθυνες για το μηχανισμό «τεντώματος». Η σχέση τάσης-παραμόρφωσης είναι προσεγγιστικά γραμμική, ενώ το μέτρο ελαστικότητας του δέρματος στη φάση I είναι χαμηλό (0.1-2 MPa). Στη φάση II, όσο το φορτίο αυξάνεται, οι ίνες κολλαγόνου τείνουν να γίνουν γραμμικές κατά τη διεύθυνση του επιβαλλόμενου φορτίου. Οι πτυχωτές ίνες κολλαγόνου σταδιακά επιμηκύνονται και αλληλεπιδρούν με την ενυδατωμένη μήτρα. Με την παραμόρφωση οι «τσακισμένες» γωνίες των λεπτών ινών του κολλαγόνου μετατρέπονται σε γραμμικά ινίδια. Στη φάση III, υπό την επιβολή μεγάλων εφελκυστικών τάσεων, το πτυχωτό πρότυπο εξαφανίζεται και τα ινίδια κολλαγόνου γίνονται ίσια. Αυτά είναι πρωταρχικά ευθυγραμμισμένα μεταξύ τους στην κατεύθυνση που εφαρμόζεται το φορτίο. Οι ισιωμένες ίνες κολλαγόνου αντιστέκονται ισχυρά στη φόρτιση και ο ιστός γίνεται άκαμπτος με την επιβολή υψηλότερων τάσεων. Η σχέση τάσης-παραμόρφωσης γίνεται ξανά γραμμική. Στην περίπτωση που υπερβούμε τη φάση III, η εφελκυστική δύναμη έχει υπερβεί την τελική της τιμή και οι ίνες του κολλαγόνου θα αρχίζουν να σπάνε.



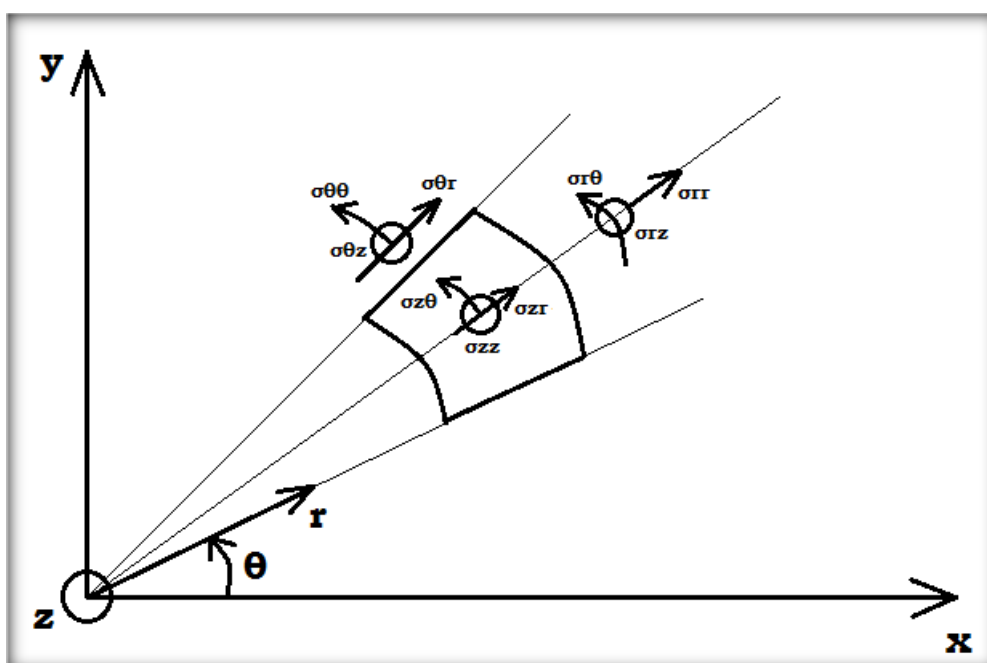
**Εικόνα 5.5.1.2** Διευθέτηση των ινών κολλαγόνου στην αρχική κατάσταση (δεν υπάρχουν παραμορφώσεις στο σώμα). Ο ιστός χαρακτηρίζεται από δύο μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{a}_{01}$ ,  $\mathbf{a}_{02}$  στη θέση  $\mathbf{X}$ .



**Εικόνα 5.5.1.3** Απεικόνιση ενός ιδεατού «μοντέλου» αρτηρίας στην αρχική του κατάσταση (χωρίς την επιβολή κάποιας φόρτισης). Η αρτηρία του σχήματος είναι ένας κυκλικός σωλήνας αποτελούμενος από δύο στρώματα, που διακρίνονται από κάποιο πάχος. Το μεσαίο στρώμα του σωλήνα αποκαλείται «media» και το εξωτερικό «adventitia». Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ελαστικές ιδιότητες του μέσου στρώματος της αρτηρίας (media) και του εξωτερικού στρώματος της αρτηρίας (adventitia) διαφέρουν σημαντικά. **Το στρώμα «media» είναι πιο άκαμπτο από το «adventitia».** Ειδικότερα, στην αφόρτιστη κατάσταση το μέτρο ελαστικότητας του «media», για την αορτή του θώρακα πολλών γουρουνιών, είναι περίπου μία τάξη υψηλότερο από το αντίστοιχο για το «adventitia». **Επιπρόσθετα, στην περίπτωση νέας, υγιούς αρτηρίας το «intima» (εσώτατο στρώμα της αρτηρίας) θεωρείται αμελητέο όσον αφορά το πάχος του και τη μηχανική δύναμη.** Κάθε στρώμα ιστού αντιμετωπίζεται σαν ένα σύνθετο οπλισμένο σώμα από δύο «οικογένειες» ινών κολλαγόνου και θεωρείται κυλινδρικά ορθότροπο. Παρατηρώντας την εικόνα, τα μεγέθη  $\beta_M$ ,  $\beta_A$  παριστάνουν τις γωνίες μεταξύ των ινών κολλαγόνου και της περιμετρικής κατεύθυνσης του «media» και του «adventitia».

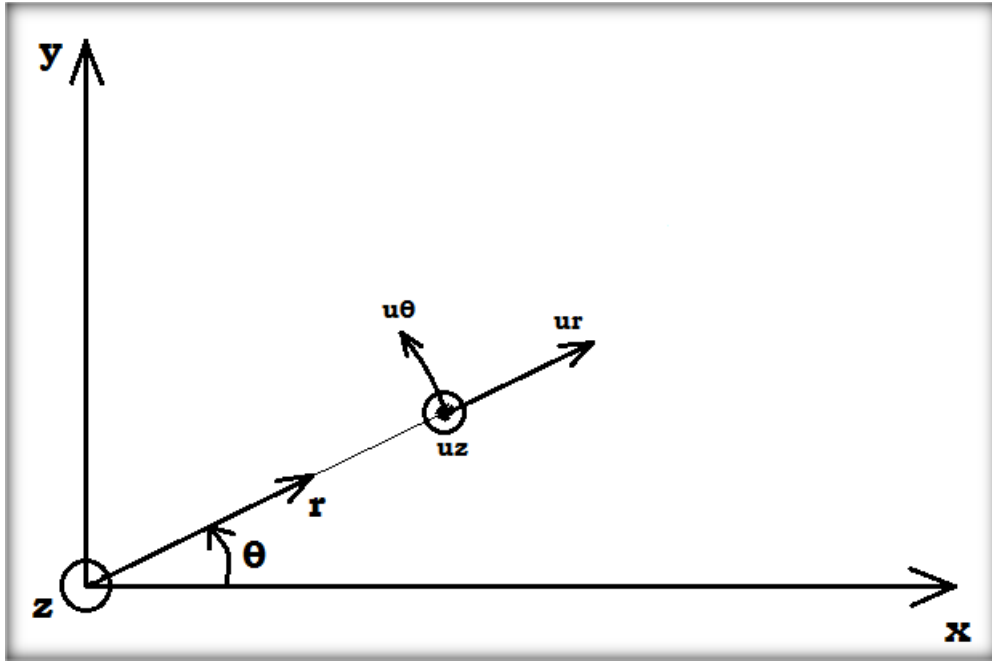
## 5.6 Το «μοντέλο» της αρτηρίας

Μία ανθρώπινη αρτηρία χαρακτηρίζεται ως ένα ανισότροπο υλικό που αποτελείται από τρία στρώματα. Τα στρώματα της αρτηρίας με αφετηρία το εσωτερικό της ονομάζονται ως εξής: intima, media, adventitia. Το ενδιάμεσο στρώμα που αποκαλείται media παρουσιάζει μεγαλύτερη ακαμψία συγκριτικά με το εξωτερικό που ονομάζεται adventitia. Η αρτηρία μπορεί να προσομοιωθεί με έναν κυλινδρικό σωλήνα μεγάλου μήκους, στο εσωτερικό της οποίας υπάρχει η πίεση του αίματος, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός τμήματος μίας αρτηρίας. Ειδικότερα μπορούμε να δούμε τις τάσεις που αναπτύσσονται στο «σώμα» έχοντας αρχικά ορίσει ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$ .



**Σχήμα 5.6.1** Διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός τμήματος μίας ανθρώπινης αρτηρίας. Στο σχήμα απεικονίζονται οι τάσεις  $\sigma_{ij}$  που αναπτύσσονται στο «σώμα» έχοντας αρχικά ορίσει ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$ . Στο σχήμα φαίνεται και το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$ .

Αφού λοιπόν, προσδιορίσαμε την κατεύθυνση των τάσεων ενός τμήματος μίας αρτηρίας, θα δείξουμε με ποιον τρόπο μπορεί να μετατοπιστεί αυτό το «σώμα» αντιμετωπίζοντας το σαν ένα υλικό σημείο. Στο σχήμα που ακολουθεί μπορούμε να διακρίνουμε τις μετατοπίσεις  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$  ως προς τις τρεις διευθύνσεις του συστήματος.



**Σχήμα 5.6.2** Μετατοπίσεις σημείου  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$  σε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων.

Στις διευθύνσεις  $\theta$  και  $z$  παρουσιάζονται συμμετρίες τόσο στο υλικό όσο και στη φόρτιση. Στη διεύθυνση  $r$  αλλάζει η εικόνα του υλικού (media – adventitia). Επομένως, οι επιβαλλόμενες τάσεις στο προσομοίωμα της αρτηρίας είναι συναρτήσεις μόνο της μεταβλητής  $r$ . **Όλες οι διατμητικές τάσεις του προβλήματος είναι ίσες με μηδέν και υπάρχουν μόνο ορθές τάσεις!**

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0$$

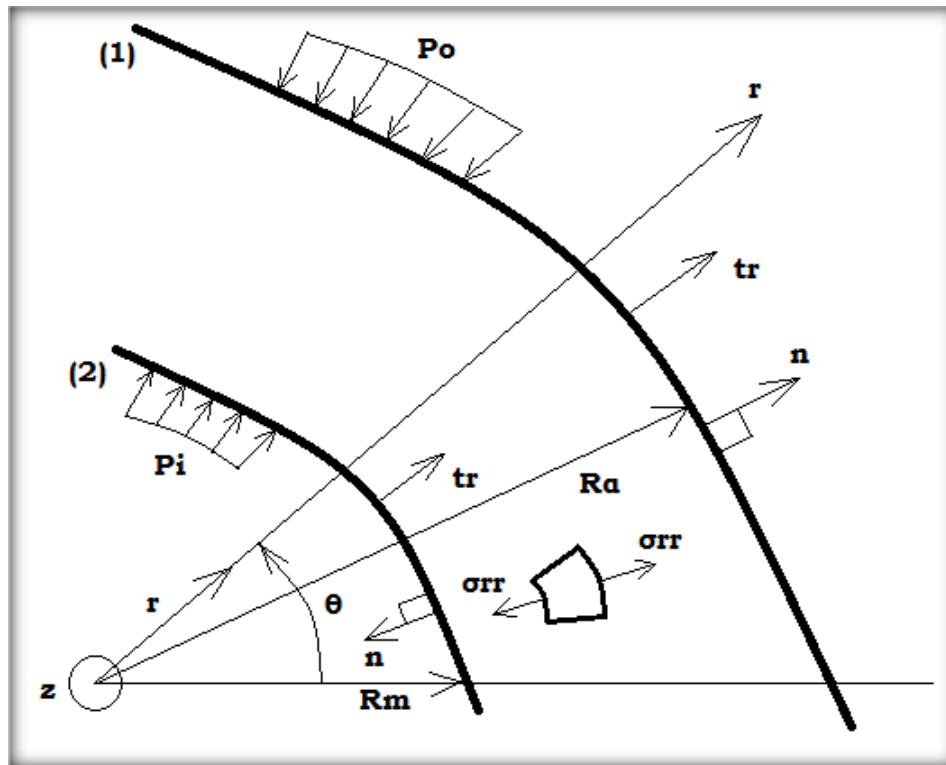
$$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz} \neq 0!$$

**Έτσι, οι ορθές τάσεις  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  και  $\sigma_{zz}$  αποτελούν αυτόματα τις κύριες τάσεις του προβλήματος εφόσον όλες οι διατμητικές είναι μηδενικές!** Έχει γίνει λοιπόν, διαγωνιοποίηση του πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

### 5.6.1 Συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα της αρτηρίας

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται το «μοντέλο» μίας αρτηρίας αποτελούμενο από τα στρώματα media (2) και adventitia (1).



**Σχήμα 5.6.1.1** Ανθρώπινη αρτηρία αποτελούμενη από τα στρώματα media (2) και adventitia (1). Στο εσωτερικό της αρτηρίας (στρώμα media) αναπτύσσεται πίεση  $P_i$  που αντιστοιχεί στην πίεση του αίματος, ενώ περιμετρικά της αρτηρίας (στρώμα adventitia) επιβάλλεται η πίεση της ατμόσφαιρας  $P_o$ . Με  $t_r$  συμβολίζεται ο ελκυστής των τάσεων που έχει κατεύθυνση πάντα προς το εξωτερικό του σώματος, με  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια, με  $\sigma_{rr}$  η ακτινική τάση του υλικού, με  $R_m$  η ακτίνα από το εσωτερικό του σωλήνα έως το στρώμα media, ενώ με  $R_a$  η ακτίνα έως το στρώμα adventitia.

Τα μοναδιαία διανύσματα που είναι πάντα κάθετα στην επιφάνεια του σώματος στα σύνορα (1) και (2) για το συγκεκριμένο πρόβλημα ορίζονται ως εξής:

$$n_1 = \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$n_2 = \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Ο ελκυστής των τάσεων ορίζεται ως εξής:

$$t_n = \begin{Bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις εξισώσεις για τον υπολογισμό του ελκυστή των τάσεων στα σύνορα (1) και (2), όπως προκύπτει από το ανωτέρω σχήμα.

$$t_{n1} = [\sigma] n_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{r=R_\alpha} = \begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$t_{n2} = [\sigma] n_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{r=R_m} = \begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Η ακτινική τάση  $\sigma_{rr}$  του σώματος υπολογίζεται σύμφωνα με το ανωτέρω σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω. Οι ποσότητες  $P_i$  και  $P_0$  παριστάνουν τις εξωτερικές πιέσεις του προσομοιώματος και επομένως αποτελούν συνιστώσες του ελκυστή.

$$t_{r1} = -P_0$$

$$\sigma_{rr} = -P_0$$

$$t_{r2} = P_i$$

$$\sigma_{rr} = -P_i$$

Στα ασυμπίεστα υλικά, όπως είναι για παράδειγμα η αρτηρία, οι τάσεις προκύπτουν από κατάλληλη παραγωγή της εσωτερικής ενέργειας  $W$  στην κατεύθυνση των κύριων «τεντωμάτων» λ και το μόνο που λείπει είναι η υδροστατική πίεση. Αυτή τελικά υπολογίζεται μέσω συνοριακών συνθηκών, όπως είναι για παράδειγμα κάποια αφόρτιστη επιφάνεια. Στην περίπτωση επιβολής μόνο-αξονικού ελκυσμού σε ένα «σώμα» ισχύει ότι  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Εναλλακτικά, η υδροστατική πίεση

μπορεί να βρεθεί από κάποια επίλυση μαζικών δυνάμεων, όπως σε θέματα εδαφομηχανικής!

### 5.6.2 Συνθήκες αξονοσυμμετρίας

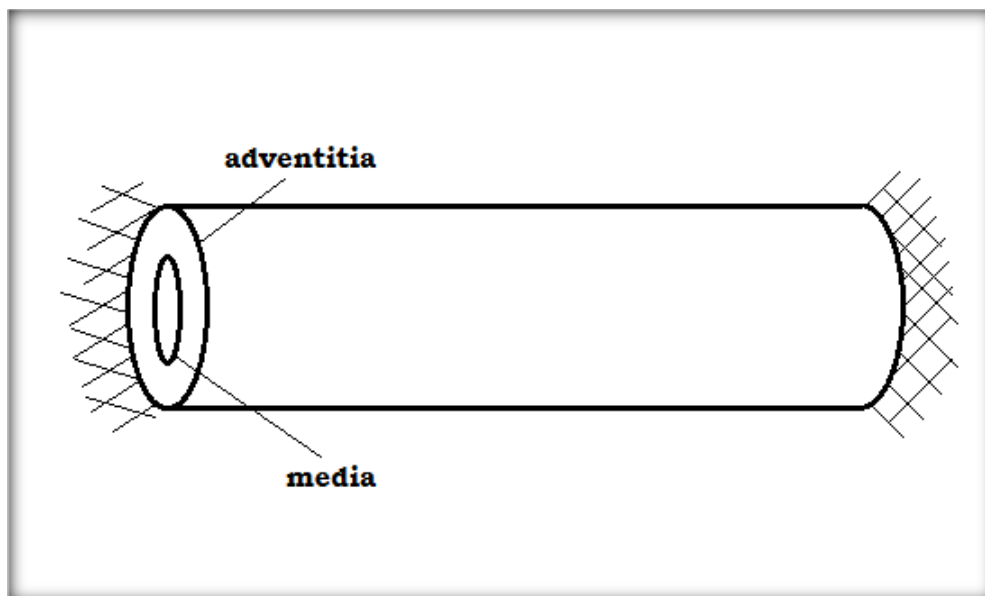
Επειδή ο σωλήνας που προσομοιάζει μία αρτηρία χαρακτηρίζεται από μεγάλο μήκος μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα σαν μία επίπεδη παραμόρφωση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε μόνο ακτινική μετατόπιση  $u_r$ . Οι μετατοπίσεις στις άλλες δύο κατευθύνσεις  $u_\theta$ ,  $u_z$  είναι ίσες με μηδέν. Παρόλα αυτά, μπορεί να υπάρχει κάποιο αρχικό «τέντωμα»  $\lambda_z$  κατά τη διεύθυνση  $x_z$ .

$$u_r(r) \neq 0$$

$$u_\theta = 0$$

$$u_z = 0$$

Το πρόβλημα αυτό-ισορροπεί από τις πακτώσεις του και μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως ένα μονοδιάστατο πρόβλημα.

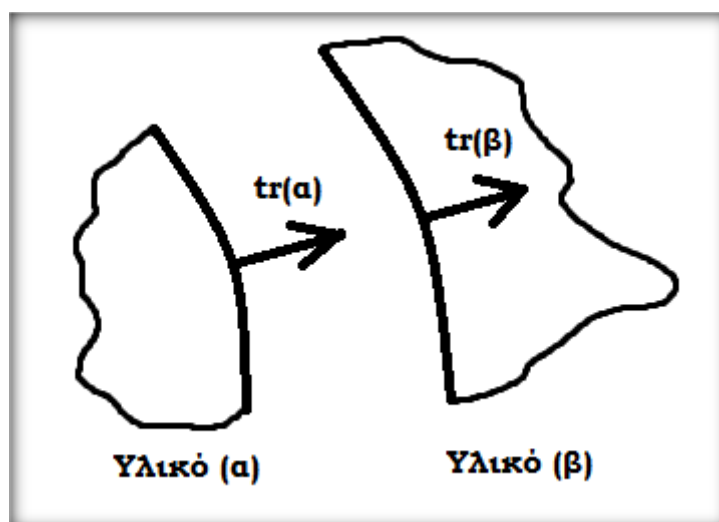


**Σχήμα 5.6.2.1** Προσομοίωμα ανθρώπινης αρτηρίας. Το «μοντέλο» αποτελείται από ένα κύλινδρο μεγάλου μήκους πακτωμένο στα άκρα του. Το πρόβλημα αυτό-ισορροπεί από τις πακτώσεις του και μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως ένα μονοδιάστατο πρόβλημα.



### 5.6.3 Συνθήκες διεπιφάνειας

Κατά την επαφή δύο υλικών (α) και (β) ο ελκυστής των τάσεων είναι ένα διάνυσμα με φορά πάντα προς το σημείο κατεύθυνσης, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 5.6.3.1** Ελκυστής των τάσεων  $t_r$  στην διεπιφάνεια των υλικών (α) και (β). Ο ελκυστής των τάσεων είναι πάντα συνεχής στη διεπιφάνεια.

Για να ισορροπεί το σύστημα που περιγράφεται σχηματικά παραπάνω πρέπει να ισχύουν τα εξής:

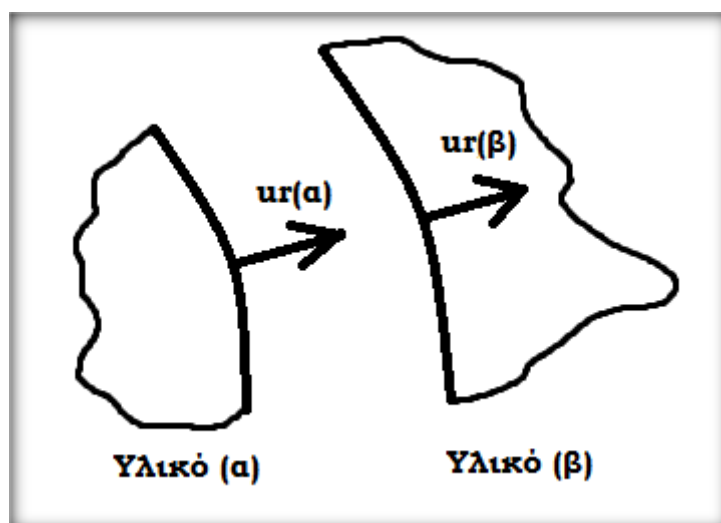
$$t_r(\alpha) + t_r(\beta) = 0$$

$$-\sigma_{rr}(\alpha) + \sigma_{rr}(\beta) = 0 \Rightarrow \sigma_{rr}(\alpha) = \sigma_{rr}(\beta)$$

**Η ανωτέρω ισότητα εξηγεί το λόγο που στη διεπιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων της αρτηρίας (media και adventitia) δεν παρατηρείται άλμα των τάσεων  $\sigma_{rr}$ !**

### 5.6.4 Συνέχεια του υλικού

Οι μετατοπίσεις στην διεπιφάνεια μεταξύ δύο υλικών ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ ) παριστάνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 5.6.4.1** Μετατόπιση  $u_r$  στην επιφάνεια των υλικών ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ ).

Για να αποφευχθεί η δημιουργία ρωγμής στο «σώμα» θα πρέπει να ισχύει:

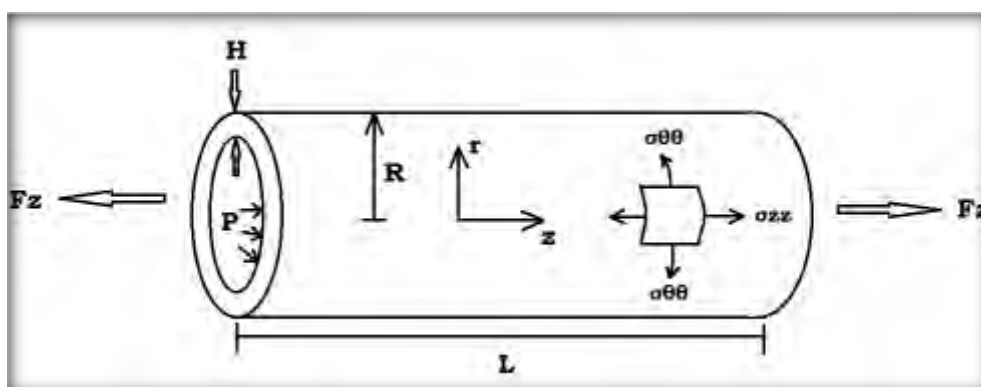
$$u_r(\alpha) = u_r(\beta)$$

**Δηλαδή οι μετατοπίσεις στη διεπιφάνεια δύο σωμάτων πρέπει να είναι ίσες!**

## 5.7 Τάσεις και παραμορφώσεις σε κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα

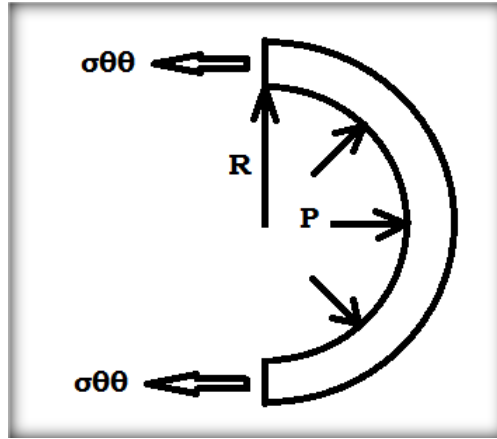
**Μ**ια ανθρώπινη αρτηρία μπορεί να προσομοιωθεί, με απώτερο στόχο τη διερεύνηση της συμπεριφοράς της, με έναν κυλινδρικό σωλήνα λεπτού τοιχώματος ( $H \ll R$ ). Η επίλυση του κυλινδρικού σωλήνα διαχωρίζεται όταν οι παραμορφώσεις που εμφανίζονται εξαιτίας της επιβαλλόμενης φόρτισης είναι μικρές ή μεγάλες. Αρχικά, θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα των μεγάλων παραμορφώσεων, ώστε να καταφέρουμε να υπολογίσουμε τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στις διευθύνσεις  $\theta$  και  $z$ . Στο πρόβλημα του κυλινδρικού σωλήνα με μικρές παραμορφώσεις με  $F_z$  συμβολίζεται η αξονική δύναμη (axial force), με  $P$  η εσωτερική πίεση (internal pressure), με  $R$  η ακτίνα έως το εξωτερικό τοίχωμα (radius in the outer).

### Μικρές παραμορφώσεις (χωρίς αρχικές τάσεις)



**Σχήμα 5.7.1** Κυλινδρικός σωλήνας με λεπτό τοίχωμα ( $H$ ). Η ακτίνα του σωλήνα συμβολίζεται με  $R$  και το συνολικό μήκος του με  $L$ . Εσωτερικά του υλικού ασκείται πίεση  $P$  και εξωτερικά αυτού κατά τη διεύθυνση  $z$  επιβάλλεται δύναμη  $F_z$ . Με  $\sigma_{\theta\theta}$  παριστάνεται η ορθή τάση κατά τη διεύθυνση  $\theta$  και με  $\sigma_{zz}$  η ορθή τάση κατά τον άξονα  $z$ .

Στον κυλινδρικό σωλήνα που απεικονίζεται παραπάνω μπορούμε να κάνουμε μία αξονική τομή (κατά τη διεύθυνση  $z$ ). Τότε θα προκύψει ένα ημικύκλιο που έχει τη μορφή του σχήματος που ακολουθεί.



**Σχήμα 5.7.2** Τομή κατά τη διεύθυνση  $z$  σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας  $R$ . Η εσωτερική πίεση που επιβάλλεται στο τοίχωμα ισούται με  $P$  και η ορθή τάση στη διεύθυνση  $\theta$  συμβολίζεται με  $\sigma_{\theta\theta}$ . Η τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  θεωρείται σταθερή.

Αφού κάνουμε μία τομή στο σωλήνα και γνωρίζουμε ότι η ορθή τάση κατά Cauchy που εφάπτεται στην περίμετρο  $\sigma_{\theta\theta}$  είναι σταθερή μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  από την τοπική ισορροπία του παραπάνω σχήματος.

$$2\sigma_{\theta\theta}HL = P2RL$$

$$2\sigma_{\theta\theta}H \approx 2RP$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx P \frac{R}{H} \quad (5.7)$$

Αφού λοιπόν, υπολογίσαμε την ορθή τάση κατά τον άξονα  $\theta$ , θα προσδιορίσουμε τη σχέση που εκφράζει την ορθή τάση κατά τον άξονα  $z$ . Στην περίπτωση που ο σωλήνας είναι ανοικτός στα άκρα η αξονική τάση  $\sigma_{zz}$  κατά Cauchy υπολογίζεται ως εξής:

$$F_z - \sigma_{zz} \left[ \pi R^2 - \pi (R-H)^2 \right] = 0$$

$$F_z \approx \sigma_{zz} 2\pi RH$$

$$\sigma_{zz} \approx \frac{F_z}{2\pi RH} \quad (5.8)$$

Στην περίπτωση που ο σωλήνας είναι κλειστός στα άκρα του, για τον υπολογισμό της αξονικής τάσης  $\sigma_{zz}$  εμφανίζεται ένας επιπλέον όρος εξαιτίας της εσωτερικής πίεσης  $P$ .

$$F_z + P\pi(R-H)^2 - \sigma_{zz} \left[ \pi R^2 - \pi (R-H)^2 \right] = 0$$

$$F_z + P\pi R^2 \approx \sigma_{zz} 2\pi RH$$

$$\sigma_{zz} \approx \frac{F_z + P\pi R^2}{2\pi RH} \quad (5.9)$$

Οι μικρές παραμορφώσεις (plane stress conditions) προκύπτουν από τον νόμο του Hooke και είναι οι ακόλουθες:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta} (\sigma_{\theta\theta} - \nu_{\theta z} \sigma_{zz}) \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r-R}{R} = \lambda_\theta - 1 \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_z} (\sigma_{zz} - \nu_{z\theta} \sigma_{\theta\theta}) \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{l-L}{L} = \lambda_z - 1 \quad (5.13)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με  $\nu_{\theta z}$  και  $\nu_{z\theta}$  συμβολίζεται ο συντελεστής του Poisson, με  $E_\theta$  το μέτρο ελαστικότητας στην κατεύθυνση  $\theta$  και με  $E_z$  το μέτρο ελαστικότητας στην κατεύθυνση  $z$ . Η διαφορά του μέτρου ελαστικότητας οφείλεται στην ανισοτροπία του υλικού. Σε αυτή την κατηγορία των υλικών ανήκει η ανθρώπινη αρτηρία. Στην περίπτωση που το υλικό είναι ισότροπο το μέτρο ελαστικότητας είναι σταθερό σε όλες τις κατευθύνσεις του υλικού.

Στην αρχική κατάσταση (reference configuration) το «σώμα» είναι απαραμόρφωτο. Η ακτίνα, το μήκος και το πάχος του σωλήνα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα  $R$ ,  $L$  και  $H$ , αντίστοιχα. Αντίθετα, στην τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) η ακτίνα, το μήκος και το πάχος του σωλήνα συμβολίζονται με μικρά γράμματα  $r$ ,  $l$  και  $h$ , αντίστοιχα.

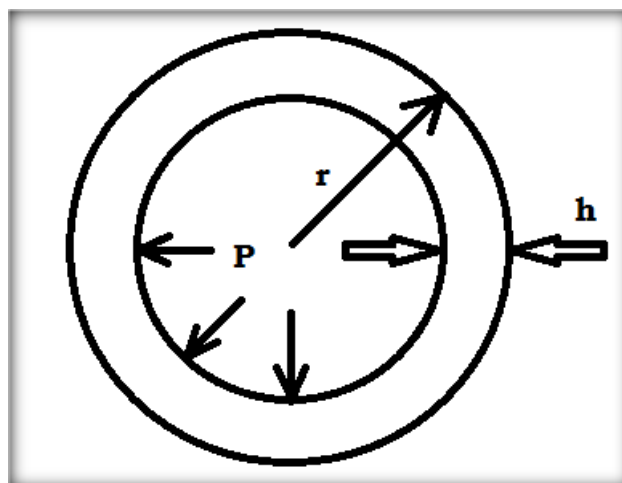
Σε παλαιότερες έρευνες έχει αποδειχθεί ότι η αρτηρία ανήκει στην κατηγορία των ασυμπίεστων υλικών. Έτσι λοιπόν, ο όγκος του σωλήνα εξαιτίας της παραμόρφωσης διατηρείται.

$$\pi [R^2 - (R-H)^2] L = \pi [r^2 - (r-h)^2] l$$

$$2\pi RHL = 2\pi rhl$$

$$h = H \frac{RL}{rl} \quad (5.14)$$

### Μεγάλες παραμορφώσεις (χωρίς αρχικό «τέντωμα»)



**Σχήμα 5.7.3** Διατομή κυκλικού σωλήνα με λεπτό τοίχωμα  $h$  ( $r \gg h$ ) σε σχέση με την ακτίνα  $r$ . Στο εσωτερικό τοίχωμα του σωλήνα επιβάλλεται πίεση  $P$ .

Οι τάσεις κατά Cauchy (Cauchy stresses) προκύπτουν από την ισορροπία του προβλήματος, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του ακολουθήσαμε προηγουμένως.

$$\sigma_{\theta\theta} \approx P \left( \frac{r}{h} - 1 \right) \approx P \frac{r}{h} \quad (5.15)$$

$$\sigma_{zz} \approx \frac{F_z + P\pi(r-h)^2}{h\pi(2r-h)} \approx \frac{F_z + P\pi r^2}{2\pi rh} \quad (5.16)$$

Εξαιτίας λοιπόν της ασυμπίεστότητας του υλικού, όπως και προηγουμένως, ισχύει η ακόλουθη ισότητα.

$$\pi \left[ R^2 - (R-h)^2 \right] L = \pi \left[ r^2 - (r-h)^2 \right] l$$

$$h = H \frac{RL}{rl}$$

Το «τέντωμα» στις τρεις κύριες κατευθύνσεις του σωλήνα ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_r = \frac{h}{H}, \lambda_\theta = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}, \lambda_z = \frac{l}{L} \quad (5.17)$$

Η συνθήκη του ασυμπίεστου υλικού είναι η ακόλουθη:

$$\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1 \quad (5.18)$$

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}$$

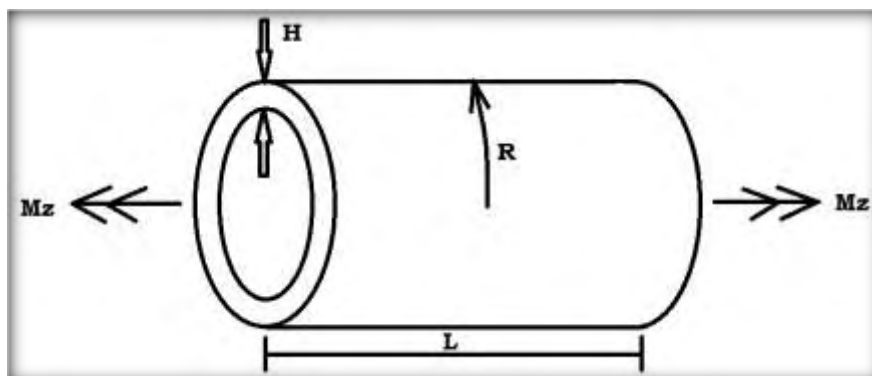
Οι σχέσεις που αναγράφονται παραπάνω είναι ανεξάρτητες από τον καταστατικό νόμο, επειδή το πρόβλημα είναι ισοστατικό! Στον πίνακα που ακολουθεί θα ορίσουμε τα μεγέθη, που θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια. **Η ορθή τάση  $\sigma_{rr}$  καθώς και οι διατμητικές  $\sigma_{r\theta}$  και  $\sigma_{rz}$  δείχνουν να μην υπάρχουν, επειδή το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό.** Αν ο κυλινδρικός σωλήνας δεν χαρακτηρίζεται από λεπτό τοίχωμα οι ορθές τάσεις υπολογίζονται ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας (βλέπε Παράρτημα).

**Πίνακας 5.7.1** Συνοπτικός πίνακας των μεγεθών που θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια. Ο πίνακας αποτελείται από τους τύπους που εκφράζουν το «τέντωμα», την παραμόρφωση κατά Green και την 2<sup>η</sup> τάση Piola-Kirchhoff.

<b>Circumferential stretch</b>	$\lambda_\theta = \frac{r}{R}$
<b>Axial stretch</b>	$\lambda_z = \frac{l}{L}$
<b>Radial stretch</b>	$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{RL}{rl}$
<b>Circumferential Green strain</b>	$E_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\lambda_\theta^2 - 1)$
<b>Axial Green strain</b>	$E_{zz} = \frac{1}{2}(\lambda_z^2 - 1)$
<b>Radial Green strain</b>	$E_{rr} = \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1)$
<b>2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff stress</b>	$P_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\lambda_\theta^2}$
<b>2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff stress</b>	$P_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda_z^2}$

## 5.8 Στρέψη κυλινδρικού σωλήνα με λεπτό τοίχωμα

Η διατμητική τάση που επιβάλλεται στο επίπεδο της περιμέτρου  $\sigma_{\theta z}$  προκαλεί στρέψη στον κυλινδρικό σωλήνα. Το πρόβλημα της στρέψης σε κυλινδρικό σωλήνα περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.



**Σχήμα 5.8.1** Κυλινδρικός σωλήνας με λεπτό τοίχωμα  $H$ . Η ακτίνα και το μήκος του σωλήνα συμβολίζονται με  $R$  και  $L$ , αντίστοιχα. Η ροπή στρέψης παριστάνεται με  $M_z$ .

### Μικρές παραμορφώσεις

Η ροπή στρέψης σε κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση.

$$M_z = (\sigma_{\theta z} 2\pi R H) R$$

$$M_z = 2\pi R^2 H \sigma_{\theta z}$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{M_z}{2\pi R^2 H} \quad (5.19)$$

Η διατμητική τροπή  $\gamma_{\theta z}$  προκύπτει από την ακόλουθη ισότητα:

$$\gamma_{\theta z} = 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{G} \quad (5.20)$$

Όπου με  $G$  συμβολίζεται το μέτρο διάτμησης. Η διατμητική τροπή ουσιαστικά συμβολίζει τη μεταβολή μιας γωνίας και ισούται με  $\Theta$ .

$$\gamma_{\theta z} = \Theta = \Omega L, (|\Omega L| \ll 1) \quad (5.21)$$



Στην παραπάνω ισότητα με  $\Theta$  παριστάνεται η γωνία που ισούται με τη διατμητική τροπή, με  $\Omega$  η ανηγμένη γωνιακή παραμόρφωση [1/m] και με  $L$  το συνολικό μήκος του κυλινδρικού σωλήνα [m].

### **Μεγάλες παραμορφώσεις**

$$\sigma_{\theta z} = \frac{M_z}{2\pi r^2 h} \quad (5.22)$$

Η αντίστοιχη γωνιακή τροπή ισούται με:

$$\gamma_{\theta z} = \theta = \omega L \quad (5.23)$$

Στην περίπτωση που το υλικό είναι ασυμπίεστο ο όγκος του δείγματος παραμένει σταθερός μετά την παραμόρφωση. Μπορούμε λοιπόν, να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση διατήρησης του όγκου του υλικού, για να υπολογίσουμε το νέο πάχος του σωλήνα  $h$ .

$$\pi \left[ R^2 - (R - H)^2 \right] L = \pi \left[ r^2 - (r - h)^2 \right] l$$

$$h = H \frac{RL}{rl} \quad (5.24)$$

**Σημείωση:** Μία ανθρώπινη αρτηρία υποβάλλεται σε στρεπτικά φορτία. Παρόλα αυτά, το πρόβλημα της στρέψης δεν είναι απλό στην περίπτωση μεγάλων παραμορφώσεων.

## 5.9 Υπολογισμός των ορθών τάσεων σε κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα εφαρμόζοντας το «μοντέλο» των Mooney-Rivlin

Ο κυλινδρικός σωλήνας που επιλέχθηκε για την επίλυση του προβλήματος ανήκει στην κατηγορία των ισότροπων και ασυμπίεστων υλικών. Έτσι λοιπόν, το δοκίμιο εμφανίζει ίδιες ιδιότητες σε ολόκληρη τη μάζα του, ενώ κατά την παραμόρφωση δεν παρατηρείται μεταβολή του όγκου του. Για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων επιλέχθηκε το προσομοίωμα των Mooney-Rivlin, που εφαρμόζεται σε ασυμπίεστα υλικά. Η πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης σύμφωνα με τη θεωρία των Mooney-Rivlin δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

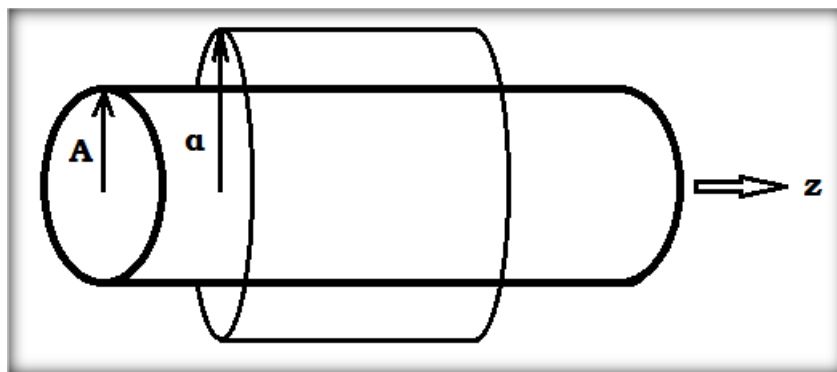
$$W = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) (I - 3) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (II - 3) \right\} \quad (5.25)$$

Η παραπάνω εξίσωση βρίσκει εφαρμογή σε ασυμπίεστα υλικά. Με  $\mu$  συμβολίζεται το μέτρο διάτμησης σε απειροελάχιστες παραμορφώσεις όταν το υλικό βρίσκεται στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση, με  $\beta$  η αδιάστατη σταθερά του υλικού και με  $I$  και  $II$  η πρώτη και η δεύτερη αναλλοίωτη, αντίστοιχα. Εκτιμάμε ότι οι ποσότητες  $\mu$  και  $\beta$  «υπακούουν» στις ανισότητες που αναγράφονται παρακάτω:

$$\mu > 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$$

**Στην περίπτωση που η σταθερά  $\beta$  ισούται με  $\frac{1}{2}$  προκύπτει το «μοντέλο» Neo-Hookean!**



**Σχήμα 5.9.1** Λεπτός κυλινδρικός σωλήνας. Στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration) του «σώματος» η ακτίνα του σωλήνα

συμβολίζεται με  $A$ , ενώ στην τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) του υλικού με  $a$ .

Το «τέντωμα» κατά την διεύθυνση της περιμέτρου  $\theta$  του σωλήνα εκφράζεται από τη σχέση:

$$\lambda_\theta = q = \frac{a}{A} \geq 1 \quad (5.26)$$

Η αξονική παραμόρφωση προκύπτει από τη σχέση:

$$0 < \lambda_z = \lambda \leq 1 \quad (5.27)$$

Στο παράρτημα του Chadwick (1972) γίνεται εκτενής αναφορά στο πρόβλημα του κυλινδρικού σωλήνα. Παρατηρώντας λοιπόν, το παράρτημα καταλήγουμε σε μία σχέση που συνδέει την αξονική παραμόρφωση με την παραμόρφωση της περιμέτρου του δοκιμίου. Έτσι, προκύπτει:

$$\lambda_z = \lambda_\theta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda = q^{-\frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

Στην περίπτωση που το υλικό που εξετάζουμε είναι ασυμπίεστο ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1 \quad (5.29)$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» και στην ακτινική διεύθυνση του σωλήνα.

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_\theta^{-\frac{1}{2}}} = \lambda_\theta^{\frac{1}{2}} = \lambda_z$$

Από την ανάλυση του Chadwick (1972) προκύπτουν οι εξισώσεις που εκφράζουν την κατανομή των τάσεων μέσα σε ένα κυλινδρικό σωλήνα. Όταν η ποσότητα  $x=(r/a) \rightarrow 1$ , στο σημείο που βρίσκεται ακριβώς πάνω στο τοίχωμα ( $r=a$ ) η κατανομή των τάσεων μετατρέπεται ως εξής:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{(\lambda q^2 - 1)(\lambda q^2 + 1)}{\lambda q^2} \quad (5.30)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \left( \lambda^2 - \lambda^{-1} + \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda^2 q^2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\lambda^{-2} - \lambda^2 q^2) \right\} \quad (5.31)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \left( \frac{\lambda q^2 - 1}{(N^2 - 1) + \lambda q^2} - \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2} + \log \left\{ \left( 1 - \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2} \right) \left( \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{N^2} \right) \right\} \right) \right\} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \left( \frac{\lambda q^2 - 1}{(N^2 - 1) + \lambda q^2} - \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2} + \log \left( \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2} \right) \right) \right\} \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \left( \frac{(\lambda q^2 - 1)(\lambda q^2 - ((N^2 - 1) + \lambda q^2))}{\lambda q^2 ((N^2 - 1) + \lambda q^2)} + \log \left( \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2} \right) \right) \right\} \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \left( \frac{(\lambda q^2 - 1)(1 - N^2)}{\lambda q^2 ((N^2 - 1) + \lambda q^2)} + \log \left( \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Σύμφωνα με τη δημοσίευση του Chadwick (1972) η ποσότητα  $N$  ορίζεται ως εξής:

$$N = \frac{B}{A} = \frac{A+H}{A} = 1 + \frac{H}{A} = 1 + \varepsilon, (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (5.34)$$

Στην ανωτέρω σχέση θέτουμε την ποσότητα  $H/A = \varepsilon$

$$N^2 = (1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$N^2 - 1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 2\varepsilon \quad (5.35)$$

Η εξίσωση που εκφράζει την ακτινική τάση  $\sigma_{rr}$  εμπεριέχει μία λογαριθμική συνάρτηση. Με το συμβολισμό  $\log$  εννοούμε το νεπέριο λογάριθμο  $\ln$ . Σε αυτό το σημείο θα απλουστέψουμε το λογάριθμο χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ιδιότητα:

$$|x| \ll 1 \Rightarrow \ln(1+x) \approx x \quad (5.36)$$

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν, να «κατασκευάσουμε» μία μορφή για την εν λόγω λογαριθμική συνάρτηση, ώστε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα που αναγράφεται παραπάνω.

$$\log \left( \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2} \right) = \log \left( \frac{N^2 - 1 + \lambda q^2 + N^2 \lambda q^2 - N^2 \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2} \right)$$

$$\log\left(\frac{N^2 - 1 + \lambda q^2 + N^2 \lambda q^2 - N^2 \lambda q^2}{N^2 \lambda q^2}\right) = \log\left(1 + \frac{N^2(1 - \lambda q^2) - (1 - \lambda q^2)}{N^2 \lambda q^2}\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{N^2(1 - \lambda q^2) - (1 - \lambda q^2)}{N^2 \lambda q^2}\right) = \log\left(1 + \frac{(1 - \lambda q^2)(N^2 - 1)}{N^2 \lambda q^2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα που αναφέραμε προηγουμένως προκύπτει ότι:

$$\log\left(1 + \frac{(1 - \lambda q^2)(N^2 - 1)}{N^2 \lambda q^2}\right) \approx \frac{(1 - \lambda q^2)(N^2 - 1)}{N^2 \lambda q^2} = \frac{(\lambda q^2 - 1)(1 - N^2)}{N^2 \lambda q^2}$$

Η κατανομή της ακτινικής τάσης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left( \frac{(\lambda q^2 - 1)(-2\varepsilon)}{(\lambda q^2)^2} + \frac{(\lambda q^2 - 1)(-2\varepsilon)}{\lambda q^2} \right)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{(\lambda q^2 - 1)(-2\varepsilon)(\lambda q^2 + 1)}{(\lambda q^2)^2}$$

$$\sigma_{rr} \approx \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{((\lambda q^2)^2 - 1)(-2\varepsilon)}{(\lambda q^2)^2} = -P(\text{compressive!}) \quad (5.37)$$

Στην περίπτωση που στο εσωτερικό του σωλήνα επιβάλλεται κάποια θλιπτική εσωτερική πίεση προκύπτει, εφαρμόζοντας τη θεωρία των Mooney-Rivlin, ο ακόλουθος καταστατικός νόμος που συνδέει την τάση με την παραμόρφωση.

$$P = \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{((\lambda q^2)^2 - 1)\varepsilon}{(\lambda q^2)^2} \geq 0, (P = 0 \text{ for } \lambda q^2 = 1, \lambda = 1) \quad (5.38)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \frac{((\lambda q^2)^2 - 1)(-2\varepsilon)}{(\lambda q^2)^2} + 2 \frac{(\lambda^2 q^4 - 1)}{\lambda q^2} \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx P \frac{\lambda q^2}{\varepsilon} \quad (5.39)$$

Στην περίπτωση που η ορθή τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  είναι θετική, ο κυλινδρικός σωλήνας εφελκύεται!

Όταν το «σώμα» υποβάλλεται σε μικρές παραμορφώσεις η ποσότητα  $\lambda q^2$  τείνει στη μονάδα. Αυτό συμβαίνει διότι στην απαραμόρφωτη κατάσταση το «τέντωμα» του υλικού είναι ίσο με ένα. Οι ορθές τάσεις σε αυτή την περίπτωση μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\sigma_{rr} \approx 0(\varepsilon)$$

$$\sigma_{zz} \approx 0(\varepsilon)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{P}{\varepsilon} = \frac{PA}{H}!$$

## 5.10 Εξισώσεις κύριων τάσεων στην περίπτωση ισότροπου κυλινδρικού σωλήνα με λεπτό-τοιχη διατομή

Οι κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε έναν ισότροπο κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα μπορούν να υπολογιστούν εάν εφαρμόσουμε τις ακόλουθες σχέσεις. Αρκεί να επιλέξουμε το κατάλληλο προσομοίωμα για το υλικό. Έτσι, θα προκύψει και η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ , που απαιτείται για τον υπολογισμό των τάσεων. Με  $\sigma_{\theta\theta}$  συμβολίζουμε την τάση που ασκείται στην διεύθυνση της περιμέτρου του σωλήνα, με  $\sigma_{zz}$  την αξονική τάση και με  $\sigma_{rr}$  την ακτινική τάση.

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \lambda_{\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta}} - \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} + \sigma_{rr} \quad (5.40)$$

$$\sigma_{zz} \approx \lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} + \sigma_{rr} \quad (5.41)$$

$$\sigma_{rr} \approx 0(\varepsilon)$$

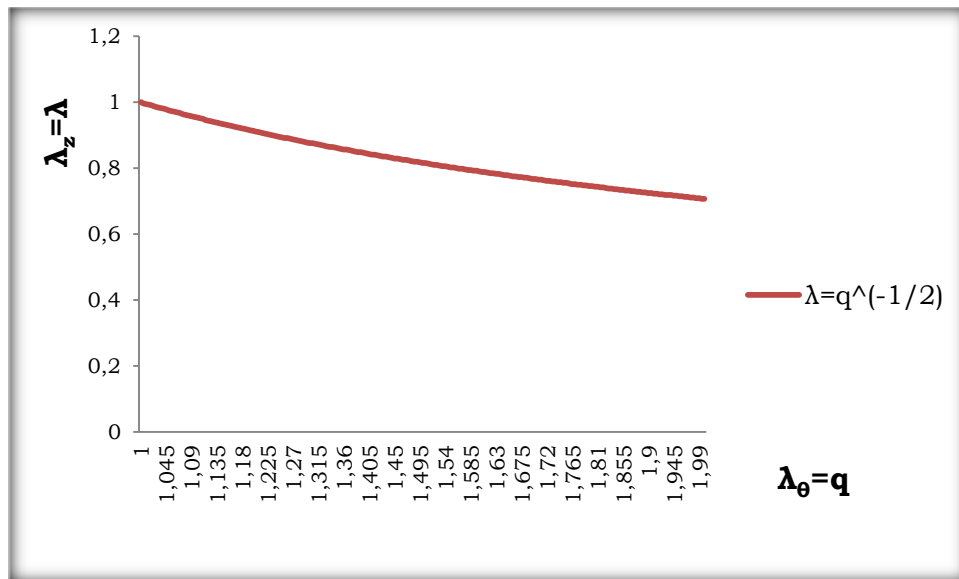
**Η ακτινική τάση είναι μηδέν στην περίπτωση διατομών με λεπτό τοίχωμα!** Το «τέντωμα» στις τρεις διευθύνσεις του σωλήνα ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_{\theta} = q$$

$$\lambda_z = \lambda$$

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda q} = \lambda, \left( \lambda = q^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (5.42)$$

Στη συνέχεια, κατασκευάσαμε ένα διάγραμμα που εκφράζει τη μεταβολή του «τεντώματος» στην περίμετρο του σωλήνα σε σχέση με το αξονικό τέντωμα.



**Γράφημα 5.10.1** Γράφημα που εκφράζει τη μεταβολή του «τεντώματος» στην περίμετρο του σωλήνα  $\lambda_\theta$  σε σχέση με το αξονικό τέντωμα  $\lambda_z$ . Στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του σωλήνα το «τέντωμα» είναι ίσο με 1.

Το δοκίμιο αρχικά είναι απαραμόρφωτο. Δεν επιβάλλεται κάποιο «τέντωμα». Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lambda_\theta = q = 1$$

$$\lambda_z = \lambda = 1$$

**Στην περίπτωση που ο σωλήνας διογκώνεται σε μεγάλο βαθμό, λόγω της ασυμπίεστότητας του υλικού, το μήκος του σωλήνα τείνει να γίνει πολύ μικρό!**

$$q \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0!$$



## 5.11 Ακτινική παραμόρφωση κυλινδρικού ασυμπίεστου σωλήνα σύμφωνα με τον Chadwick (1972)

Η ακτινική παραμόρφωση  $r$  ενός κυλινδρικού ασυμπίεστου σωλήνα εξαιτίας της επιβολής κάποιας εσωτερικής ή εξωτερικής πίεσης, αναφέρεται στο άρθρο του Chadwick (1972).

$$r = \left\{ \lambda^{-1} (R^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.43)$$

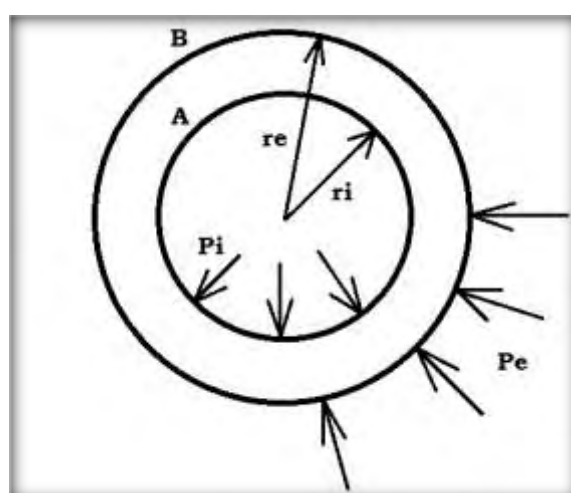
Μια ανθρώπινη αρτηρία μπορεί να προσομοιωθεί με ένα κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα. Στο εξωτερικό σύνορο της αρτηρίας (B) η ανωτέρω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$r_e (R = B) = \left\{ \lambda^{-1} (B^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.44)$$

Αντίστοιχα, στο εσωτερικό σύνορο της αρτηρίας (A) η ακτινική παραμόρφωση μετατρέπεται ως εξής:

$$r_i (R = A) = \left\{ \lambda^{-1} (A^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha \quad (5.45)$$

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις με  $a$  συμβολίζεται η ακτίνα της διεπιφάνειας των δύο στρωμάτων της αρτηρίας, media-intima και adventitia.



**Σχήμα 5.11.1** Διατομή κυλινδρικού σωλήνα. Εσωτερικά του σωλήνα ασκείται πίεση  $P_i$  και εξωτερικά πίεση  $P_e$ . Τα σύμβολα A, B παριστάνουν το εσωτερικό και το εξωτερικό σύνορο, αντίστοιχα. Με  $r_i$  και  $r_e$  συμβολίζονται η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του λεπτού σωλήνα, αντίστοιχα.

## 5.12 Υπολογισμός ορθών τάσεων σε ανοικτό κυλινδρικό σωλήνα με λεπτό τοίχωμα

Η ακτινική τάση  $\sigma_{rr}$  σε ανοικτό κυλινδρικό σωλήνα που χαρακτηρίζεται από λεπτό τοίχωμα εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση και προέρχεται από την εξίσωση ισορροπίας κατά τον άξονα  $r$ .

$$\sigma_{rr} \approx -P_e + \int_{r_e}^{r_i} \sigma_{\theta\theta} \frac{dr}{r} \quad (5.46)$$

Η εξίσωση ισορροπίας κατά την ακτινική διεύθυνση, εφόσον οι διατμητικές τάσεις είναι ίσες με μηδέν, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (5.47)$$

Στην περίπτωση που  $|\sigma_{\theta\theta}| \ll |\sigma_{rr}|$  η εξίσωση ισορροπίας τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} \approx \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \Rightarrow \sigma_{rr} = \int \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr + C \quad (5.48)$$

Έτσι, μπορούμε να αγνοήσουμε την τάση  $\sigma_{rr}$  στο ολοκλήρωμα. Επιλύοντας λοιπόν, το ολοκλήρωμα η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$-P_e + \sigma_{\theta\theta} \ln \frac{r_i}{r_e} \approx -P_i \quad (5.49)$$

Το εξωτερικό σύνορο του σωλήνα συμβολίζεται με  $B$  και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$B = A + H, (H \ll A)$$

Σε προηγούμενο κεφάλαιο παραθέσαμε τις σχέσεις που εκφράζουν την ακτινική παραμόρφωση. Η παραμόρφωση κατά μήκος της ακτίνας του σωλήνα στα σημεία του συνόρου  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, προκύπτει από τις σχέσεις:

$$r_i(R=A) = \left\{ \lambda^{-1} (A^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha$$

$$r_e(R=B) = \left\{ \lambda^{-1} (B^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει τελικά:

$$-P_e + \sigma_{\theta\theta} \ln \left( \frac{\alpha^2}{\lambda^{-1}(B^2 - A^2) + \alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx -P_i$$

$$\sigma_{\theta\theta} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\lambda^{-1}(B^2 - A^2) + \alpha^2}{\alpha^2} \right) \approx P_i - P_e$$

$$\sigma_{\theta\theta} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\lambda^{-1}(2AH + H^2)A^2}{\alpha^2 A^2} \right) \approx P_i - P_e$$

$$\sigma_{\theta\theta} \frac{2}{2} \frac{H}{A} \frac{A^2}{\alpha^2} \frac{1}{\lambda} \approx P_i - P_e$$

$$P_i - P_e = \sigma_{\theta\theta} \frac{\varepsilon}{\lambda q^2} \quad (5.50)$$

### 5.13 Σύνδεση της μεταβολής του όγκου με την πίεση σε έναν κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα χρησιμοποιώντας το «μοντέλο» Mooney-Rivlin

Η μεταβολή του όγκου ενός κυλινδρικού σωλήνα μπορεί να συνδεθεί, μέσω ενός διαγράμματος, με την πίεση που επιβάλλεται μέσα στο «σώμα». Η εξίσωση της πίεσης προέρχεται από τον καταστατικό νόμο, που δείχθηκε προηγουμένως, σε ένα κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα εφαρμόζοντας το προσομοίωμα των Mooney-Rivlin. Η μεταβολή του όγκου του κυκλικού κυλινδρικού σωλήνα προσδιορίζεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi(\alpha^2 l - A^2 L)}{\pi A^2 L} = \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 \frac{l}{L} - 1 = q^2 \lambda - 1 = q^{\frac{3}{2}} - 1 \quad (5.51)$$

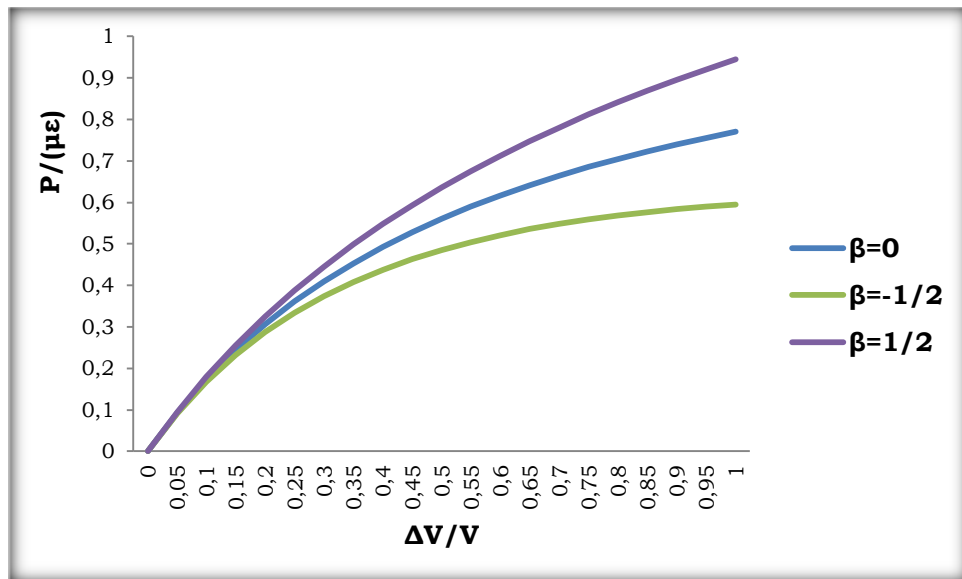
Σε προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε ουσιαστικά ο καταστατικός νόμος που συνδέει την πίεση που επιβάλλεται στο σωλήνα σε σχέση με την παραμόρφωση.

$$P = \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{((\lambda q^2)^2 - 1) \varepsilon}{(\lambda q^2)^2} \quad (5.52)$$

Αν επιλύσουμε την ανωτέρω σχέση ως προς  $P/(\mu \varepsilon)$  θα μετατραπεί ως εξής:

$$\frac{P}{\mu \varepsilon} = \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{((\lambda q^2)^2 - 1)}{(\lambda q^2)^2}$$

Εάν κάνουμε εφαρμογή των σχέσεων που αναγράφονται παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα που εκφράζει τη σχέση της μεταβολής του όγκου του σωλήνα με την πίεση, αφού λάβουμε τιμές για την παράμετρο  $\beta$  που ανήκουν στην περιοχή  $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ . Η γραφική παράσταση που απεικονίζει τη σχέση  $\{ P/(\mu \varepsilon) - \Delta V/V \}$  φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Γράφημα 5.13.1** Γράφημα που απεικονίζει τη σχέση της μεταβολής του όγκου του σωλήνα με την πίεση που επιβάλλεται μέσα σε αυτόν. Το διάγραμμα αποτελείται από τρεις καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της σταθεράς  $\beta$  στο «μοντέλο» των Mooney-Rivlin.

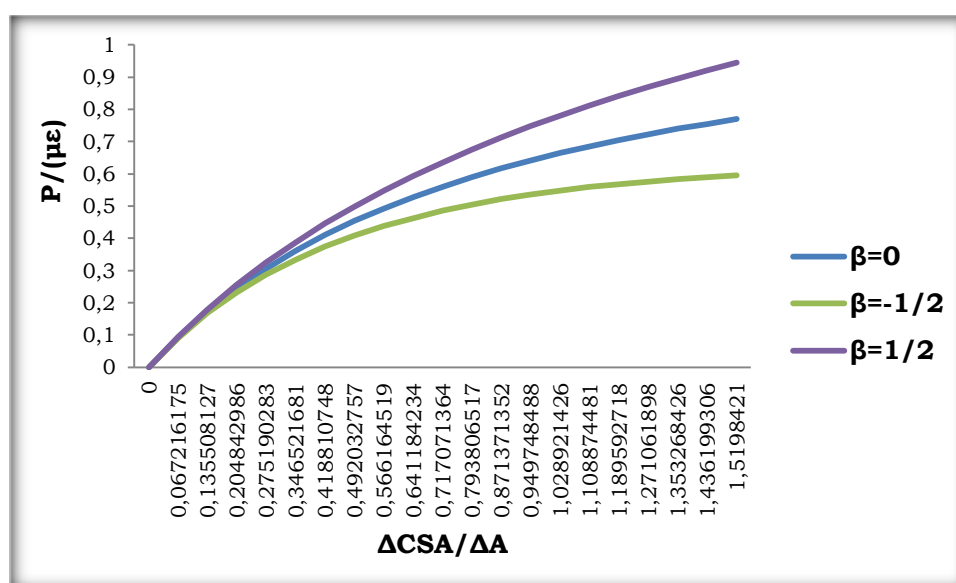
Ο Hales (1733) εκτίμησε προσεγγιστικά ότι όταν η πίεση ενός οργανισμού είναι φυσιολογική, δηλαδή  $P = P_i - P_e = 13.3 \text{ KPa}$ , η μεταβολή του όγκου ισούται περίπου με  $\Delta V/V = 1/3$ . Εάν χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία για τη μεταβολή του όγκου, μπορούμε να υπολογίσουμε το περιμετρικό «τέντωμα» του σωλήνα  $\lambda_\theta = q = 1.21$  καθώς και την αξονική παραμόρφωση  $\lambda_z = \lambda = 0.91$ .

## 5.14 Σύνδεση της μεταβολής του εμβαδού της κάθετης διατομής με την πίεση σε έναν κυλινδρικό ασυμπίεστο σωλήνα χρησιμοποιώντας το «μοντέλο» Mooney-Rivlin

Η μεταβολή του εμβαδού της κάθετης διατομής σε κυλινδρικού ασυμπίεστο σωλήνα προσδιορίζεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\frac{\Delta CSA}{\Delta A} = \frac{\pi(\alpha^2 - A^2)}{\pi A^2} = \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 - 1 = q^2 - 1 \quad (5.53)$$

Εάν ακολουθήσουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία με προηγουμένως, μπορούμε τελικά να απεικονίσουμε γραφικά την καμπύλη που συνδέει τη μεταβολή του εμβαδού της κάθετης διατομής του σωλήνα με την πίεση που επιβάλλεται στο «σώμα». Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω.

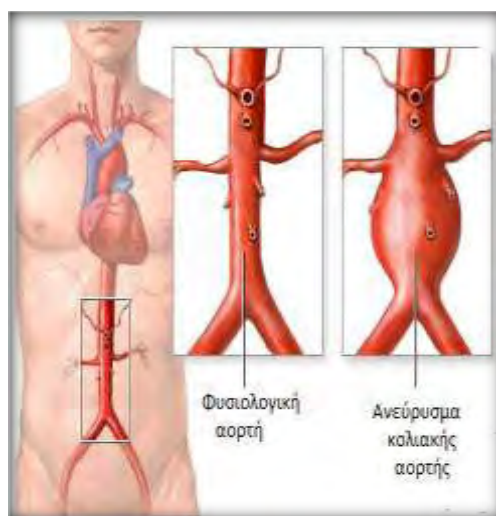


**Γράφημα 5.14.1** Γράφημα που απεικονίζει τη σχέση της μεταβολής του εμβαδού της κάθετης διατομής του σωλήνα με την πίεση που επιβάλλεται μέσα σε αυτόν. Το διάγραμμα αποτελείται από τρεις καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της σταθεράς  $\beta$  στο «μοντέλο» των Mooney-Rivlin.

## 5.15 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής

**Σ**το σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε τι εννοούμε με τον όρο «ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής». Το ανεύρυσμα της κοιλιακής αορτής δεν είναι μία σπάνια πάθηση. Αφορά κυρίως άτομα μεγάλης ηλικίας, 60 ετών και άνω, γι' αυτό και τις περισσότερες φορές συνοδεύεται και από άλλες παθήσεις, κυρίως αγγειακές, όπως καρδιακές, νεφρικές και των κάτω άκρων, αλλά και αναπνευστικές, ή ακόμη συνυπάρχει με κάποια κακοήγη νεοπλασία.

Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής καλείται μία ευάλωτη περιοχή στην αορτή, το κύριο αγγείο που μεταφέρει αίμα από την καρδιά στο υπόλοιπο σώμα. Όταν το αίμα ρέει διαμέσου της αορτής, ασκείται πίεση στα τοιχώματα της αορτής, με αποτέλεσμα η τελευταία να διευρύνεται και να μοιάζει σαν φουσκωμένο μπαλόνι. Εάν οι διαστάσεις της ανευρυσματικής περιοχής αυξηθούν σημαντικά, τότε υπάρχει μεγάλος κίνδυνος ρήξης του αγγείου. Συχνότερα τα ανευρύσματα κοιλιακής αορτής εντοπίζονται κάτω από την έκφυση των νεφρικών αρτηριών. Το ανεύρυσμα σε πολλές περιπτώσεις επεκτείνεται και σε αγγεία της λεκάνης και των μηρών. Όταν το ανεύρυσμα προσεγγίσει τη διάμετρο των 5 cm τότε υπάρχει άμεση ένδειξη να αντιμετωπισθεί, διότι έχει πολύ αυξημένες πιθανότητες να ραγεί. Ο κίνδυνος ρήξης ενός ανευρύσματος με διαστάσεις μικρότερες των 5 cm, είναι περίπου ίδιος με τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει ένας ασθενής που υποβάλλεται σε μέσης δυσκολίας χειρουργείο. Σε περίπτωση ρήξεως ανευρύσματος, η πιθανότητα επιβίωσης του ασθενούς είναι χαμηλή, με ένα ποσοστό 80-90% των ρήξεων να καταλήγουν σε θάνατο. Αυτοί οι θάνατοι μπορούν να αποφευχθούν, εάν γίνει εγκαίρως η διάγνωση και η αντιμετώπιση των ανευρυσμάτων αυτών.



**Εικόνα 5.15.1** Αριστερά της εικόνας, μπορούμε να δούμε μία φυσιολογική αορτή, ενώ δεξιά μία αρτηρία που νοσεί. Το ανεύρυσμα της κοιλιακής αρτηρίας μπορεί να προσομοιωθεί με το «μοντέλο» του Yeoh, όπως περιγράψαμε προηγουμένως.

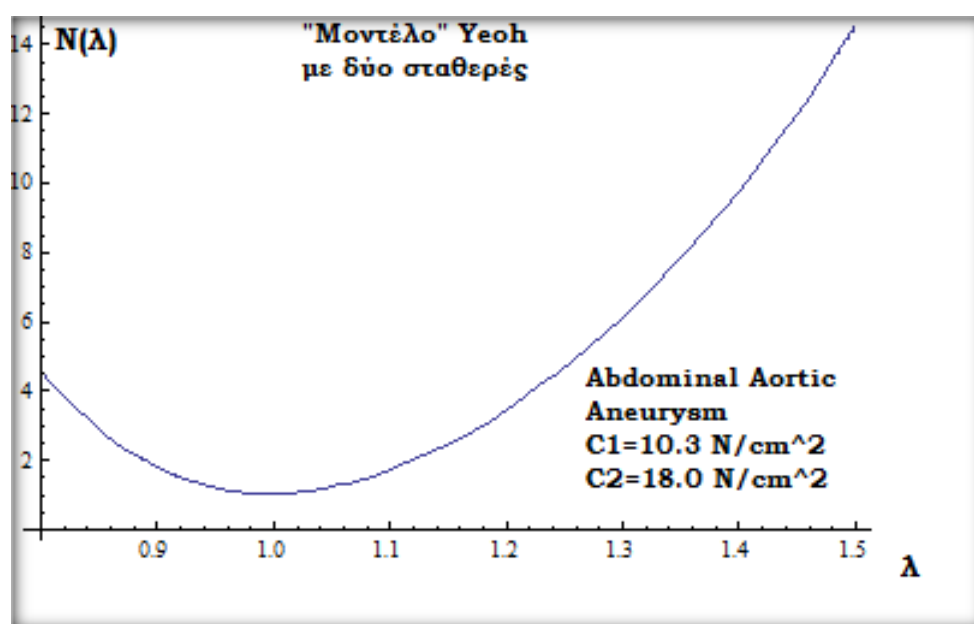
## 5.16 «Μοντέλο» Yeoh με δύο σταθερές

Το προσομοίωμα του Yeoh μπορεί να χρησιμοποιηθεί λαμβάνοντας τις δύο από τις τρεις σταθερές του «μοντέλου». Η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου μετατρέπεται ως εξής:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 \quad (5.54)$$

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2$$

Στην περίπτωση που το δείγμα ανήκει στην κατηγορία των έμβιο-υλικών και συγκεκριμένα πρόκειται για ένα ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής (Abdominal Aortic Aneurysm) οι σταθερές του προσομοιώματος  $C_1$  και  $C_2$  λαμβάνουν τις εξής τιμές:  $C_1=10.3 \text{ N/cm}^2$  και  $C_2=18.0 \text{ N/cm}^2$ . Το μέτρο διάτμησης του υλικού ισούται με  $\mu=2C_1=20.6 \text{ N/cm}^2$ . Το διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζει τη σχέση της παραμόρφωσης  $\lambda$  με τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$ .



**Γράφημα 5.16.1** «Μοντέλο» Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$ . Η γραφική παράσταση απεικονίζει τη σχέση της παραμόρφωσης  $\lambda$  και της διόρθωσης  $N(\lambda)$ . Το γράφημα αναφέρεται σε ένα ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής, του οποίου οι σταθερές έχουν ληφθεί από τη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, οι σταθερές του υλικού είναι ίσες με  $C_1=10.3 \text{ N/cm}^2$  και  $C_2=18.0 \text{ N/cm}^2$ .



## 5.17 Υπολογισμός των ορθών τάσεων σε ένα ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής εφαρμόζοντας το «μοντέλο» του Yeoh

Για να υπολογίσουμε την ορθή τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  και την ορθή αξονική τάση  $\sigma_{zz}$  μίας αορτής, προσομοιάζοντας την σαν ένα κυλινδρικό σωλήνα, αρκεί να προσδιορίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  ως προς το «τέντωμα» στις αντίστοιχες διευθύνσεις  $\theta$  και  $z$ . **Το ανεύρυσμα μίας αρτηρίας έχει χάσει την ανισότροπη συμπεριφορά του. Έχει μετατραπεί δηλαδή σε ένα υλικό που έχει τη μορφή του gel.** Επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ισότροπο και εξαιτίας αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για να υπολογίσουμε τις ορθές τάσεις που στο συγκεκριμένο πρόβλημα ταυτίζονται με τις κύριες τάσεις.

$$\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = (2\alpha_1 \lambda_1 + 2\alpha_2 (I-3) 2\lambda_1) \lambda_1 = 2\lambda_1^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) \quad (5.55)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_2^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) \quad (5.56)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 2\lambda_3^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) \quad (5.57)$$

Οι ορθές τάσεις μετατρέπονται με αντικατάσταση ως εξής:

$$\sigma_{\theta\theta} \approx 2\lambda_{\theta}^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) - 2\lambda_r^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) (\lambda_{\theta}^2 - \lambda_r^2)$$

$$\sigma_{zz} \approx 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) (\lambda_z^2 - \lambda_r^2)$$

Η κοιλιακή αορτή (αρτηρία) χαρακτηρίζεται ως ένα ασυμπίεστο υλικό. Επομένως, το ακτινικό «τέντωμα» υπολογίζεται ως εξής:

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_z \lambda_{\theta}}$$

Η πρώτη κύρια αναλλοίωτη λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$I = \lambda_{\theta}^2 + \lambda_z^2 + \lambda_r^2 = \lambda_{\theta}^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{(\lambda_{\theta} \lambda_z)^2} = q^2 + \lambda^2 + \frac{1}{(\lambda q)^2} \quad (5.58)$$

Στην περίπτωση που η αρτηρία, εξαιτίας της εσωτερικής πίεσης που επιβάλλεται στο τοίχωμά της, διογκώνεται πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες:

$$\sigma_{\theta\theta} \geq 0$$

$$\lambda_{\theta} \geq \lambda_r$$

Όταν τα «τενώματα» στις διευθύνσεις  $z$  και  $r$  είναι ίσα, η αξονική τάση που αναπτύσσεται στην αρτηρία είναι ίση με μηδέν.

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\lambda_r = \lambda_z \Rightarrow \lambda_z^2 = \frac{1}{\lambda_{\theta}} \Rightarrow \lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\theta}}} \Rightarrow \lambda = q^{-\frac{1}{2}}$$

Από προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε ότι:

$$P = P_i - P_e \approx \sigma_{\theta\theta} \frac{\varepsilon}{\lambda q^2} = \frac{\varepsilon}{\lambda q^2} 2(\alpha_1 + 2\alpha_2(I-3))(q^2 - \lambda^2) \quad (5.59)$$

## 5.18 Το ζήτημα της αντοχής σε ελαστομερές δείγμα

Ο Volokh (2007) πρότεινε έναν ιδιαίτερα απλό τρόπο για να παρουσιάσει το όριο της ενέργειας χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση που συμβολίζει την ενέργεια παραμόρφωσης.

$$\psi(\Phi, W) = \Phi \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{W}{\Phi}\right) \right\} \quad (5.60)$$

Όπου με  $W$  παριστάνεται η ενέργεια παραμόρφωσης ενός «άθικτου», χωρίς αστοχία, υλικού και με  $\Phi$  η ογκομετρική ενέργεια αστοχίας ή διαφορετικά το όριο της ενέργειας. Η παραπάνω εξίσωση χαρακτηρίζεται από δύο οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση που η ενέργεια αστοχίας είναι άπειρη,  $\Phi = \infty$ , τότε έχουμε το κλασσικό υπέρ-ελαστικό υλικό,  $\psi(\infty, W) = W$ . Αντίθετα, όταν η ενέργεια αστοχίας είναι πεπερασμένη ισχύει ότι  $\psi(\Phi, \infty) = \Phi$ .

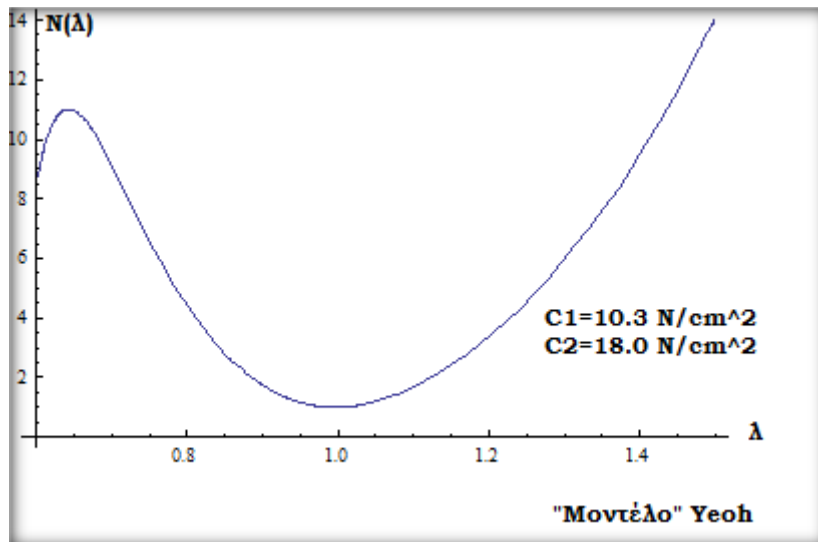
Ένα παράδειγμα, ώστε να εφαρμόσουμε την ανωτέρω εξίσωση σε ένα ασυμπίεστο υλικό ενός ανευρύσματος μιας κοιλιακής αορτής, δίνεται από τους Volokh και Vorp (2008) χρησιμοποιώντας το «μοντέλο» του Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους. Η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Όπου με  $\lambda_i$  συμβολίζεται το «τέντωμα» στις κύριες διευθύνσεις. Οι σταθερές του υλικού ενός ανευρύσματος μιας κοιλιακής αορτής είναι ίσες με  $C_1 = 10.3 \text{ N/cm}^2$ ,  $C_2 = 18.0 \text{ N/cm}^2$  και  $\Phi = 40.2 \text{ N/cm}^2$ .

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα το ζήτημα της αντοχής του υλικού. **Έτσι, γίνεται κατανοητό ότι δε μπορούμε να επιβάλλουμε στο δοκίμιο «τέντωμα» που θα υπερβαίνει το όριο αντοχής!** Η μεθοδολογία αυτή ουσιαστικά προστατεύει την πειραματική διαδικασία, που αποσκοπεί στην παραμόρφωση και όχι στη διάτρηση του δοκιμίου (καμπύλες προστασίας τόσο για τη δύναμη όσο και για την προένταση). Το διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζει τη σχέση της παραμόρφωσης  $\lambda$  με τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$ , κάνοντας χρήση του «μοντέλου» Yeoh με δύο σταθερές.



**Γράφημα 5.18.1** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σε σχέση με το «τέντωμα»  $\lambda$ . Η καμπύλη προέκυψε εφαρμόζοντας το προσομοίωμα του Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους. Οι σταθερές του «μοντέλου» περιγράφουν το ανεύρυσμα της κοιλιακής αορτής. Οι τιμές του  $\lambda$  στο γράφημα κυμαίνονται από 0.6 έως 1.5.

Για να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο γράφημα που εκφράζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους σε σχέση με την παραμόρφωση  $\lambda$  εισάγοντας το ζήτημα της αντοχής του επιλεγμένου δείγματος πρέπει να υπολογίσουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad (5.61)$$

$$W = 10.3(I_1 - 3) + 18.0(I_1 - 3)^2$$

$$\psi = 40.2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{W}{40.2}\right) \right]$$

$$\psi_1 = [10.3 + 2 * 18.0(I_1 - 3)] \exp\left(-\frac{W}{40.2}\right)$$

$$\psi_{11} = \left[ 2 * 18.0 - \frac{1}{40.2} (10.3 + 2 * 18.0(I_1 - 3))^2 \right] \exp\left(-\frac{W}{40.2}\right)$$

$$\psi_i = \partial \psi / \partial I_i \quad (5.62)$$

$$\psi_{ij} = \partial^2 \psi / \partial I_i \partial I_j \quad (5.63)$$

$$N(\lambda) = \frac{(k_1 b + a) \sqrt{k_1} (1 + k_2) - (k_2 b + a) \sqrt{k_2} (1 + k_1)}{2(k_1 - k_2)} \quad (5.64)$$

$$a = \frac{2}{\lambda^4}(\psi_1 + \lambda^2 \psi_2) \quad (5.65)$$

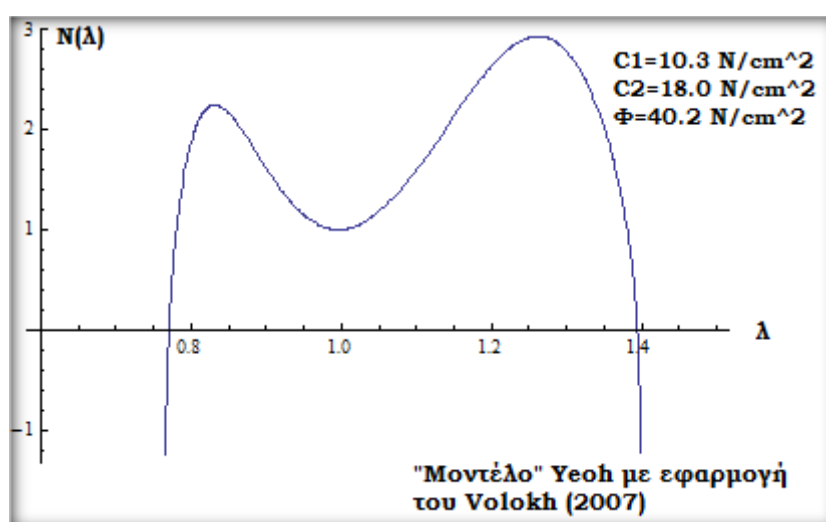
$$b = 2\lambda^2(\psi_1 + \lambda^2 \psi_2) \quad (5.66)$$

$$c = 4\lambda^2 \left[ (\psi_1 + \lambda^2 \psi_2) + (\lambda^2 - \lambda^4)(\psi_{11} + \psi_{22}\lambda^2(\lambda^4 + \lambda^2)) + \psi_{12}(\lambda^4 + 2\lambda^2) \right] \quad (5.67)$$

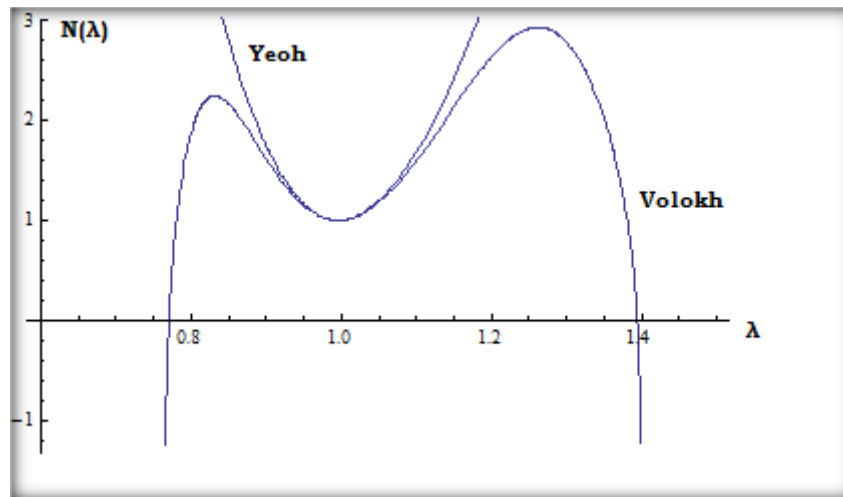
$$d = 4\lambda^4 \left[ (\psi_1 + \lambda^2 \psi_2) + (\lambda^4 - \lambda^2)(\psi_{11} + 2\psi_{22}\lambda^4 + 3\psi_{12}\lambda^2) \right] \quad (5.68)$$

$$k_{1,2} = \frac{-(a+b-c-d) \pm \sqrt{(a+b-c-d)^2 - 4ab}}{2b} \quad (5.69)$$

Αφού λοιπόν, υπολογίσουμε τα μεγέθη που αναγράφονται παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα που εκφράζει τη διόρθωση  $N(\lambda)$  εισάγοντας το ζήτημα της αντοχής του υλικού.



**Γράφημα 5.18.2** Γράφημα που απεικονίζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$  σε σχέση με το «τεντώμα»  $\lambda$ . Η καμπύλη προέκυψε εφαρμόζοντας την ενέργεια παραμόρφωσης  $W$  του «μοντέλου» Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε διόρθωση του  $W$  εισάγοντας την προτεινόμενη σχέση του Volokh. Οι σταθερές του «μοντέλου» περιγράφουν το ανεύρυσμα της κοιλιακής αορτής. Οι τιμές του  $\lambda$  στο γράφημα κυμαίνονται από 0.6 έως 1.5. Τα ακρότατα της καμπύλης δηλώνουν το όριο του «τεντώματος»  $\lambda$ . **Μέσα σε αυτό το διάστημα των τιμών του  $\lambda$  μπορούμε να επιβάλλουμε παραμορφώσεις στο υλικό!** Τα σημεία του «τεντώματος» για τα οποία η διόρθωση μηδενίζεται αποκαλούνται κρίσιμα σημεία, που χαρακτηρίζονται από έλλειψη ευστάθειας. Το θέμα της ευστάθειας σχετίζεται με την έλλειψη ακαμψίας και αντίστασης του υλικού. Σε περιπτώσεις αστάθειας παρατηρούμε μετρολογικό πρόβλημα, διότι αυξάνονται υπέρμετρα οι παραμορφώσεις και ενδεχομένως αυτό να οδηγήσει σε θέματα αντοχής. Αυτό δείχνει να αφορά κυρίως θλιπτικές τάσεις.

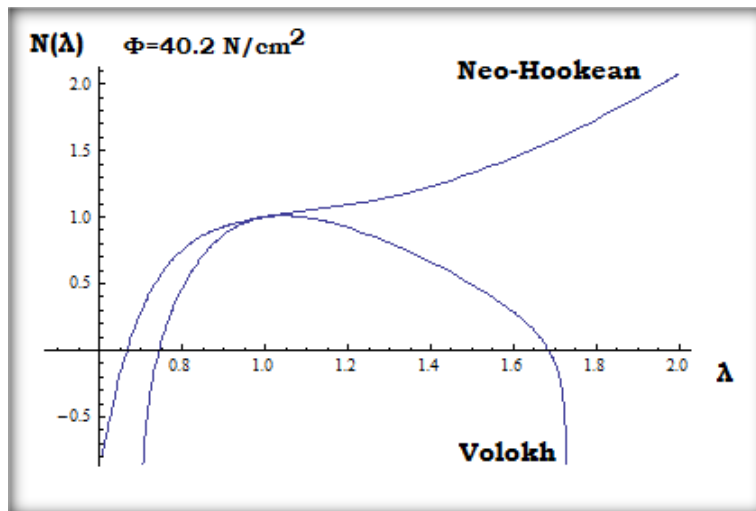


**Γράφημα 5.18.3** Συγκριτικό διάγραμμα της διόρθωσης  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους εφαρμόζοντας το προσομοίωμα του Yeoh και τη θεωρία του Volokh. Η καμπύλη κατά Volokh εμπεριέχει την αντίστοιχη καμπύλη κατά Yeoh και απεικονίζει τα όρια του «τεντώματος», τα οποία δεν επιτρέπεται να υπερβούμε όταν παραμορφώνουμε ένα «σώμα». Με τον τρόπο αυτό επιλύουμε το ζήτημα της αντοχής ενός δοκιμίου, εφόσον γνωρίζουμε το πιθανό διάστημα των τιμών, για το οποίο υπάρχει πιθανότητα να επέλθει αστοχία του υλικού. **Αν παρατηρήσουμε το γράφημα θα διαπιστώσουμε ότι η αντοχή στην περίπτωση εφελκυστικής προέντασης είναι μεγαλύτερη από την αντοχή σε θλίψη.** Ένα «σώμα» χάνει ουσιαστικά την αντοχή του όταν επέλθει διάτρηση. Τα σημεία του «τεντώματος» για τα οποία η διόρθωση είναι μηδενική στην καμπύλη του Volokh περιγράφουν την έλλειψη ευστάθειας (αστάθεια) του δείγματος. Για το ίδιο γράφημα τα σημεία που παριστάνουν τις μέγιστες τιμές της διόρθωσης  $N(\lambda)$  περιγράφουν την εφελκυστική και τη θλιπτική αντοχή του υλικού. **Έτσι λοιπόν, και στις δύο περιπτώσεις, εφελκυσμός και θλίψη, προηγείται η αντοχή έναντι της ευστάθειας.** Ουσιαστικά, το δοκίμιο δείχνει να χάνει πρώτα την αντοχή του και στη συνέχεια την ευστάθειά του!

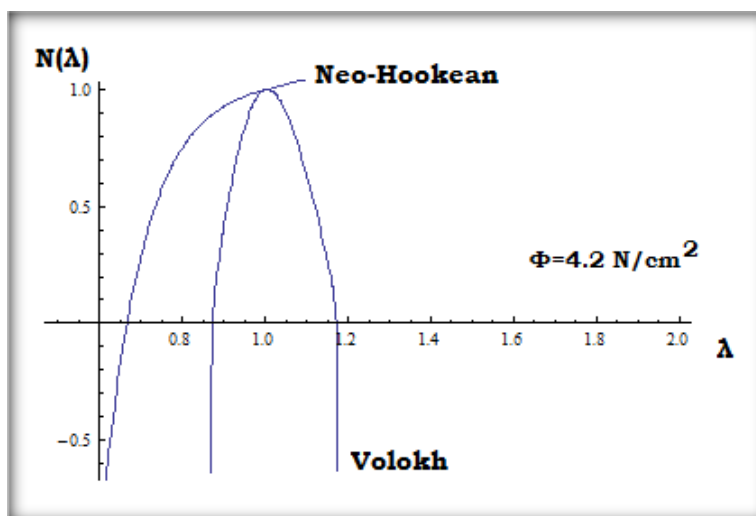
Για λόγους πληρότητας θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα, αντίστοιχο με το προηγούμενο, όπου η πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης θα προέρχεται από τον καταστατικό νόμο του Neo-Hookean. Ο καταστατικός νόμος σύμφωνα με το «μοντέλο» Neo-Hookean γράφεται ως εξής:

$$W = C_1 (I_1 - 3)$$

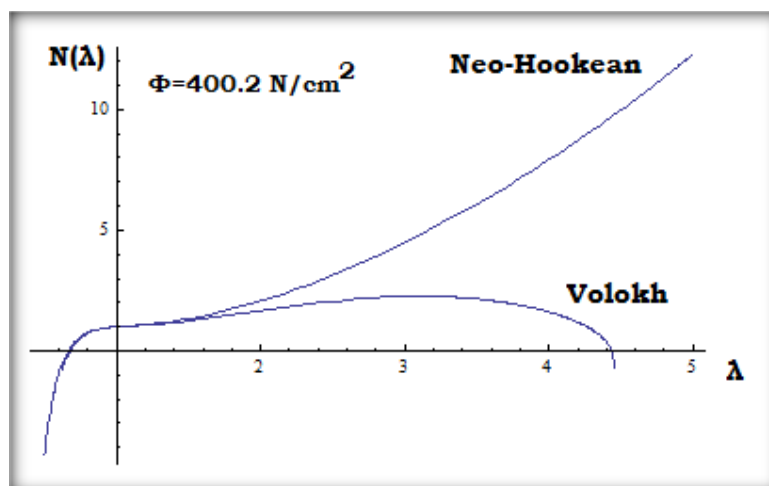
Όπου η σταθερή ποσότητα  $C_1 = 2\mu_0$ . Προκύπτει λοιπόν, ένα διάγραμμα παρόμοιο με το προηγούμενο, στο οποίο η καμπύλη του Volokh ορίζει ένα επιτρεπτό εύρος τιμών του «τεντώματος» του δείγματος, ώστε να αποφευχθεί πιθανός κίνδυνος αστοχίας του υλικού.



**Γράφημα 5.18.4** Συγκριτικό διάγραμμα της διόρθωσης  $N(\lambda)$  του συμμετρικού μέρους εφαρμόζοντας τον καταστατικό νόμο του Neo-Hookean και τη θεωρία του Volokh. Στο γράφημα η οριακή τιμή της ενέργειας λήφθηκε ίση με  $\Phi=40.2$  N/cm<sup>2</sup>. Σε αυτή την περίπτωση το «σώμα» εμφανίζει μέγιστη αντοχή στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Η επιβολή εφελκυστικού ή θλιπτικού φορτίου μειώνουν την αντοχή του υλικού. Το επιτρεπόμενο «τέντωμα», ώστε να μη χαθεί η ευστάθεια του δοκιμίου, πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $0.75 \leq \lambda \leq 1.67$ .



**Γράφημα 5.18.5** Αντίστοιχο γράφημα με το προηγούμενο, που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους κατά Neo-Hookean και Volokh. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της οριακής ενέργειας  $\Phi$  λήφθηκε ίση με 4.2 N/cm<sup>2</sup>. Αν παρατηρήσουμε την καμπύλη του Volokh θα διαπιστώσουμε ότι εξαιτίας της μείωσης της τιμής της σταθεράς  $\Phi$ , προκύπτει μικρότερο διάστημα επιτρεπόμενου «τεντώματος» του υλικού, ώστε να αποφευχθεί η αστοχία, με αποτέλεσμα να μειώνεται και η ωφέλιμη περιοχή για το πείραμα διείδυσης!

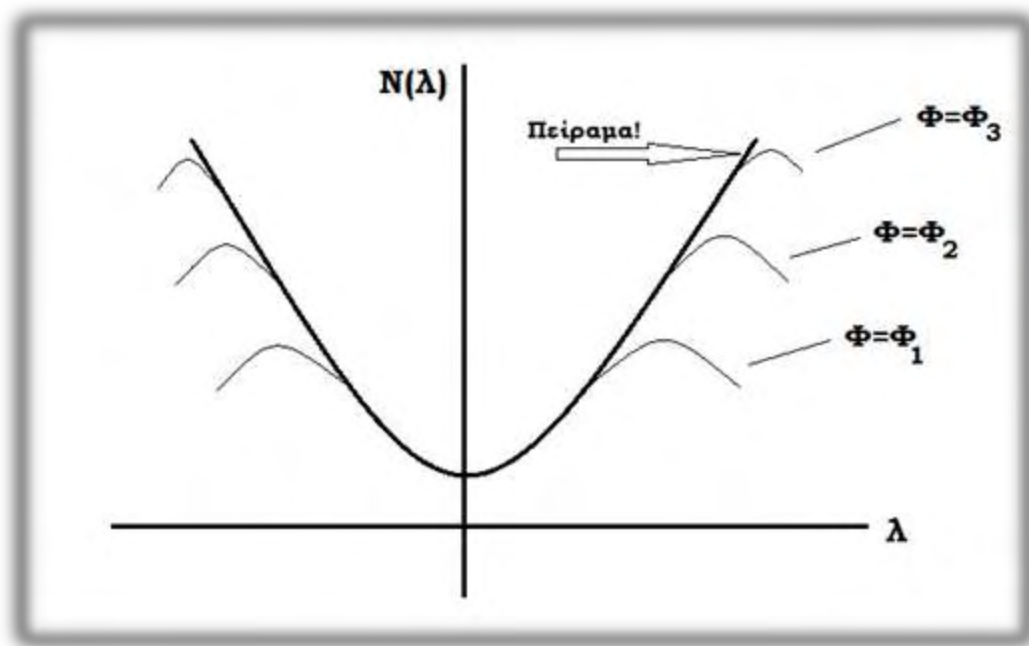


**Γράφημα 5.18.6** Γραφική παράσταση που εκφράζει τη διόρθωση του συμμετρικού μέρους κατά Neo-Hookean και Volokh. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της οριακής ενέργειας  $\Phi$  για την καμπύλη του Volokh λήφθηκε ίση με  $400.2 \text{ N/cm}^2$ . Αν παρατηρήσουμε την καμπύλη του Volokh θα διαπιστώσουμε ότι εξαιτίας της μεγάλης τιμής της οριακής ενέργειας  $\Phi$ , που λειτουργεί σαν επιτρεπόμενη τάση, αυξάνεται σημαντικά το εύρος των τιμών του «τεντώματος» που μπορούμε να επιβάλλουμε στο υλικό, χωρίς να επέλθει θραύση. Οι δύο καμπύλες για διάστημα τιμών του  $\lambda$  μεταξύ 0.6 και 2.0 δείχνουν να συγκλίνουν σημαντικά.

Σε όλα τα δομικά και μηχανικά συστήματα, παρόλο που μπορεί τα επιμέρους τμήματα όταν απομονωθούν να δείχνουν ευστάθεια, σαν σύνολο και κάτω από συγκεκριμένες φορτίσεις μπορεί να χάσουν την ευστάθεια τους. Αυτό μπορεί να συμβεί κατεξοχήν σε μη γραμμικές αποκρίσεις και όπου μπορεί να αναπτυχθεί μη γραμμικότητα (όχι κατά ανάγκη σε μη γραμμικά).

**Το διάγραμμα που εκφράζει το ζήτημα της αντοχής ενός δοκιμίου μπορεί να έχει διπλό ρόλο.** Μπορεί για κάποιο λόγο να θελήσουμε να προκαλέσουμε διάτρηση στο υλικό, όπως για παράδειγμα με τις μικρό-φυσαλίδες στοχευόμενης μεταφοράς φαρμάκων. Για να επιτευχθεί αστοχία στο «σώμα» θα πρέπει να επιβάλλουμε παραμόρφωση εκτός των ορίων του «τεντώματος»  $\lambda$  που ορίζει το διάγραμμα του Volokh.





**Σχήμα 5.18.1** Στο σχήμα μπορούμε να δούμε τη μεθοδολογία υπολογισμού της οριακής τιμής της ενέργειας  $\Phi$ . Αρχικά λοιπόν, γνωρίζουμε το υλικό! Επομένως, ο καταστατικός νόμος που προσομοιάζει το «σώμα» είναι γνωστός. Εάν λοιπόν, υποβάλλουμε το δείγμα σε ένα πείραμα μονοαξονικού ελκυσμού και αυξάνουμε προοδευτικά το «τέντωμα»  $\lambda$ , για κάποια τιμή του  $\Phi$  θα επέλθει αστοχία στο «σώμα». Αυτή θα είναι η επιθυμητή τιμή της οριακής τιμής της ενέργειας  $\Phi$ ! Πρέπει δηλαδή  $\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0$ . Στο γράφημα ισχύει ότι  $\Phi_3 > \Phi_2 > \Phi_1$ .

## 5.19 Αριθμητικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της ορθής τάσης $\sigma_{\theta\theta}$ ενός κυλινδρικού σωλήνα

Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος του κυλινδρικού σωλήνα θα αναφέρουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα. Για να περιγράψουμε λοιπόν, ένα ανεύρυσμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προσομοίωμα του Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους. Η επιλογή των σταθερών παραμέτρων του «μοντέλου» Yeoh προέρχεται από τις δημοσιεύσεις του Volokh (2011) και των Raghavan et al. (2000). Το «τέντωμα» στις διευθύνσεις  $z$  και  $\theta$  προκύπτει από την εκτίμηση του Hales (1733). Ειδικότερα, ο Hales αναφέρει ότι για περιπτώσεις φυσιολογικής πίεσης ( $P=13.3$  kPa) η μεταβολή του όγκου  $\Delta V/V$  ισούται με  $1/3$ . Επομένως, οι παραμορφώσεις λαμβάνουν τις τιμές  $\lambda=0.91$  και  $q=1.21$ , αντίστοιχα. Ακολουθεί μία σειρά αριθμητικών υπολογισμών για την επίλυση της ακόλουθης σχέσης, με απώτερο στόχο τον υπολογισμό της ορθής τάσης  $\sigma_{\theta\theta}$ .

$$P = P_i - P_e \approx \sigma_{\theta\theta} \frac{\varepsilon}{\lambda q^2} = \frac{\varepsilon}{\lambda q^2} 2(\alpha_1 + 2\alpha_2(I-3))(q^2 - \lambda^2) \quad (5.70)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί υπολογίζονται διαδοχικά οι ποσότητες που χρειάζονται για τον υπολογισμό της ορθής τάσης  $\sigma_{\theta\theta}$ .

**Πίνακας 5.19.1** Αριθμητικός υπολογισμός των μεγεθών που απαιτούνται για τον υπολογισμό της ορθής τάσης  $\sigma_{\theta\theta}$ .

$\lambda$	<b>0.91</b>
$q$	<b>1.21</b>
$\lambda^2$	<b>0.8281</b>
$q^2$	<b>1.4641</b>
$\lambda q^2$	<b>1.332331</b>
$(\lambda q)^2$	<b>1.2124212</b>
$\frac{1}{(\lambda q)^2}$	<b>0.8247958</b>
$I$	<b>3.1169958</b>
$I-3$	<b>0.1169958</b>

$q^2 - \lambda^2$	<b>0.636</b>
$\frac{1}{\lambda q^2}$	<b>0.7505642</b>

Χρησιμοποιώντας λοιπόν, τους ανώτερο υπολογισμούς επιθυμούμε να προσδιορίσουμε την ορθή τάση του σωλήνα στην περίμετρο λαμβάνοντας τις σταθερές παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$  σύμφωνα με τις δημοσιεύσεις του Volokh (2011) και των Raghavan et al. (2000). Στη δημοσίευση του Volokh (2011) οι σταθερές αφορούν το ανεύρυσμα μίας κοιλιακής αορτής και είναι ίσες με  $C_1=10.3 \text{ N/cm}^2$  και  $C_2=18.0 \text{ N/cm}^2$ . Αντίστοιχα, στη δημοσίευση των Raghavan et al. (2000) οι σταθερές του «μοντέλου» Yeoh, που αφορούν το ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής, είναι ίσες με  $C_1=17.4 \text{ N/cm}^2$  και  $C_2=188.1 \text{ N/cm}^2$ . Παρατηρούμε ότι η σταθερά  $C_1$  είναι συγκρίσιμη στις δύο δημοσιεύσεις.

**Πίνακας 5.19.2** Υπολογισμός της ορθής τάσης  $\sigma_{\theta\theta}$  που επιβάλλεται στην περίμετρο του κυλινδρικού σωλήνα.

<b>Δημοσίευση</b>	<b>Volokh (2011)</b>	<b>Raghavan et al. (2000)</b>
$\alpha_1 (N/cm^2)$	<b>10.3</b>	<b>17.4</b>
$\alpha_2 (N/cm^2)$	<b>18.0</b>	<b>188.1</b>
$2\alpha_2 (I-3), (kPa)$	<b>42.1185</b>	<b>440.1382</b>
$\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3), (kPa)$	<b>145.1185</b>	<b>614.1382</b>
$\frac{P}{\varepsilon} = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 (I-3)) \left( q^2 - \lambda^2 \right) \frac{1}{\lambda q^2}, (kPa)$	<b>138.5472</b>	<b>586.3286</b>
$\varepsilon (P=13.3kPa)$	<b>0.0959</b>	<b>0.0227</b>
$A(mm)$	<b>5.4</b>	<b>5.4</b>
$H = \varepsilon A, (mm)$	<b>0.5184</b>	<b>0.1225</b>
$\sigma_{\theta\theta} = P \frac{\lambda q^2}{\varepsilon}, (kPa)$	<b>184.5907</b>	<b>781.1837</b>

## 5.20 Ισοδύναμη τάση Mises

Η ισοδύναμη τάση Mises συμβολίζεται με  $\sigma_e$  και μπορούμε να την υπολογίσουμε με εφαρμογή της εξίσωσης που δίνεται παρακάτω. Ο υπολογισμός της ισοδύναμης τάσης  $\sigma_e$  προϋποθέτει τη γνώση των ορθών τάσεων που αναπτύσσονται στο υλικό  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  και  $\sigma_{rr}$ .

$$(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 = 2\sigma_e^2 \quad (5.71)$$

Στην περίπτωση που η αξονική τάση  $\sigma_{zz}$  ισούται με την ακτινική  $\sigma_{rr}$ , η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται. Έτσι λοιπόν, με απλή αντικατάσταση η εξίσωση (5.71) λαμβάνει τη μορφή:

$$\sigma_{zz} \approx \sigma_{rr}$$

$$\frac{1}{2} \{ (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 \} = \sigma_e^2$$

$$\sigma_e = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} \quad (5.72)$$

Σε προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίσαμε την ορθή τάση που επιβάλλεται στην περίμετρο του σωλήνα εφαρμόζοντας το προσομοίωμα του Yeoh με δύο σταθερές παραμέτρους  $C_1$  και  $C_2$ . Οι τιμές των σταθερών λήφθηκαν από τις δημοσιεύσεις του Volokh (2011) και των Raghavan et al. (2000). Τα αποτελέσματα των τάσεων υπολογίστηκαν, σε προηγούμενο κεφάλαιο, ίσα με  $\sigma_{\theta\theta} = 184.5907$  kPa και  $\sigma_{\theta\theta} = 781.1837$  kPa. Η ισοδύναμη τάση Mises  $\sigma_e$ , με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε τα αποτελέσματα της ορθής τάσης  $\sigma_{\theta\theta}$  του σωλήνα, παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.20.1** Η ισοδύναμη τάση Mises υπολογισμένη χρησιμοποιώντας τις σταθερές του «μοντέλου» Yeoh που προτείνουν ο Volokh (2011) και οι Raghavan et al. (2000). Από την ανάλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η ορθή τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  ισούται περίπου με 480 kPa. Η ακτινική ορθή τάση  $\sigma_{rr}$  είναι αρνητική επειδή προκαλεί συμπίεση στο σωλήνα.

Δημοσίευση	Volokh (2011)	Raghavan et al. (2000)
$\sigma_{\theta\theta}$ (kPa)	184.5907	781.1837
$\sigma_{rr}$ (kPa)	-13.3000	-13.3000
$\sigma_e = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ , (kPa)	197.8907	794.4837

## 5.21 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff σύμφωνα με την προσέγγιση του Pipkin

Στην περίπτωση ισότροπου κυλινδρικού σωλήνα με λεπτό τοίχωμα, για τον υπολογισμό της 2<sup>ης</sup> τάσης Piola-Kirchhoff μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του Pipkin. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Pipkin υπολογίζεται η 2<sup>η</sup> τάση Piola-Kirchhoff στην απαραμόρφωτη κατάσταση του «σώματος», εφόσον γνωρίζουμε τη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ .

$$P_{\theta\theta} = \lambda_{\theta}^{-2} \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta}} \quad (5.73)$$

$$P_{zz} = \lambda_z^{-2} \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} \quad (5.74)$$

Η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  προκύπτει από το «μοντέλο» που θα επιλέξουμε για να προσομοιάσουμε το υλικό και εξαρτάται από το «τέντωμα».

$$W(\lambda_{\theta}, \lambda_z) = W(\lambda_{\theta}, \lambda_z, \lambda_{\theta}^{-1} \lambda_z^{-1})$$

Η 2<sup>η</sup> τάση Piola-Kirchhoff στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του υλικού υπολογίζεται ως εξής:

$$P_{\theta\theta} = \lambda_{\theta}^{-2} \sigma_{\theta\theta}$$

$$P_{zz} = \lambda_z^{-2} \sigma_{zz}$$

$$P_{rr} = \lambda_r^{-2} \sigma_{rr}$$

Η 2<sup>η</sup> τάση Piola-Kirchhoff μπορεί να γραφεί και σε μητρωϊκή μορφή, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$[P] = [F]^{-1} [\sigma] [F]^{-T} \quad (5.75)$$

Με  $[F]$  συμβολίζεται η κλίση της παραμόρφωσης, η οποία σε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων απεικονίζεται ως εξής:

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = [F]^T \quad (5.76)$$

Το μητρώο  $[F]$  ταυτίζεται με το συμμετρικό του  $[F]^T$  και επομένως μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένας συμμετρικός πίνακας. Εξαιτίας της συμμετρίας του πίνακα, ο αντίστροφος  $[F]^{-1}$  απεικονίζεται ως εξής:

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Η δεξιά και η αριστερή μετρική παραμόρφωση Cauchy-Green συμβολίζονται με  $[C]$  και  $[B]$ , αντίστοιχα. Στην περίπτωση που η κλίση της παραμόρφωσης είναι ένας συμμετρικός τανυστής τα μητρώα  $[C]$  και  $[B]$  είναι ίσα μεταξύ τους.

$$[C] = [F]^T [F] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = [B] = [F][F]^T \quad (5.78)$$

## 5.22 Μητρώο παραμόρφωσης Green

Το μητρώο παραμόρφωσης Green προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) \quad (5.79)$$

Με αντικατάσταση της δεξιάς μετρικής παραμόρφωσης Cauchy-Green, που υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει ο τανυστής που εκφράζει την παραμόρφωση Green.

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_z^{-2}\lambda_\theta^{-2} - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_\theta^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_z^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$E_{rr} = \frac{1}{2}[(\lambda q)^{-2} - 1] \quad (5.80)$$

$$E_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(q^2 - 1) \quad (5.81)$$

$$E_{zz} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad (5.82)$$

Εάν μελετήσουμε προσεκτικά τις σχέσεις που εκφράζουν την ορθή παραμόρφωση Green συμπεραίνουμε ότι εξαρτάται από το «τέντωμα» που επιβάλλεται στο υλικό στις κύριες διευθύνσεις.

## 5.23 Ελαστικό υλικό του Fung

**Τ**ο προσομοίωμα του Fung εφαρμόζεται σε ελαστικά υλικά. Με τον όρο «ελαστικό σώμα» ονομάζεται το υλικό που εάν το αποφορτίσουμε με κάποιο τρόπο επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση. Ένα υλικό που είναι ελαστικό δεν είναι απαραίτητα γραμμικό! Η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  στο «μοντέλο» του Fung εκφράζεται από τη σχέση που ακολουθεί.

$$W = \frac{C}{2}(e^Q - 1) \quad (5.83)$$

Η παράμετρος  $Q$  υπολογίζεται ως εξής:

$$Q = \frac{1}{2} C_{ABCD} E_{AB} E_{CD} \quad (5.84)$$

Στην ανωτέρω σχέση, οι ποσότητες  $C_{ABCD}$  αποτελούν τις παραμέτρους του υλικού. Ο μέγιστος αριθμός παραμέτρων, που μπορεί να έχει ένα προσομοίωμα τέτοιου τύπου, είναι 81. Στην περίπτωση που το υλικό είναι ορθότροπο μειώνονται σε 8, ενώ εάν το «σώμα» είναι ισότροπο ελαττώνονται ακόμη περισσότερο και φτάνουν τις 2.

### 5.23.1 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff

Η δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff  $[S]$  μπορεί να γραφεί όπως δείχνεται παρακάτω. Η ακόλουθη εξίσωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένας καταστατικός νόμος που συνδέει την τάση με την παραμόρφωση. Με το σύμβολο  $P$  παριστάνεται η πίεση.

$$S_{AB} = \frac{C}{2} e^Q \frac{\partial Q}{\partial E_{AB}} - P C_{AB}^{-1} \quad (5.85)$$

### 5.23.2 Μητρώο τάσεων κατά Cauchy

Η δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff συνδέεται με τις τάσεις κατά Cauchy με μία μητρωϊκή σχέση που αναγράφεται παρακάτω.

$$J[\sigma] = [F][S][F]^T \quad (5.86)$$

Στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού  $J=1$ . **Η ποσότητα  $J$  εκφράζει τη μεταβολή του όγκου σε ένα υλικό!** Η τάσεις κατά Cauchy ορίζονται ως εξής:



$$[\sigma] = -P[I] + 2[F] \left[ \frac{\partial W}{\partial C} \right] [F]^T \quad (5.87)$$

Οι ορθές τάσεις που επιβάλλονται σε ένα «σώμα» στις τρεις διευθύνσεις του υλικού  $\theta$ ,  $z$ ,  $r$  εκφράζονται από τις ακόλουθες σχέσεις, που μπορούμε να τις εφαρμόσουμε για ισότροπα και για ανισότροπα υλικά!

$$\sigma_{\theta\theta} = -P + \lambda_{\theta}^2 \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} \quad (5.88)$$

$$\sigma_{zz} = -P + \lambda_z^2 \frac{\partial W}{\partial E_{zz}} \quad (5.89)$$

$$\sigma_{rr} = -P + \lambda_r^2 \frac{\partial W}{\partial E_{rr}} \quad (5.90)$$

Μπορούμε να επιλύσουμε την τελευταία σχέση ως προς την πίεση.

$$P = \lambda_r^2 \frac{\partial W}{\partial E_{rr}} - \sigma_{rr}$$

Στην περίπτωση που επιβάλλεται σε έναν κλειστό κυλινδρικό σωλήνα μία αξονική δύναμη  $F_z$  και η εσωτερική πίεση που ασκείται στο τοίχωμα ισούται με  $P_i - P_e$  η εξίσωση ισορροπίας γράφεται ως εξής:

$$F_z + \pi r_i^2 (P_i - P_e) = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{zz} r dr \quad (5.91)$$

Η εξίσωση ισορροπίας ενός «σώματος» κατά την ακτινική διεύθυνση στην παραμορφωμένη κατάσταση (spatial configuration) αναγράφεται παρακάτω.

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (5.92)$$

Εάν ολοκληρώσουμε την εξίσωση ισορροπίας ως προς  $r$  προκύπτει ότι:

$$\sigma_{rr} = -P_i + \int_{r_i}^r \left[ \lambda_{\theta}^2(r) \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}}(r) - \lambda_r^2(r) \frac{\partial W}{\partial E_{rr}}(r) \right] \frac{dr}{r} \quad (5.93)$$

## 5.24 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung για ανισότροπα υλικά - Αρτηρίες

Για να περιγράψουμε τις μηχανικές ιδιότητες ενός αγγείου αποδεχόμαστε την εκθετική μορφή της συνάρτησης πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης στο «μοντέλο» του Fung. Η ενέργεια παραμόρφωσης στο εκθετικό προσομοίωμα του Fung στην περίπτωση ανισότροπου υλικού, όπως είναι οι αρτηρίες, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2} \left\{ \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{\theta\theta} E_{zz} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr}) - 1 \right\} \quad (5.94)$$

Όπου με  $C$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$ ,  $b_6$  συμβολίζονται οι επτά σταθερές του προσομοιώματος που διαφέρουν για τα στρώματα media και adventitia, ενώ με το σύμβολο  $E_{\theta\theta}$ ,  $E_{zz}$ ,  $E_{rr}$  παριστάνονται οι παραμορφώσεις του Green.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε έναν πίνακα με χαρακτηριστικές τιμές των σταθερών παραμέτρων στο «μοντέλο» του Fung για δύο περιπτώσεις ανισότροπου υλικού, αορτή σε θώρακα λαγού και στεφανιαία αρτηρία σε χοίρο, αντίστοιχα.

**Πίνακας 5.24.1** Χαρακτηριστικές τιμές των σταθερών παραμέτρων στο «μοντέλο» του Fung για δύο περιπτώσεις ανισότροπου υλικού, (α) αορτή σε θώρακα λαγού και (β) στεφανιαία αρτηρία σε χοίρο.

Material	C [kPa]	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	Comment
Rabbit Thoracic aorta	22.40	1.0672	0.4775	0.0499	0.0903	0.0585	0.0042	Intact Wall
Porcine Coronary artery	6.53	2.5000	3.6100	0.8300	0.4400	0.0500	0.1000	Media
	5.30	1.1900	3.3000	1.2700	0.4100	0.0700	0.0700	Adventitia

## 5.25 Εκθετικό προσομοίωμα του Fung για ανισότροπα υλικά – Ανάλυση μεμβρανών

Η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης στην περίπτωση ανισότροπου υλικού που μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν μία μεμβράνη εκφράζεται ως εξής:

$$W = \frac{C}{2}(\exp Q - 1) \quad (5.95)$$

$$Q = a_1(E_{\theta\theta}^2 - E_{\theta\theta}^{*2}) + a_2(E_{zz}^2 - E_{zz}^{*2}) + 2a_4(E_{\theta\theta}E_{zz} - E_{\theta\theta}^*E_{zz}^*) \quad (5.96)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με  $C$  ( $\text{N/m}^2$ ),  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_4$  συμβολίζονται οι σταθερές του «μοντέλου». Οι ποσότητες  $E_{\theta\theta}^*$  και  $E_{zz}^*$  εκφράζουν τις παραμορφώσεις σε ειδικές συνθήκες πίεσης και αξονικού «τεντώματος» (homeostatic state). Στην ανωτέρω σχέση αγνοούμε την παραμόρφωση  $E_{rr}$ , που χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση αξονοσυμμετρικής παραμόρφωσης. Οι σταθερές του προσομοιώματος  $C$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  πρέπει να είναι θετικές, ενώ η σταθερή παράμετρος  $a_4$  πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\alpha_1\alpha_2 > \alpha_4^2$$

$$C > 0$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 > 0$$

$$(|E_{AB}| < 1)$$

### 5.25.1 Δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff

Η δεύτερη τάση Piola-Kirchhoff, όπως αναγράφεται και σε προηγούμενο κεφάλαιο, περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$P_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\lambda_{\theta}^2} \quad (5.97)$$

$$P_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda_z^2} \quad (5.98)$$

$$P_{\theta\theta} = \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} = \frac{C}{2} \exp(Q) (2\alpha_1 E_{\theta\theta} + 2\alpha_4 E_{zz}) \quad (5.99)$$

$$P_{zz} = \frac{\partial W}{\partial E_{zz}} = \frac{C}{2} \exp(Q) (2\alpha_2 E_{zz} + 2\alpha_4 E_{\theta\theta}) \quad (5.100)$$

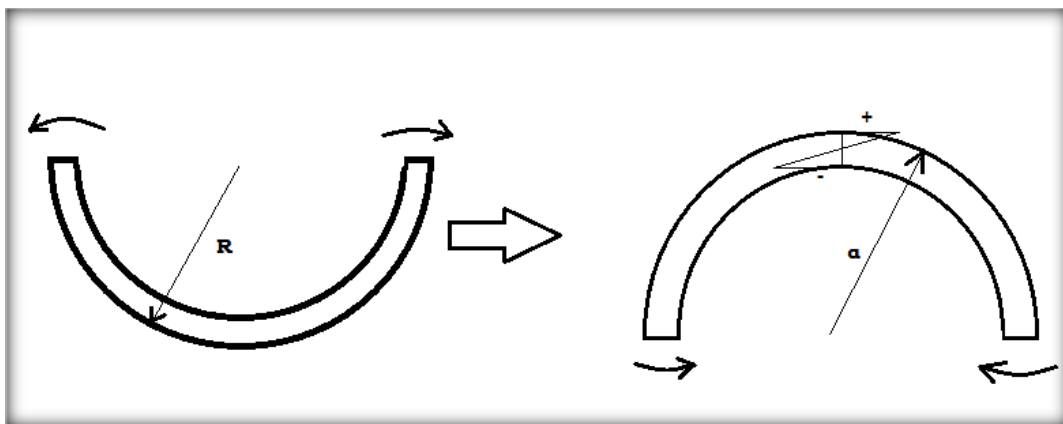
Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε έναν πίνακα με χαρακτηριστικές τιμές των σταθερών παραμέτρων στο «μοντέλο» του Fung για δύο περιπτώσεις ανισότροπου υλικού, (α) δεξιά στεφανιαία αρτηρία σε χοίρο και (β) αριστερό πρόσθιο αρτηρίας σε χοίρο. Τα αποτελέσματα που αναγράφονται στον πίνακα έχουν ληφθεί σε θερμοκρασία δωματίου 28°C, σε συνθήκες πίεσης 80 mm Hg, ενώ το αξονικό «τέντωμα» που υποβάλλονται τα δοκίμια είναι ίσο με  $\lambda_z = 1.4$ .

**Πίνακας 5.25.1.1** Χαρακτηριστικές τιμές των σταθερών παραμέτρων στο «μοντέλο» του Fung για δύο περιπτώσεις ανισότροπου υλικού, (α) δεξιά στεφανιαία αρτηρία σε χοίρο και (β) αριστερό πρόσθιο αρτηρίας σε χοίρο.

material	C [kPa]	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$E^*_{\theta\theta}$	$E^*_{zz}$	Part
Porcine Right Coronary Artery	31.50	1.50	2.00	0.15	0.77	0.48	Intact Wall
	40.60	4.40	2.40	0.32	0.49	0.50	Media- Intima
Porcine Left Anterior Descending Artery	43.60	1.40	1.70	0.15	0.72	0.49	Intact Wall
	40.20	4.60	1.80	0.34	0.52	0.49	Media- Intima
	50.90	1.80	2.30	0.77	0.82	0.48	Adventitia

## 5.26 Το πρόβλημα της αναστροφής σε σωλήνα με λεπτό τοίχωμα

**Μ**ια αρτηρία μπορεί να κοπεί κατά τη διεύθυνση της διατομής της  $r$  καθώς και κατά τη διεύθυνση του άξονα της  $z$ . Στην περίπτωση που επιλέξουμε να διαιρέσουμε την αρτηρία σε δύο ίσα ημικύκλια μπορεί να συμβεί το φαινόμενο της αναστροφής. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει η πιθανότητα σε κάποιο ημικύκλιο να στρίψει το εσωτερικό τοίχωμα εξωτερικά (να γίνει το «μέσα έξω»). Το φαινόμενο της αναστροφής ενός κυλινδρικού σωλήνα απεικονίζεται παρακάτω.

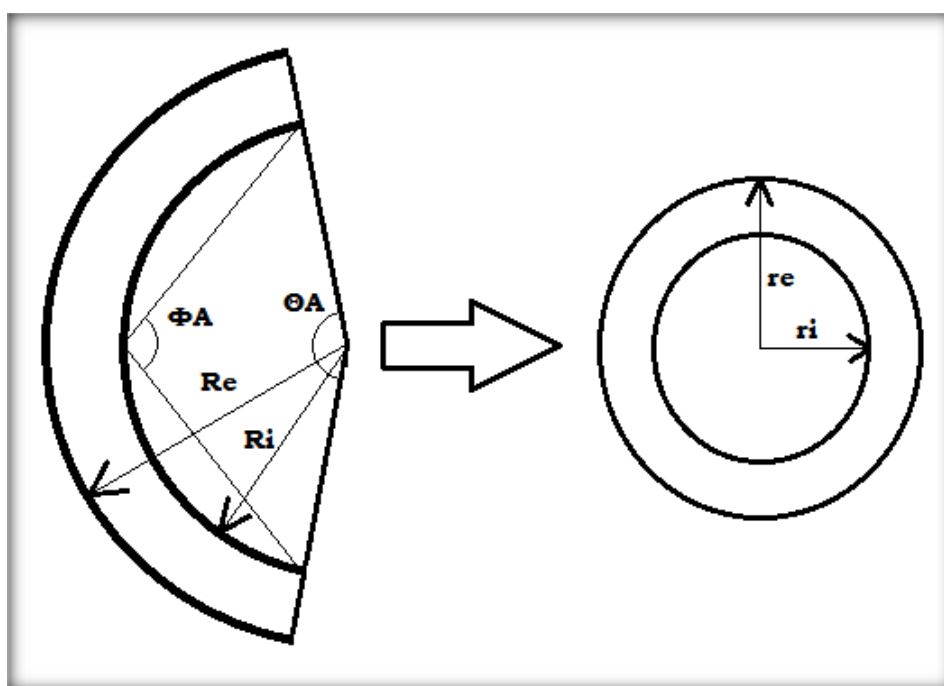


**Σχήμα 5.26.1** Αναστροφή σωλήνα με λεπτό τοίχωμα. Οι ροπές που εμφανίζονται στη διατομή εξαιτίας της τομής προκαλούν το φαινόμενο της αναστροφής. Με  $R$  συμβολίζεται η αρχική ακτίνα της διατομής του λεπτού σωλήνα και με  $a$  η ακτίνα μετά την αναστροφή.

Στο πρόβλημα της αναστροφής δεν παρατηρείται καμία παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$  του σωλήνα. Αυτό έχει σαν συνέπεια, το «τέντωμα»  $\lambda_z = \lambda = 1$ . Αντίθετα, κατά τη διεύθυνση της περιμέτρου η παραμόρφωση είναι ίση με  $\lambda_\theta = q = a/R$ . Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι ο σωλήνας είναι ασυμπίεστος και επομένως το «τέντωμα» στη διεύθυνση της ακτίνας υπολογίζεται ίσο με  $\lambda_r = 1/q$ .

## 5.27 Απεικόνιση του στρώματος adventitia χωρίς αρχικές τάσεις (stress-free state) σύμφωνα με τη θεωρία του Takamizawa

Ο Takamizawa (2009) αναφέρει σε δημοσίευση του το πρόβλημα της κατανομής των τάσεων και των παραμορφώσεων στις τρεις διαστάσεις του «μοντέλου» μιας στεφανιαίας αρτηρίας που αποτελείται από δύο στρώματα. Μία αρτηρία λοιπόν, αποτελείται από δύο στρώματα που αποκαλούνται media-intima και adventitia. Το εσωτερικό στρώμα (media) παρουσιάζει μεγαλύτερη ακαμψία συγκριτικά με το εξωτερικό (adventitia). Μία αρτηρία που βρίσκεται σε συνθήκες μη φόρτισης εμφανίζει παραμένουσες τάσεις. Το γεγονός αυτό παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανομή των τάσεων στα τοιχώματα της αρτηρίας υπό φυσιολογικές συνθήκες. Έτσι λοιπόν, για την απεικόνιση των στρωμάτων της αρτηρίας χωρίς την επιβολή τάσεων στο υλικό προτείνεται ο καθορισμός της τιμής μιας ανοικτής γωνίας, το εμβαδόν μιας κάθετης διατομής του αγγειακού τοιχώματος και ένα μήκος περιμέτρου. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται η κάθετη διατομή του αγγειακού τοιχώματος για το στρώμα adventitia όταν δεν υπάρχουν αρχικές τάσεις (stress-free state).



**Σχήμα 5.27.1** Σχήμα που απεικονίζει, στα αριστερά, την κάθετη διατομή του αγγειακού τοιχώματος για το στρώμα adventitia όταν δεν υπάρχουν αρχικές τάσεις (stress-free state). Με  $R_i$  και  $R_e$  συμβολίζονται η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του στρώματος. Με  $\Theta_A$  η γωνία του κέντρου και με  $\Phi_A$  μία ανοικτή γωνία. Στα δεξιά της εικόνας παριστάνεται η κατάσταση του στρώματος του σωλήνα σε συνθήκες φόρτισης (loaded state).

Από τη δημοσίευση του Takamizawa (2009) το «τέντωμα» στη διεύθυνση της ακτίνας και της περιμέτρου προσδιορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda_r = \frac{dr}{dR} \quad (5.101)$$

$$\lambda_\theta = \frac{2\pi r}{\Theta_A R} \quad (5.102)$$

Τα αποτελέσματα εξαιτίας του ασυμπίεστου υλικού οδηγούν σε μία σχέση μεταξύ του R και r:

$$R^2 = R_e^2 - \frac{2\pi\lambda_z(r_e^2 - r^2)}{\Theta_A} \quad (5.103)$$

Όπου η γωνία στο κέντρο της αρτηρίας για το στρώμα adventitia όταν δεν επιβάλλονται αρχικές τάσεις σε αυτή εκφράζεται από μία ανοικτή γωνία  $\Phi_A$ :

$$\frac{\Theta_A}{2} = \pi - \Phi_A \quad (5.104)$$

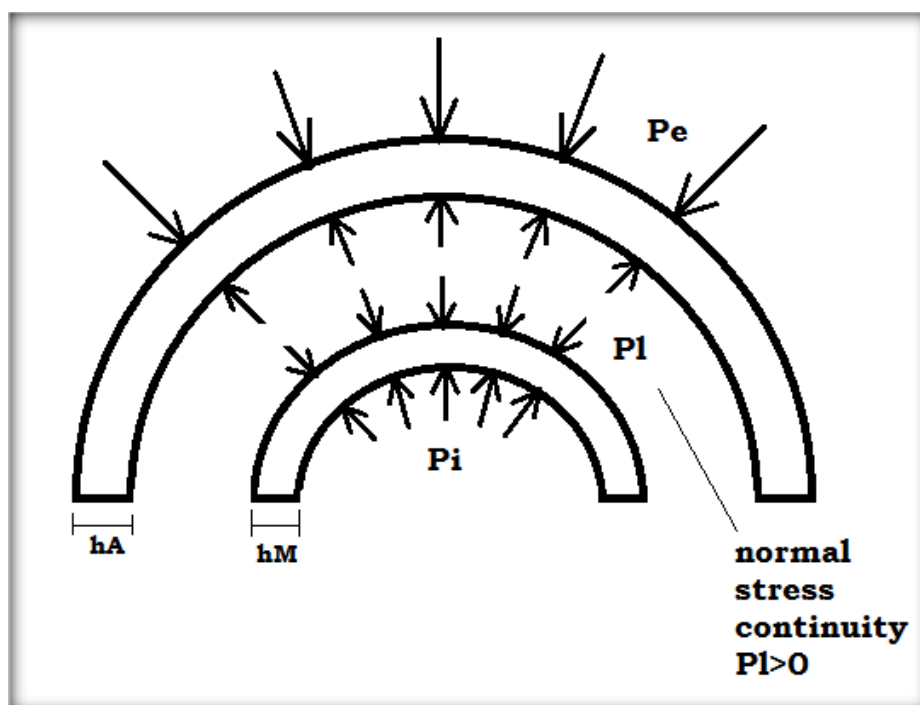
Οι υγιής αρτηρίες λοιπόν, έχουν αρχικές παραμένουσες τάσεις σε συνθήκες ελεύθερης φόρτισης. Αυτό συμβαίνει εκ κατασκευής. Το «σώμα» της αρτηρίας αποτελείται από δύο ανομοιογενή υλικά, τα οποία αναπτύσσονται με διαφορετικό τρόπο. Επομένως, εμφανίζονται περιφερειακές αρχικές τάσεις q και αρχικές τάσεις λ κατά τον άξονα του σωλήνα, που οφείλονται κυρίως στην επιμήκυνση του ανθρώπου λόγω ανάπτυξης. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσονται διαξονικές αρχικές παραμορφώσεις που δεν είναι ίσες μεταξύ τους.

Σε επόμενα κεφάλαια αναπτύχθηκαν αναλυτικές μέθοδοι όπου υπολογίζονται όλες αυτές οι παραμένουσες τάσεις σε δύο καταστάσεις της αρτηρίας, ελεύθερης φόρτισης (load-free) και φόρτισης (loaded state). Έτσι λοιπόν, διαπιστώνουμε ότι οι αρτηρίες είναι προεντεταμένες σε αυτές τις περιπτώσεις. Η επίλυση για τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης είναι σχεδόν αναλυτική, ενώ για πρώτη φορά ενσωματώνεται το πρόβλημα της αναστροφής. Επομένως, υπάρχουν δυνατότητες για γεωμετρικές αλλαγές καθώς και αλλαγές σε παραμέτρους των υλικών. Αυτό δε μπορεί να συμβεί εύκολα με αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων καθώς είναι μέθοδοι πιο λεπτομερής, που δε μπορούν να επιλύσουν το φαινόμενο της αναστροφής του τοιχώματος της αρτηρίας.

**Σημείωση:** Εφόσον τα υλικά είναι υπέρ-ελαστικά δεν παίζει ρόλο ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση από την ελεύθερη φόρτιση στη φορτισμένη.

## 5.28 Πίεση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας (media-intima και adventitia)

**Μ**ία αρτηρία μπορεί να επιλυθεί σαν ένας κυλινδρικός σωλήνας. Σε συνθήκες φόρτισης του σωλήνα μπορεί να ασκείται πίεση  $P_i$  στο εσωτερικό τοίχωμα καθώς και πίεση  $P_e$  εξωτερικά του κυλινδρικού δοχείου. Εκτός από τις πιέσεις που μόλις αναφέραμε εμφανίζεται και μία ακόμη πίεση στη διεπιφάνεια. Η πίεση αυτή ονομάζεται πίεση επαφής στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας (media-intima, adventitia) και συμβολίζεται με  $P_l$  (layer). Η πίεση  $P_l$  λαμβάνει θετικές τιμές και η ποιοτική κατανομή της απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 5.28.1** Σχηματική απεικόνιση των πιέσεων που ασκούνται στα δύο στρώματα μίας αρτηρίας (media-intima και adventitia). Το εσωτερικό στρώμα (media-intima) διαθέτει πάχος ίσο με  $h_M$  και οι πιέσεις που επιβάλλονται σε αυτό συμβολίζονται με  $P_i$  και  $P_l$ . Αντίστοιχα, το εξωτερικό στρώμα της αρτηρίας (adventitia) διαθέτει πάχος ίσο με  $h_A$  και οι πιέσεις που επιβάλλονται σε αυτό συμβολίζονται με  $P_e$  και  $P_l$ .

Το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας (media) έχει πάχος ίσο με  $h_M$ , ενώ το εξωτερικό στρώμα (adventitia) έχει πάχος ίσο με  $h_A$ . Τα πάχη των στρωμάτων μπορούμε να τα υπολογίσουμε εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις.

$$h_A = \lambda_r^{(A)} H_A \quad (5.105)$$



$$h_M = \lambda_r^{(M)} H_M \quad (5.106)$$

Όπου με  $H_A$  και  $H_M$  συμβολίζονται τα αρχικά πάχη των στρωμάτων της αρτηρίας στην απαραμόρφωτη κατάσταση ή στην περίπτωση που οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές. Εάν εξετάσουμε την ισορροπία κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$  του κυλινδρικού σωλήνα θα προκύψει η σχέση:

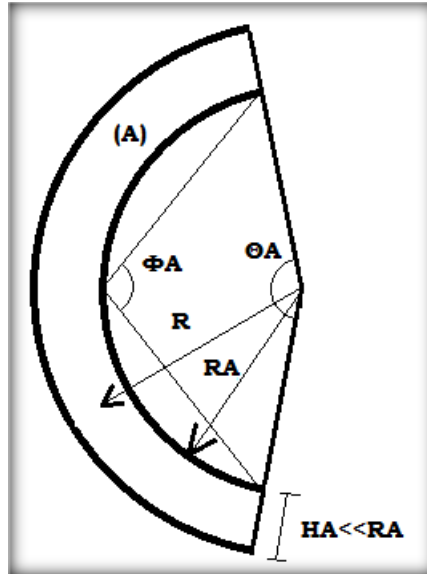
$$F_z = -\pi\alpha^2 (P_i - P_e) + 2\pi\alpha (\sigma_{zz}^{(A)} h_A + \sigma_{zz}^{(M)} h_M) \quad (5.107)$$

Στην περίπτωση που οι πιέσεις  $P_i$ ,  $P_e$  και η αξονική δύναμη  $F_z$  είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή δεν επιβάλλεται κανενός είδους φόρτιση στο προσομοίωμα της αρτηρίας, εμφανίζονται τάσεις εσωτερικά που ονομάζονται παραμένουσες τάσεις.

**Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που το εσωτερικό της αρτηρίας φορτίζεται με πίεση δε λάβαμε υπόψη τη διάτμηση της ροής στα τοιχώματα του υλικού.**

## 5.29 Διαδικασία υπολογισμού της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία

Οι αρτηρίες περιγράφονται από ελαστομερή συμπεριφορά και από την περιοχή της μηχανικής που ονομάζεται υπέρ-ελαστικότητα. Μία αρτηρία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα ελαστομερές, ασυμπίεστο και ανισότροπο υλικό. Με τον όρο «ελαστομερές» εννοούμε ότι εάν επιβάλλουμε μεγάλες παραμορφώσεις στο υλικό, αυτό σε περίπτωση που το αποφορτίσουμε μπορεί να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Με τον όρο «ασυμπίεστο» εννοούμε ότι μπορεί να διατηρεί τον αρχικό του όγκο σε συνθήκες παραμόρφωσης και με τον όρο «ανισότροπο» εννοούμε ότι οι μηχανικές ιδιότητες του «σώματος» διαφέρουν σε κάθε σημείο της μάζας του. Οι υγιής αρτηρίες έχουν την ικανότητα να αποθηκεύουν το 1/3 του αίματος και αποτελούνται από δύο στρώματα που ονομάζονται media-intima και adventitia, αντίστοιχα. Τα δύο αυτά στρώματα που αποτελούν την αρτηρία χαρακτηρίζονται από διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Εξαιτίας αυτού οι αρτηρίες δεν ανήκουν στην κατηγορία των ομογενών και ισότροπων υλικών. **Τα στρώματα media-intima και adventitia έχουν διαφορετικό σχήμα όταν είναι ελεύθερα τάσεων και αυτό έχει σαν συνέπεια το σύνολό τους που αποτελεί την αρτηρία να έχει παραμένουσες τάσεις.** Στη συγκεκριμένη περίπτωση η κατάσταση ελεύθερης φόρτισης (load-free) και ελεύθερης τάσης (stress-free) είναι δύο διαφορετικές έννοιες. Η συμπεριφορά αυτή της αρτηρίας ομοιάζει με το προεντεταμένο μπετόν. Στο υλικό δεν επιβάλλονται εξωτερικές ή εσωτερικές πιέσεις ούτε κάποιο «τέντωμα» αλλά εμφανίζονται παραμένουσες τάσεις. Για να επιλύσω την κατάσταση ελεύθερης τάσης διαχωρίζουμε τα δύο στρώματα media-intima και adventitia κάνοντας τομή στο καθένα από αυτά. Στη συνέχεια, για να επιλύσουμε τις καταστάσεις ελεύθερης φόρτισης (load-free) και φόρτισης (loaded state) αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της αρτηρίας σαν ένα «σώμα» συνολικά. Απώτερος στόχος είναι να υπολογίσουμε τις παραμένουσες τάσεις μέσω του πειράματος διείδυσης. Έτσι, λοιπόν πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά την κατάσταση που δεν επιβάλλεται τάση (stress-free) στο υλικό και στη συνέχεια υπό συνθήκες μη φόρτισης (load-free). Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται το εξωτερικό στρώμα μίας αρτηρίας (adventitia) σε συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state).



**Σχήμα 5.29.1** Εξωτερικό στρώμα αρτηρίας (adventitia) υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state). Η διατομή της αρτηρίας είναι λεπτό-τοιχη ( $H_A \ll R_A$ ). Με  $R_A$  συμβολίζεται η εσωτερική ακτίνα του στρώματος, με  $H_A$  το πάχος του στρώματος, με  $\Theta_A$  η κεντρική γωνία και με  $\Phi_A$  μία ανοικτή γωνία.

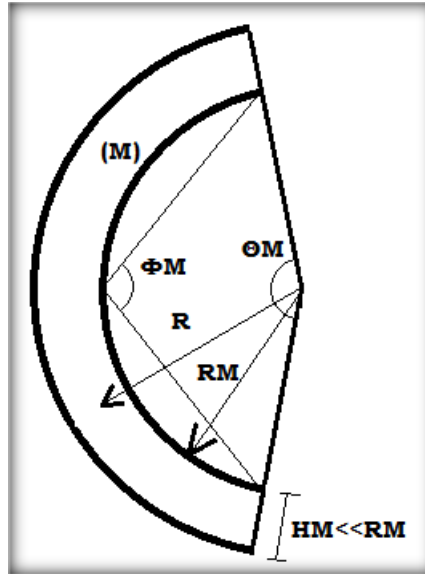
Στο εξωτερικό στρώμα της αρτηρίας (adventitia) η γωνία του κέντρου  $\Theta_A$  εκφράζεται από μία ανοικτή γωνία  $\Phi_A$ , σύμφωνα με τη δημοσίευση του Takamizawa (2009).

$$\frac{\Theta_A}{2} = \pi - \Phi_A \quad (5.108)$$

Η ακτινική παραμόρφωση του στρώματος adventitia της αρτηρίας σύμφωνα με τον Chadwick (1972) εκφράζεται από τη σχέση:

$$r = \left\{ (R^2 - R_A^2) \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.109)$$

Τα μεγέθη  $R_A$ ,  $\Theta_A$  και  $H_A$  θεωρούνται γνωστά. Στη συνέχεια, απεικονίζεται το εσωτερικό στρώμα μίας αρτηρίας (media) υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state).



**Σχήμα 5.29.2** Εσωτερικό στρώμα αρτηρίας (media) υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state). Η διατομή της αρτηρίας είναι λεπτό-τοιχη ( $H_M \ll R_M$ ). Με  $R_M$  συμβολίζεται η εσωτερική ακτίνα του στρώματος, με  $H_M$  το πάχος του στρώματος, με  $\Theta_M$  η κεντρική γωνία και με  $\Phi_M$  μία ανοικτή γωνία.

Στο εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας (media) η γωνία του κέντρου  $\Theta_M$  (stress-free) εκφράζεται από μία ανοικτή γωνία  $\Phi_M$ , η οποία είναι μεγαλύτερη από  $\pi$  ακτίνα (rad).

$$\frac{\Theta_M}{2} = \pi - \Phi_M \quad (5.110)$$

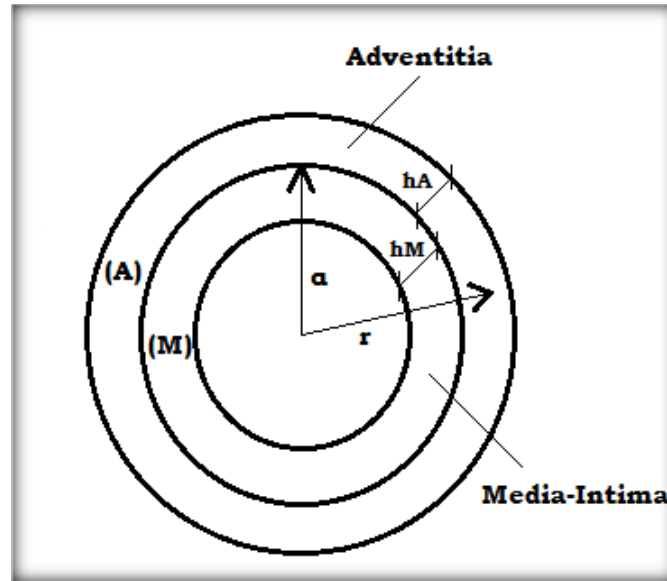
Η ακτινική παραμόρφωση του στρώματος media της αρτηρίας σύμφωνα με τον Chadwick (1972) εκφράζεται από τη σχέση:

$$r = \left\{ \left( R^2 - R_M^2 \right) \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} + (\alpha - h_M)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.111)$$

Τα μεγέθη  $R_M$ ,  $\Theta_M$  και  $H_M$  θεωρούνται γνωστά

### 5.29.1 Αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (load-free state)

Στην κατάσταση ελεύθερης φόρτισης σε μία αρτηρία (load-free state) εμφανίζονται παραμορφώσεις, επειδή υπάρχουν στο «σώμα» παραμένουσες τάσεις.



**Σχήμα 5.29.1.1** Αρτηρία αποτελούμενη από δύο στρώματα (media-intima και adventitia). Με  $a$  συμβολίζεται η ακτίνα της αρτηρίας στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων. Το «σώμα» βρίσκεται υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (load-free state).

Η ακτίνα των στρωμάτων της αρτηρίας στην αρχική κατάσταση (reference configuration) συμβολίζονται ως εξής:

$$R = R_A (adventitia)$$

$$R = R_M (media)$$

Η ακτίνα των στρωμάτων της αρτηρίας στην τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) συμβολίζονται ως εξής:

$$r = a (adventitia)$$

$$r = a - h_m (media)$$

Το πάχος των δύο στρωμάτων από τη αρχική κατάσταση στην τρέχουσα εκφράζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$h_M = \lambda_r^{(M)} H_M = \left( q^{(M)} \lambda \right)^{-1} H_M \quad (5.112)$$

$$h_A = \lambda_r^{(A)} H_A = \left( q^{(A)} \lambda \right)^{-1} H_A \quad (5.113)$$

Από την εξίσωση ισορροπίας κατά την αξονική διεύθυνση  $z$  της αρτηρίας, όταν δεν επιβάλλονται πιέσεις και εξωτερικά φορτία στο υλικό, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$2\pi \left( \sigma_{zz}^{(A)} h_A + \sigma_{zz}^{(M)} h_M \right) \approx 0$$

$$\sigma_{zz}^{(A)} h_A + \sigma_{zz}^{(M)} h_M = 0$$

$$\boxed{\sigma_{zz}^{(A)} \left( q^{(A)} \right)^{-1} H_A + \sigma_{zz}^{(M)} \left( q^{(M)} \right)^{-1} H_M = 0} \quad (5.114)$$

Η ανωτέρω ισότητα αναφέρεται στην παραμορφωμένη κατάσταση του υλικού (deformed configuration).

Στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων αναπτύσσεται τάση  $P_l$ , που περιγράφηκε αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η ακτινική τάση στη διεπιφάνεια ( $r=a$ ) των στρωμάτων media και adventitia ισούται με:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(r=a) = -P_l \quad (5.115)$$

$$\sigma_{rr}^{(M)}(r=a) = -P_l \quad (5.116)$$

$$\sigma_{rr}^{(A)}(r=a) = \sigma_{rr}^{(M)}(r=a)$$

**Επομένως, το διάγραμμα της ακτινικής τάσης στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας δεν παρουσιάζει άλμα, αλλά είναι συνεχές!**

Εξαιτίας της ελεύθερης φόρτισης (load-free state) της αρτηρίας στην παραμορφωμένη κατάσταση (deformed configuration), οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(r=a+h_A) = 0$$

$$\sigma_{rr}^{(M)}(r=a-h_M) = 0$$

Οι άγνωστες ποσότητες του προβλήματος που περιγράφουν τις παραμένουσες τάσεις στο υλικό είναι το «τέντωμα» της περιμέτρου  $q^{(A)}$  και  $q^{(M)}$  στα δύο στρώματα της αρτηρίας, το «τέντωμα» στην αξονική διεύθυνση  $\lambda$  που είναι κοινό και για τα δύο στρώματα, η ακτίνα  $a$  στη διεπιφάνεια που είναι κοινή και η πίεση στη διεπιφάνεια  $P_l$ .

**Το «μοντέλο» της αρτηρίας είναι ένα πρόβλημα αξονοσυμμετρικού κυλινδρικού σωλήνα.** Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο υλικό δεν επιβάλλονται μαζικές δυνάμεις. Η εξίσωση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση  $r$  ορίζεται παρακάτω.

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (5.117)$$

Προσεγγιστικά λοιπόν, ισχύει ότι:

$$|\sigma_{rr}| \approx |\sigma_{\theta\theta}|$$

Η ορθή τάση που αναπτύσσεται στην περίμετρο του σωλήνα  $\sigma_{\theta\theta}$  είναι προσεγγιστικά σταθερή. Επομένως, η εξίσωση ισορροπίας μετασχηματίζεται όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} \approx \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}$$

Σε αυτό το σημείο θα ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση για το στρώμα adventitia (load-free configuration) και θα προκύψει ότι:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(\alpha) \approx \sigma_{rr}^{(A)}(r = \alpha + h_A) + \int_{\alpha+h_A}^{\alpha} \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \frac{dr}{r}$$

$$\sigma_{rr}^{(A)}(\alpha) \approx \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \ln \frac{\alpha}{\alpha + h_A} = \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \ln \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha + h_A)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση του Chadwick για την ακτινική παραμόρφωση η ποσότητα μέσα στο λογάριθμο μπορεί να γραφεί:

$$(\alpha + h_A)^2 = \left( (R_A + H_A)^2 - R_A^2 \right) \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} + \alpha^2$$

Επειδή το τοίχωμα της αρτηρίας μπορεί να θεωρηθεί λεπτό συγκριτικά με την ακτίνα, η ανωτέρω ισότητα μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$(\alpha + h_A)^2 \approx 2R_A H_A \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} + \alpha^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(\alpha) \approx \left( -\frac{1}{2} \right) \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \ln \frac{2H_A R_A \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} + \alpha^2}{\alpha^2}$$

Το πρόσημο της σχέσης γίνεται αρνητικό εξαιτίας της αντιστροφής του λογαρίθμου. Εάν εφαρμόσουμε την ιδιότητα:

$$\ln(1+x) \approx x, (|x| \ll 1)$$

Προκύπτει τελικά ότι:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(\alpha) \approx \left( -\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(A)}}{2} \right) \left( \frac{2H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \right)$$

$$\sigma_{rr}^{(A)}(\alpha) = -\sigma_{\theta\theta}^{(A)} \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} = -P_l$$

Επιλύοντας ως προς την πίεση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια των δύο στρωμάτων:

$$P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \quad (5.118)$$

**Αν λοιπόν, η πίεση στη διεπιφάνεια  $P_l$  είναι θετική ποσότητα τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η περιμετρική ορθή τάση που αναπτύσσεται στο τοίχωμα της αρτηρίας  $\sigma_{\theta\theta}$  είναι θετική. Επομένως, το εξωτερικό στρώμα της αρτηρίας (adventitia) εφελκύεται.** Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας που αποκαλείται media (load-free configuration).

$$\sigma_{rr}^{(M)}(\alpha) \approx \sigma_{rr}^{(M)}(r = \alpha - h_M) + \int_{\alpha - h_M}^{\alpha} \sigma_{\theta\theta}^{(M)} \frac{dr}{r}$$

$$\sigma_{rr}^{(M)}(\alpha) = \sigma_{\theta\theta}^{(M)} \ln \frac{\alpha}{\alpha - h_M} = \sigma_{\theta\theta}^{(M)} \ln \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha - h_M)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(\alpha - h_M)^2 = \left( (R_M + H_M)^2 - R_M^2 \right) \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} + (\alpha - h_M)^2$$

Επειδή το τοίχωμα της αρτηρίας μπορεί να θεωρηθεί λεπτό συγκριτικά με την ακτίνα, η ανωτέρω ισότητα μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$(\alpha - h_M)^2 \approx 2R_M H_M \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} + \alpha^2$$



$$\sigma_{rr}^{(M)}(\alpha) \approx \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta}^{(M)} \ln \frac{2H_M R_M \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} + \alpha^2}{\alpha^2}$$

$$\sigma_{rr}^{(M)}(\alpha) = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{(M)}}{2} \frac{2H_M R_M \lambda^{-1} \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1}}{\alpha^2} = -P_l$$

$$\boxed{-P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(M)}} \quad (5.119)$$

**Αν λοιπόν, η πίεση στη διεπιφάνεια  $P_l$  είναι θετική ποσότητα τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η περιμετρική ορθή τάση που αναπτύσσεται στο τοίχωμα της αρτηρίας  $\sigma_{\theta\theta}$  είναι αρνητική. Επομένως, το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας (media) θλίβεται.**

Σε όλες τις σχέσεις που προαναφέρθηκαν η γωνία του κέντρου  $\Theta_A$  και  $\Theta_M$  για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα, είναι σε ακτίνια. Σε περίπτωση που οι γωνίες  $\Theta_A$  και  $\Theta_M$  είναι σε μοίρες τότε οι ανωτέρω σχέσεις θα πρέπει να μετασχηματιστούν και αντί για ακτίνια  $2\pi$  θα πρέπει να αντικαταστήσουμε με  $360^\circ$ . Επιπρόσθετα, όλες οι τάσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημα πρέπει να έχουν μονάδα μέτρησης [kPa] και τα μήκη [mm].

Σύμφωνα με τον Takamizawa (2009), το «τέντωμα» της περιμέτρου της αρτηρίας  $\lambda_\theta$  για τα στρώματα adventitia και media δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\boxed{q^{(A)} = \frac{2\pi}{\Theta_A} \frac{\alpha}{R_A}} \quad (5.120)$$

$$\boxed{q^{(M)} = \frac{2\pi}{\Theta_M} \frac{\alpha}{R_M}} \quad (5.121)$$

**Από τις καταστατικές εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(A)}$  και  $\sigma_{zz}^{(M)}$ , σαν συνάρτηση των «τεντωμάτων»  $\lambda$ ,  $q^{(A)}$  και  $q^{(M)}$ . Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις άγνωστες ποσότητες. Έτσι, αθροίζουμε τις σχέσεις (5.118) και (5.119) και προκύπτει η ακόλουθη ισότητα:**

$$\boxed{\left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} H_A R_A \sigma_{\theta\theta}^{(A)} + \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} H_M R_M \sigma_{\theta\theta}^{(M)} = 0} \quad (5.122)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.114) ισχύει ότι:

$$\boxed{\sigma_{zz}^{(A)} \left( q^{(A)} \right)^{-1} H_A + \sigma_{zz}^{(M)} \left( q^{(M)} \right)^{-1} H_M = 0} \quad (5.114)$$

Εάν λοιπόν αθροίσουμε τις εξισώσεις (1) και (6) και χρησιμοποιήσουμε τις (4) και (5) θα καταφέρουμε τελικά να υπολογίσουμε τα άγνωστα μεγέθη  $q^{(A)}$ ,  $q^{(M)}$ ,  $\alpha$  και  $\lambda$ . **Όμως, οι εξισώσεις που αναγράφονται παραπάνω είναι έντονα μη γραμμικές εξαιτίας του μεγέθους  $\sigma_{\theta\theta}$ .** Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία για να βρούμε τελικά τις άγνωστες ποσότητες. Αναφερόμενοι στο συγκεκριμένο πρόβλημα, γνωρίζουμε ότι από φυσικής πλευράς πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$0 < \alpha \leq \max \{R_A, R_M\}$$

$$0 < \lambda \leq 2$$

Για την επίλυση του προβλήματος, επιλέγουμε αρχικά μία τιμή για το «τέντωμα»  $\lambda$  (π.χ.  $\lambda=2$ ) και  $\alpha=\max\{R_A, R_M\}$  μειώνοντας την τιμή του  $\alpha$  με βήμα  $1/10$  μέχρι να καταλήξουμε στην επιθυμητή λύση. Για κάθε τιμή του  $\alpha$  που προκύπτει υπολογίζουμε, από τις εξισώσεις (4) και (5), το «τέντωμα»  $q^{(A)}$ ,  $q^{(M)}$ . Στη συνέχεια, υπολογίζουμε αριθμητικά τις σχέσεις (5.114) και (5.122) ως εξής:

$$q^{(M)} H_A \sigma_{zz}^{(A)} + q^{(A)} H_M \sigma_{zz}^{(M)} = \text{Re } s1$$

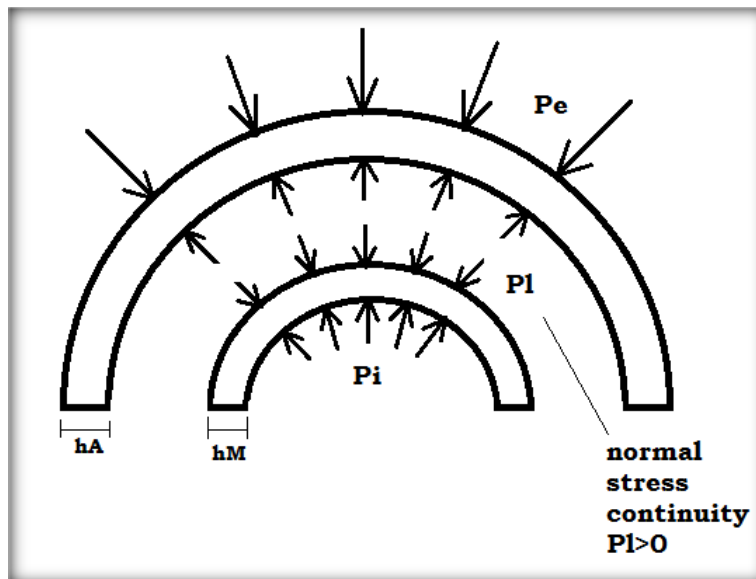
$$\left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} H_A R_A \sigma_{\theta\theta}^{(A)} + \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} H_M R_M \sigma_{\theta\theta}^{(M)} = \text{Re } s2$$

Η πραγματική λύση προκύπτει όταν το άθροισμα των ανωτέρω σφαλμάτων υψωμένα στο τετράγωνο γίνει το ελάχιστο δυνατό!

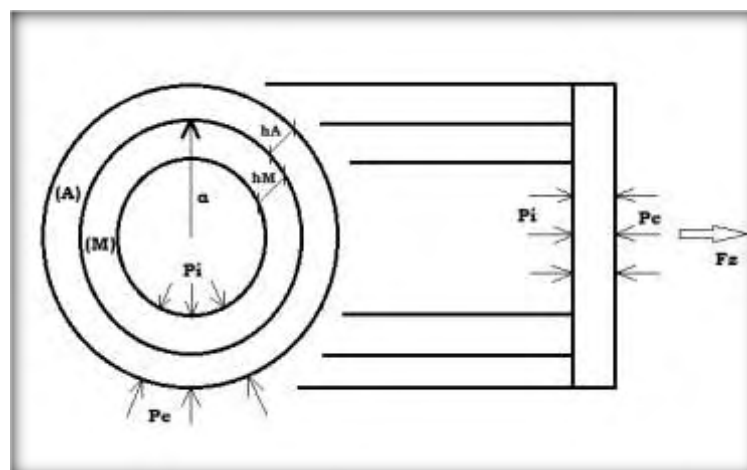
$$(\text{Re } s1)^2 + (\text{Re } s2)^2 \Rightarrow \text{minimum}$$

## 5.29.2 Αρτηρία υπό συνθήκες φόρτισης (loaded state)

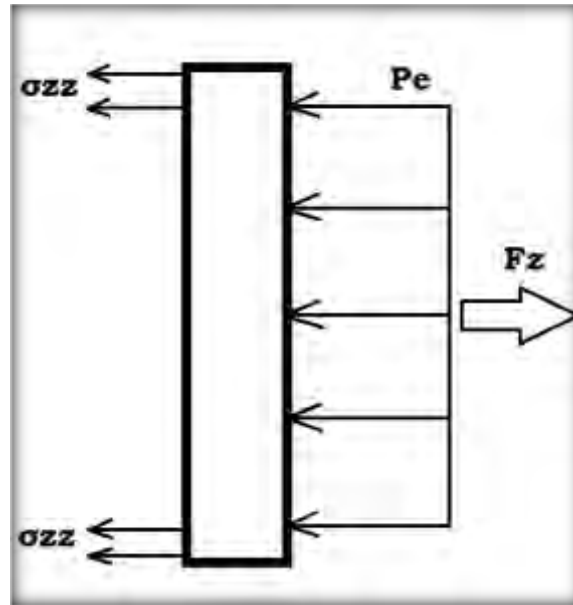
Σε αντίθεση με την προηγούμενη ενότητα, η αρτηρία μπορεί να βρίσκεται υπό συνθήκες φόρτισης (loaded state). Σε αυτή την περίπτωση, στα τοιχώματα του κυλινδρικού σωλήνα ασκούνται πιέσεις εσωτερικά και εξωτερικά. Ο σωλήνας μπορεί να υποβάλλεται και σε ελκυσμό κατά την αξονική του διεύθυνση, όταν στα άκρα του ασκείται συγκεντρωμένη εξωτερική δύναμη.



**Σχήμα 5.29.2.1** Ποιοτική κατανομή των πιέσεων που ασκούνται στα τοιχώματα των δύο στρώματων της αρτηρίας.



**Σχήμα 5.29.2.2** Στα αριστερά της εικόνας μπορούμε να διακρίνουμε τη διατομή μιας αρτηρίας που αποτελείται από δύο στρώματα και δέχεται πιέσεις εσωτερικά και εξωτερικά (loaded state). Στα δεξιά του σχήματος απεικονίζεται η τομή κατά τον άξονα  $z$  ενός κλειστού σωλήνα. Στο άκρο του κλειστού σωλήνα επιβάλλονται πιέσεις και μία αξονική δύναμη.



**Σχήμα 5.29.2.3** Διάγραμμα ελευθέρου «σώματος» στο άκρο του κυλινδρικού σωλήνα κατά τη διεύθυνση  $z$ .

Η πίεση που επιβάλλεται εσωτερικά της αρτηρίας συμβολίζεται με  $P_i$  (internal pressure). Η πίεση που επιβάλλεται στο εξωτερικό τοίχωμα συμβολίζεται με  $P_e$  (external pressure) και η πίεση στη διεπιφάνεια των στρωμάτων media και adventitia με  $P_l$  (layer pressure). Για τις πιέσεις που μόλις αναφέραμε ισχύει η ανισότητα:

$$P_i \geq P_l \geq P_e$$

Στο «σώμα» μπορεί να επιβάλλεται και αξονικό φορτίο  $F_z$  που θεωρούμε ότι είναι θετικό.

$$F_z \geq 0$$

Οι νέες συνοριακές συνθήκες εξαιτίας της επιβαλλόμενης πίεσης στην αρτηρία ορίζονται ως εξής:

$$\sigma_{rr}^{(A)}(r = a + h_A) = -P_e$$

$$\sigma_{rr}^{(M)}(r = a - h_M) = -P_i$$

Η τοπική ισορροπία στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του σωλήνα περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$-P_e + P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(A)} \quad (5.123)$$

$$\boxed{-P_l + P_i = \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(M)}} \quad (5.124)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.123) και (5.124) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\boxed{\lambda(P_e - P_i) + \left(\frac{2\pi}{\Theta_A}\right)^{-1} \frac{H_A R_A}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(A)} + \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M}{\alpha^2} \sigma_{\theta\theta}^{(M)} = 0} \quad (5.125)$$

Από την αξονική ισορροπία του σωλήνα κάνοντας διάγραμμα ελευθέρου σώματος προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$F_z + \pi\alpha^2(P_i - P_e) = 2\pi\alpha\left(\sigma_{zz}^{(A)}h_A + \sigma_{zz}^{(M)}h_M\right)$$

$$-F_z - \pi\alpha^2(P_i - P_e) + 2\pi\alpha\left(\sigma_{zz}^{(A)}\left(q^{(A)}\lambda\right)^{-1}H_A + \sigma_{zz}^{(M)}\left(q^{(M)}\lambda\right)^{-1}H_M\right) = 0$$

$$\boxed{\sigma_{zz}^{(A)}q^{(M)}H_A + \sigma_{zz}^{(M)}q^{(A)}H_M - (F_z + \pi\alpha^2(P_i - P_e))\frac{\lambda q^{(A)}q^{(M)}}{2\pi\alpha} = 0} \quad (5.126)$$

Από τις εξισώσεις (5.125) και (5.126), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.120) και (5.121) μπορούμε να υπολογίσουμε και σε αυτή την περίπτωση τις άγνωστες ποσότητες  $\alpha$ ,  $\lambda$ . Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε περιγράφηκε αναλυτικά προηγουμένως. Σε περίπτωση αστάθειας του υλικού η διαδικασία εύρεσης της παραμένουσας τάσης μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερες τιμές από μία της ακτίνας  $\alpha$  στη διεπιφάνεια των δύο τοιχωμάτων media και adventitia.

### 5.30 Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε μία θωρακική αρτηρία λαγού (Rachev)

Ο Rachev (1997) μελέτησε το «μοντέλο» μιας θωρακικής αρτηρίας λαγού. Η προτεινόμενη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης για να περιγράψουμε το προσομοίωμα μιας αρτηρίας σύμφωνα με τους Chuong και Fung (1986) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2} \left\{ \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr}) - 1 \right\} \quad (5.127)$$

Με σταθερές του υλικού  $C=22.40$  kPa,  $b_1=1.0672$ ,  $b_2=0.4775$ ,  $b_3=0.0499$ ,  $b_4=0.0903$ ,  $b_5=0.0585$ ,  $b_6=0.0042$ . Οι σταθερές που μόλις αναφέραμε είναι ίδιες για τα δύο στρώματα, media και adventitia, που αποτελούν την αρτηρία. Επομένως, τα δύο στρώματα χαρακτηρίζονται από την ίδια καταστατική εξίσωση και το «σώμα» της αρτηρίας είναι ένα ομογενές ανισότροπο υλικό. Επιπρόσθετα, η αρτηρία υποβάλλεται σε ελκυσμό (stretch) κατά την αξονική διεύθυνση που ισούται με  $\lambda=1.6$ . Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τα στρώματα media-intima και adventitia στις περιπτώσεις που η πίεση εσωτερικά του τοιχώματος της αρτηρίας είναι φυσιολογική και ίση με  $P=13.33$  kPa καθώς και στην περίπτωση που λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή ίση με  $P=21.33$  kPa.

**Πίνακας 5.30.1** Στον πίνακα παραθέτουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στρωμάτων που αποτελούν μία αρτηρία (media-intima και adventitia). Με  $P$  παριστάνεται η πίεση που ασκείται στο εσωτερικό της αρτηρίας, με  $R_M$  και  $R_A$  οι εσωτερικές ακτίνες των στρωμάτων media και adventitia, με  $H_M$  και  $H_A$  τα πάχη των στρωμάτων, με  $\Phi_M$  και  $\Phi_A$  οι ανοιχτή γωνία και με  $\Theta_M$  και  $\Theta_A$  η γωνία του κέντρου υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης της αρτηρίας.

Layer	Pressure P (kPa)	Inner radius $R_M, R_A$ (mm)	Wall thickness $H_M, H_A$ (mm)	Opening Angle $\Phi_M, \Phi_A$ (degrees)	Center Angle $\Theta_M, \Theta_A$ (degrees)
Media-intima	13.33	3.92	0.30	108.6	142.8
	21.33	4.51	0.45	114.5	131.0
Adventitia	13.33	4.22	0.30	108.6	142.8
	21.33	5.07	0.55	116.0	128.0

**Πίνακας 5.30.2** Στον πίνακα απεικονίζεται η ακτίνα  $a$  στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας και το άθροισμα του τελικού πάχους των media και adventitia, σύμφωνα με πειραματικά αποτελέσματα που αναφέρει ο Rachev. Όταν η αρτηρία βρίσκεται σε συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (unloaded state) παρατηρούμε ότι η ακτίνα στη διεπιφάνεια για διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά παραμένει σταθερή χωρίς να μεταβάλλεται. Εάν επιβάλλεται πίεση εσωτερικά του τοιχώματος, φυσιολογική ή υπερπίεση, η ακτίνα στη διεπιφάνεια δείχνει να διαφέρει ελάχιστα. Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η επιβολή υπερπίεσης εσωτερικά της αρτηρίας δε μπορεί να αυξήσει σημαντικά την ακτίνα της. Επομένως, η αρτηρία δεν παρουσιάζει μεγάλο βαθμό διόγκωσης όταν αυξηθεί σημαντικά η πίεση στο εσωτερικό της, με την προϋπόθεση ότι είναι υγιής.

	Pressure P (kPa)	a (mm)	$h^{(A)} + h^{(M)}$ (mm)
Unloaded state	13.33	1.44	0.57
	21.33	1.44	0.95
Physiological state	13.33	2.33	0.26
	21.33	2.46	0.43

### **Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης**

Αρχικά λοιπόν, δίνεται το αξονικό «τέντωμα» της αρτηρίας  $\lambda=1.6$ . Αρκεί να υπολογίσουμε την ακτίνα  $a$  στη διεπιφάνεια, το «τέντωμα» της περιμέτρου  $q^{(A)}$  και  $q^{(M)}$ , την τάση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων  $P_1$  και τις κύριες τάσεις  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(M)}$  και  $\sigma_{zz}^{(A)}$ , για να περιγράψουμε τις παραμένουσες τάσεις που εμφανίζονται στο «σώμα» μιας αρτηρίας. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

- ❖ Το «τέντωμα»  $\lambda$  κατά την αξονική διεύθυνση θεωρείται γνωστό.
- ❖ Επιλέγουμε μία αρχική τιμή (συνήθως τη μέγιστη των  $R_A$  και  $R_M$ ) για την ακτίνα στη διεπιφάνεια  $a$  που πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < a \leq \max \{R_A, R_M\}$$

- ❖ Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» των δύο στρωμάτων της αρτηρίας στη διεύθυνση της περιμέτρου εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$q^{(A)} = \frac{2\pi}{\Theta_A} \frac{\alpha}{R_A} \quad (5.128)$$

$$q^{(M)} = \frac{2\pi}{\Theta_M} \frac{\alpha}{R_M} \quad (5.129)$$

- ❖ Ο καταστατικός νόμος για να προσομοιάσουμε μία αρτηρία δίνεται από τους Chuong και Fung (1986) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2} \left\{ \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr}) - 1 \right\}$$

- ❖ Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης της εσωτερικής ενέργειας  $W$  ως προς  $E_{\theta\theta}$  και  $E_{zz}$ .

$$\frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} = \frac{C}{2} (2b_1 E_{\theta\theta} + 2b_4 E_{zz} + 2b_6 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

$$\frac{\partial W}{\partial E_{zz}} = \frac{C}{2} (2b_2 E_{zz} + 2b_4 E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

- ❖ Για να υπολογίσουμε αριθμητικά τις ανωτέρω ποσότητες πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις Green εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_{rr}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda q^{(A,M)} \right)^{-2} - 1 \right]$$

$$E_{\theta\theta}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left( q^{(A,M)2} - 1 \right)$$

$$E_{zz} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

- ❖ Γνωρίζοντας την πίεση  $P^{(A,M)}$  που ασκείται στα τοιχώματα της αρτηρίας μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις για ισότροπα και ανισότροπα υλικά σύμφωνα με τις σχέσεις. Η υδροστατική πίεση δεν είναι ομοιόμορφη ούτε συνεχής στα δύο στρώματα της αρτηρίας και παρουσιάζει άλμα στη διεπιφάνεια των τοιχωμάτων. Σε κάθε στρώμα θα υπολογίσουμε τη μέση πίεση, όπως φαίνεται παρακάτω.



$$P^{(A)} = \frac{(P_i + P_e)}{2}$$

$$P^{(M)} = \frac{(P_i + P_l)}{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + q^{(A,M)2} \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}}$$

$$\sigma_{zz}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial E_{zz}}$$

❖ Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση:

$$\Theta_A H_A R_A (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) + \Theta_M H_M R_M (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) = 0 \quad (5.130)$$

Πρέπει το άθροισμα των επιμέρους ποσοτήτων να ισούται με μηδέν. Διαφορετικά, επιλέγουμε την επόμενη τιμή του  $a$  (ακτίνα στη διεπιφάνεια) μειωμένη κατά 1/10 έως ότου βρούμε την τιμή για την οποία το παραπάνω άθροισμα ισούται με μηδέν.

❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση στη διεπιφάνεια χρησιμοποιώντας τη μία από τις σχέσεις που ακολουθούν (η άλλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα):

$$P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) \quad (5.131)$$

$$-P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) \quad (5.132)$$

### **Υπολογισμός παραμένουσας τάσης σε αρτηρία υπό συνθήκες φόρτισης**

Στην περίπτωση που η αρτηρία βρίσκεται υπό συνθήκες φόρτισης, η διαδικασία για τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης συμπίπτει με αυτή που περιγράφηκε προηγουμένως με μικρές διαφορές.

- ❖ Το «τέντωμα»  $\lambda$  κατά την αξονική διεύθυνση θεωρείται γνωστό.
- ❖ Επιλέγουμε μία αρχική τιμή για την ακτίνα στη διεπιφάνεια  $a$  που πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < \alpha \leq \max \{R_A, R_M\}$$

- ❖ Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» των δύο στρωμάτων της αρτηρίας στη διεύθυνση της περιμέτρου εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$q^{(A)} = \frac{2\pi}{\Theta_A} \frac{\alpha}{R_A}$$

$$q^{(M)} = \frac{2\pi}{\Theta_M} \frac{\alpha}{R_M}$$

- ❖ Ο καταστατικός νόμος για να προσομοιάσουμε μία αρτηρία δίνεται από τους Chuong και Fung (1986) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2} \left\{ \exp \left( b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr} \right) - 1 \right\}$$

- ❖ Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης της εσωτερικής ενέργειας W ως προς  $E_{\theta\theta}$  και  $E_{zz}$ .

$$\frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} = \frac{C}{2} (2b_1 E_{\theta\theta} + 2b_4 E_{zz} + 2b_6 E_{rr}) \exp \left( b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial E_{zz}} = \frac{C}{2} (2b_2 E_{zz} + 2b_4 E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{rr}) \exp \left( b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr} \right)$$

- ❖ Για να υπολογίσουμε αριθμητικά τις ανωτέρω ποσότητες πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις Green εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_{rr}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda q^{(A,M)} \right)^{-2} - 1 \right]$$

$$E_{\theta\theta}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left( q^{(A,M)2} - 1 \right)$$

$$E_{zz} = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - 1 \right)$$

- ❖ Γνωρίζοντας την πίεση  $P^{(A,M)}$ , όπως περιγράψαμε αναλυτικά προηγουμένως, που ασκείται στα τοιχώματα της αρτηρίας

μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις για ισότροπα και ανισότροπα υλικά σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$P^{(A)} = \frac{(P_l + P_e)}{2}$$

$$P^{(M)} = \frac{(P_i + P_l)}{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + q^{(A,M)2} \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}}$$

$$\sigma_{zz}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial E_{zz}}$$

❖ Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση:

$$\lambda(P_e - P_i) + \left(\frac{2\pi}{\Theta_A}\right)^{-1} \frac{H_A R_A}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) + \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) = 0 \quad (5.133)$$

Πρέπει το άθροισμα των επιμέρους ποσοτήτων να ισούται με μηδέν. Διαφορετικά, επιλέγουμε την επόμενη τιμή του  $\alpha$  (ακτίνα στη διεπιφάνεια) μειωμένη κατά 1/10 έως ότου βρούμε την τιμή για την οποία το παραπάνω άθροισμα ισούται με μηδέν.

❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση στη διεπιφάνεια χρησιμοποιώντας τη μία από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$-P_e + P_l = \left(\frac{2\pi}{\Theta_A}\right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) \quad (5.134)$$

$$-P_l + P_i = \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) \quad (5.135)$$

Εάν λοιπόν, ακολουθήσουμε διαδοχικά τα παραπάνω βήματα μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμένουσα τάση σε οποιαδήποτε αρτηρία, με την προϋπόθεση ότι η γεωμετρία της είναι γνωστή καθώς και οι σταθερές που «μοντέλου» που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία θωρακική αρτηρία λαγού.

**Πίνακας 5.30.3** Στους πίνακες απεικονίζονται τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία θωρακική αρτηρία λαγού. Με  $\lambda$  συμβολίζεται το «τέντωμα» κατά την αξονική διεύθυνση, με  $P_i$  η εσωτερική πίεση της αρτηρίας, με  $a$  η ακτίνα στη διεπιφάνεια, με  $q^{(A)}$ ,  $q^{(M)}$  το «τέντωμα» στη διεύθυνση της περιμέτρου για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα, με  $P_i$  η πίεση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων, με  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$  και  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$  η ορθή τάση στη διεύθυνση  $\theta$ , με  $\sigma_{zz}^{(A)}$  και  $\sigma_{zz}^{(M)}$  η ορθή τάση στην αξονική διεύθυνση, με  $\lambda_r^{(A)}$ ,  $\lambda_r^{(M)}$  το «τέντωμα» κατά την ακτινική διεύθυνση, με  $H^{(A)}$ ,  $H^{(M)}$  το αρχικό πάχος (reference configuration) των δύο στρωμάτων που αποτελούν το «σώμα» της αρτηρίας και με  $h^{(A)}$ ,  $h^{(M)}$  το τελικό πάχος (spatial configuration) μετά την παραμόρφωση. Αν παρατηρήσουμε τις τιμές του πίνακα που αφορούν το «τέντωμα» στη διεύθυνση της περιμέτρου της αρτηρίας θα δούμε ότι η μεταβολή του μεγέθους είναι αμελητέα σε συνθήκες φυσιολογικής πίεσης και υπερπίεσης. Αυτό συμβαίνει πάντα με την προϋπόθεση ότι η αρτηρία είναι υγιής. Έτσι λοιπόν, η παραμόρφωση στη διεύθυνση της περιμέτρου δε μεταβάλλεται με την αύξηση του φορτίου. **Επομένως, οι αρτηρίες δε μπορούν να διογκωθούν σε μεγάλο βαθμό!** Αντίθετα, εάν αλλάξουμε τον καταστατικό νόμο, δηλαδή εάν μεταβάλλουμε με κάποιο τρόπο τις ιδιότητες του υλικού (για παράδειγμα εμφάνιση ανευρύσματος) η αρτηρία μπορεί να διογκωθεί και να φτάσει έως τη θραύση! Ο καταστατικός νόμος του Fung, με τον οποίο προσομοιώθηκε η αρτηρία, δείχνει να παρουσιάζει κράτυνση καθώς φορτίζεται το «σώμα», δηλαδή η αρτηρία δε διογκώνεται αναλογικά με το επιβαλλόμενο φορτίο. **Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για μη γραμμικό ελαστικό πρόβλημα!** Όσον αφορά τις τάσεις, το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας, media, δέχεται μεγαλύτερη πίεση συγκριτικά με το εξωτερικό, adventitia, σύμφωνα με τον πίνακα.

$\lambda=1.6$	$P_i$ (kPa)	$a$ (mm)	$q^{(A)}$	$q^{(M)}$	$\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$	$\sigma_{zz}^{(A)}$	$\sigma_{zz}^{(M)}$
<b>Load-free state</b>	13.33	1.5010	0.8967	0.9653	-0.7704	0.9510	26.1629	26.3895
	21.33	1.6050	0.8903	0.9779	-0.8419	1.3986	26.2144	26.5229
<b>Loaded state</b>	13.33	2.5690	1.5347	1.6522	94.8832	187.822 2	52.2833	70.2174

	21.33	2.7470	1.5239	1.6738	87.5349	211.251 1	49.2630	71.3811
--	-------	--------	--------	--------	---------	--------------	---------	---------

$\lambda=1.6$	$P_1$ (kPa)	$\lambda r^{(A)}$	$\lambda r^{(M)}$	$H^{(A)}$ (mm)	$H^{(M)}$ (mm)	$h^{(A)}$ (mm)	$h^{(M)}$ (mm)	$h^{(A)} + h^{(M)}$ (mm)
Load-free state	-0.1155	0.6970	0.6475	0.30	0.30	0.2091	0.1943	0.4034
	-0.2301	0.7019	0.6391	0.55	0.45	0.3860	0.2876	0.6736
Loaded state	4.6291	0.4072	0.3783	0.30	0.30	0.1222	0.1135	0.2357
	7.5109	0.4101	0.3734	0.55	0.45	0.2256	0.1680	0.3936

**Πίνακας 5.30.4** Συγκριτικός πίνακας που απεικονίζει τα αποτελέσματα της ακτίνας  $a$  στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας, media και adventitia, και το άθροισμα του πάχους των επιμέρους στρωμάτων στην τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) όπου το υλικό έχει υποστεί παραμόρφωση. Στις στήλες (3) και (4) μπορούμε να δούμε τις πειραματικές μετρήσεις προερχόμενες από τη δημοσίευση του Rachev (1997), ενώ στις στήλες (5) και (6) βλέπουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράφηκε αναλυτικά προηγουμένως. Εάν παρατηρήσουμε με προσοχή τον πίνακα θα δούμε ότι τα αποτελέσματα σχεδόν συμπίπτουν, έχοντας πολύ μικρές αποκλίσεις.

	Pressure P (kPa)	$a$ (mm) Rachev	$h^{(A)} + h^{(M)}$ (mm) Rachev	$a$ (mm)	$h^{(A)} + h^{(M)}$ (mm)
Unloaded state	13.33	1.44	0.57	1.50	0.40
	21.33	1.44	0.95	1.61	0.67
Physiological state	13.33	2.33	0.26	2.57	0.24

	21.33	2.46	0.43	2.75	0.39
--	-------	------	------	------	------

Στους πίνακες που απεικονίζονται παραπάνω, μπορούμε να δούμε τα μεγέθη που περιγράφουν την παραμένουσα τάση σε συνθήκες ελεύθερης φόρτισης και φόρτισης σε μία αρτηρία. Ο υπολογισμός της παραμένουσας τάσης περιγράφηκε αναλυτικά προηγουμένως και επαληθεύει τις πειραματικές μετρήσεις του Rachev. Εάν παρατηρήσουμε με προσοχή τους πίνακες θα διαπιστώσουμε ότι τα κινηματικά μεγέθη, όταν στο δοκίμιο ασκείται υπερπίεση, δεν αλλάζουν σημαντικά σε σχέση με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις σε συνθήκες φυσιολογικής πίεσης. **Αντίθετα, τα αποτελέσματα των τάσεων εμφανίζουν μεγαλύτερες αποκλίσεις καθώς μεταβάλλεται η πίεση εσωτερικά του σωλήνα. Για το λόγο αυτό το κριτήριο αστοχίας στις περιπτώσεις αρτηριών δε μπορεί να προκύπτει χρησιμοποιώντας την τάση αλλά την ενέργεια, σύμφωνα με τον Volokh.**

Στο σημείο αυτό, θα θέλαμε να δούμε με ποιον τρόπο θα επηρεαστεί η παραμένουσα τάση μίας αρτηρίας υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (stress-free state), εάν αλλάξουμε στον καταστατικό νόμο τις σταθερές του υλικού. Επιλέξαμε λοιπόν, λίγο μεγαλύτερες τιμές για τις σταθερές παραμέτρους του ανισότροπου «μοντέλου». Ειδικότερα,  $b_1=1$ ,  $b_2=0.5$ ,  $b_3=0.05$ ,  $b_4=0.1$ ,  $b_5=0.06$  και  $b_6=0$ . Τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης, ύστερα από τη νέα θεώρηση, παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.30.5** Στον πίνακα μπορούμε να δούμε την παραμένουσα τάση σε μία αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (stress-free state). Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν σε συνθήκες πίεσης 13.33 kPa, ενώ οι σταθερές του υλικού λήφθηκαν ίσες με  $b_1=1$ ,  $b_2=0.5$ ,  $b_3=0.05$ ,  $b_4=0.1$ ,  $b_5=0.06$  και  $b_6=0$ . Στην περίπτωση αυτή, θεωρήσαμε νέες τιμές για τις σταθερές του υλικού στο «μοντέλο», με αποτέλεσμα να αλλάξει ο καταστατικός νόμος. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα δε μεταβάλλονται σημαντικά. Τα κινηματικά μεγέθη δείχνουν να μην επηρεάστηκαν σχεδόν καθόλου από τη μετατροπή, ενώ οι αναπτυσσόμενες τάσεις εμφανίζουν μικρότερη σταθερότητα, ύστερα από τη νέα θεώρηση.

$\lambda=1.6$	$a$ (mm)	$q^A$	$q^M$	$\sigma_{\theta\theta}^A$ (kPa)	$\sigma_{\theta\theta}^M$ (kPa)	$\sigma_{zz}^A$ (kPa)	$\sigma_{zz}^M$ (kPa)	$P_1$ (kPa)
<b>Load-free 13.33 kPa</b>	1.478	0.8829	0.9505	-0.6898	0.8478	27.6423	27.8879	-0.1064
<b>Loaded 13.33 kPa</b>	2.591	1.5479	1.6663	97.0471	190.7131	57.1599	77.3358	4.6514

Στη συνέχεια, επιλύσαμε το πρόβλημα της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία μεταβάλλοντας μόνο τη σταθερά  $b_1$  του υλικού. Οι σταθερές που χρησιμοποιήσαμε για το προσομοίωμα, σε αυτή την περίπτωση, είναι ίσες με  $b_1=1.1$ ,  $b_2=0.5$ ,  $b_3=0.05$ ,  $b_4=0.1$ ,  $b_5=0.06$  και  $b_6=0$ . Τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης, ύστερα από τη νέα θεώρηση, παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί.

**Πίνακας 5.30.6** Στον πίνακα μπορούμε να δούμε την παραμένουσα τάση σε μία αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης (stree-free state). Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν σε συνθήκες πίεσης 13.33 kPa, ενώ οι σταθερές του υλικού λήφθηκαν ίσες με  $b_1=1.1$ ,  $b_2=0.5$ ,  $b_3=0.05$ ,  $b_4=0.1$ ,  $b_5=0.06$  και  $b_6=0$ . Στην περίπτωση αυτή, θεωρήσαμε νέες τιμές για τις σταθερές του υλικού στο «μοντέλο», με αποτέλεσμα να αλλάξει ο καταστατικός νόμος. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα δε μεταβάλλονται σημαντικά. Τα κινηματικά μεγέθη δείχνουν να μην επηρεάστηκαν σχεδόν καθόλου από τη μετατροπή, ενώ οι αναπτυσσόμενες τάσεις εμφανίζουν μικρότερη σταθερότητα, ύστερα από τη νέα θεώρηση.

$\lambda=1.6$	$\alpha$ (mm)	$q^A$	$q^M$	$\sigma_{\theta\theta}^A$ (kPa)	$\sigma_{\theta\theta}^M$ (kPa)	$\sigma_{zz}^A$ (kPa)	$\sigma_{zz}^M$ (kPa)	$P_1$ (kPa)
<b>Load-free 13.33 kPa</b>	1.491	0.8907	0.9589	-0.7784	0.9732	27.6908	27.9475	-0.1192
<b>Loaded 13.33 kPa</b>	2.541	1.5179	1.6342	93.1058	183.3159	55.0373	73.8532	4.6426



### 5.31 Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία χοίρου (Takamisawa)

Ο Takamisawa (2009) μελέτησε το «μοντέλο» μιας στεφανιαίας αρτηρίας γουρουνιού. Για να περιγράψουμε τις μηχανικές ιδιότητες του αγγείου, χρησιμοποιήθηκε ο εκθετικός τύπος της συνάρτησης της ενέργειας παραμόρφωσης που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2}(\exp Q - 1) \quad (5.136)$$

$$Q = b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2(b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + b_5 E_{zz} E_{rr} + b_6 E_{\theta\theta} E_{rr}) \quad (5.137)$$

Ο καταστατικός νόμος για τα στρώματα media-intima και adventitia διαφέρει σε αυτή την περίπτωση. Οι σταθερές του «μοντέλου» για τα δύο στρώματα είναι διαφορετικές και εξαιτίας αυτού το υλικό μπορεί να χαρακτηριστεί ως μη ομογενές ανισότροπο. Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι σταθερές του προσομοιώματος για τα δύο στρώματα της αρτηρίας.

**Πίνακας 5.31.1** Σταθερές της εκθετικής συνάρτησης της ενέργειας παραμόρφωσης για τα στρώματα media και adventitia μιας στεφανιαίας αρτηρίας γουρουνιού από τους Wang et al.

	C (kPa)	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	b <sub>6</sub>
Media	6.53	2.50	3.61	0.83	0.44	0.05	0.10
Adventitia	5.30	1.19	3.30	1.27	0.41	0.07	0.07

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τα στρώματα media-intima και adventitia της στεφανιαίας αρτηρίας γουρουνιού σε συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state).

**Πίνακας 5.31.2** Στον πίνακα παραθέτουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στρωμάτων που αποτελούν μία αρτηρία (media-intima και adventitia). Με R<sub>M</sub> και R<sub>A</sub> συμβολίζονται οι εσωτερικές ακτίνες των στρωμάτων media και adventitia, με H<sub>M</sub> και H<sub>A</sub> τα πάχη των στρωμάτων, με Φ<sub>M</sub> και Φ<sub>A</sub> η ανοικτή γωνία και με Θ<sub>M</sub> και Θ<sub>A</sub> η γωνία του κέντρου της αρτηρίας υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης.

<b>Media</b> R <sub>M</sub> (mm)	8.184
-------------------------------------	-------

$H_M$ (mm)	0.319
$\Phi_M$ (degrees)	150°
$\Theta_M$ (degrees)	60°
<b><i>Adventitia</i></b>	
$R_A$ (mm)	3.034
$H_A$ (mm)	0.319
$\Phi_A$ (degrees)	98.1°
$\Theta_A$ (degrees)	163.8°

### **Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε αρτηρία υπό συνθήκες ελεύθερης φόρτισης**

Αρχικά λοιπόν, δίνεται το αξονικό «τέντωμα» της αρτηρίας  $\lambda=1.2, 1.3$  και  $1.4$ . Αρκεί να υπολογίσουμε την ακτίνα  $a$  στη διεπιφάνεια, το «τέντωμα» της περιμέτρου  $q^{(A)}$  και  $q^{(M)}$ , την τάση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων  $P_1$  και τις κύριες τάσεις  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(M)}$  και  $\sigma_{zz}^{(A)}$ , για να περιγράψουμε τις παραμένουσες τάσεις που εμφανίζονται στο «σώμα» μιας αρτηρίας. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

- ❖ Το «τέντωμα»  $\lambda$  κατά την αξονική διεύθυνση θεωρείται γνωστό.
- ❖ Επιλέγουμε μία αρχική τιμή για την ακτίνα στη διεπιφάνεια  $a$  που πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < a \leq \max \{R_A, R_M\}$$

- ❖ Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» των δύο στρωμάτων της αρτηρίας στη διεύθυνση της περιμέτρου εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$q^{(A)} = \frac{2\pi}{\Theta_A} \frac{a}{R_A}$$

$$q^{(M)} = \frac{2\pi}{\Theta_M} \frac{a}{R_M}$$

- ❖ Ο καταστατικός νόμος για να προσομοιάσουμε μία αρτηρία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2}(\exp Q - 1)$$

$$Q = b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2(b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + b_5 E_{zz} E_{rr} + b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

- ❖ Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης της εσωτερικής ενέργειας  $W$  ως προς  $E_{\theta\theta}$  και  $E_{zz}$ .

$$\frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} = \frac{C}{2}(2b_1 E_{\theta\theta} + 2b_4 E_{zz} + 2b_6 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

$$\frac{\partial W}{\partial E_{zz}} = \frac{C}{2}(2b_2 E_{zz} + 2b_4 E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

- ❖ Για να υπολογίσουμε αριθμητικά τις ανωτέρω ποσότητες πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις Green εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_{rr}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda q^{(A,M)} \right)^{-2} - 1 \right]$$

$$E_{\theta\theta}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left( q^{(A,M)2} - 1 \right)$$

$$E_{zz} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

- ❖ Γνωρίζοντας την πίεση  $P^{(A,M)}$  που ασκείται στα τοιχώματα της αρτηρίας μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις για ισότροπα και ανισότροπα υλικά σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$P^{(A)} = \frac{(P_l + P_e)}{2}$$

$$P^{(M)} = \frac{(P_i + P_l)}{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + q^{(A,M)2} \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}}$$

$$\sigma_{zz}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial E_{zz}}$$

- ❖ Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση:

$$\Theta_A H_A R_A (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) + \Theta_M H_M R_M (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) = 0$$

Πρέπει το άθροισμα των επιμέρους ποσοτήτων να ισούται με μηδέν. Διαφορετικά, επιλέγουμε την επόμενη τιμή του  $\alpha$  (ακτίνα στη διεπιφάνεια) μειωμένη κατά 1/10 έως ότου βρούμε την τιμή για την οποία το παραπάνω άθροισμα ισούται με μηδέν.

- ❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση στη διεπιφάνεια χρησιμοποιώντας τη μία από τις σχέσεις που ακολουθούν (η άλλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα):

$$P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_A} \right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)})$$

$$-P_l = \left( \frac{2\pi}{\Theta_M} \right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)})$$

- ❖ Εξαιτίας του φαινομένου της αναστροφής υπολογίζουμε την τάση  $\sigma_\theta$  λόγω της κάμψης του στρώματος media λαμβάνοντας «τέντωμα»  $\lambda=1$ .

Στο πρόβλημα του Takamisawa συμπεριλαμβάνεται και το φαινόμενο της αναστροφής του τοιχώματος media της αρτηρίας. Το φαινόμενο της αναστροφής εμφανίζεται μόνο στο εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας (media) και είναι σπάνιο σε ανθρώπινες αρτηρίες. Επομένως, η τάση  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$  που αναφέρθηκε προηγουμένως είναι η ομοιόμορφη τάση του στρώματος. Παρόλα αυτά, εξαιτίας της αναστροφής εμφανίζεται και μία γραμμική τάση  $\sigma_\theta$  στη διεύθυνση της περιμέτρου του στρώματος εξαιτίας της κάμψης. Για να υπολογίσουμε την τάση αυτή, για τις διάφορες περιπτώσεις πίεσης, πρέπει να λάβουμε «τέντωμα»  $\lambda$  κατά την αξονική διεύθυνση ίσο ένα ( $\lambda=1$ ).

### **Υπολογισμός της παραμένουσας τάσης σε αρτηρία υπό συνθήκες φόρτισης**

Στην περίπτωση που η αρτηρία βρίσκεται υπό συνθήκες φόρτισης, η διαδικασία για τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης συμπίπτει με αυτή που περιγράφηκε προηγουμένως με μικρές διαφορές.

- ❖ Το «τέντωμα»  $\lambda$  κατά την αξονική διεύθυνση θεωρείται γνωστό.

- ❖ Επιλέγουμε μία αρχική τιμή για την ακτίνα στη διεπιφάνεια  $\alpha$  που πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < \alpha \leq \max \{R_A, R_M\}$$

- ❖ Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το «τέντωμα» των δύο στρωμάτων της αρτηρίας στη διεύθυνση της περιμέτρου εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$q^{(A)} = \frac{2\pi}{\Theta_A} \frac{\alpha}{R_A}$$

$$q^{(M)} = \frac{2\pi}{\Theta_M} \frac{\alpha}{R_M}$$

- ❖ Ο καταστατικός νόμος για να προσομοιάσουμε μία αρτηρία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$W = \frac{C}{2} (\exp Q - 1)$$

$$Q = b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2(b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + b_5 E_{zz} E_{rr} + b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

- ❖ Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης της εσωτερικής ενέργειας  $W$  ως προς  $E_{\theta\theta}$  και  $E_{zz}$ .

$$\frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}} = \frac{C}{2} (2b_1 E_{\theta\theta} + 2b_4 E_{zz} + 2b_6 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

$$\frac{\partial W}{\partial E_{zz}} = \frac{C}{2} (2b_2 E_{zz} + 2b_4 E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{rr}) \exp(b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{rr}^2 + 2b_4 E_{zz} E_{\theta\theta} + 2b_5 E_{zz} E_{rr} + 2b_6 E_{\theta\theta} E_{rr})$$

- ❖ Για να υπολογίσουμε αριθμητικά τις ανωτέρω ποσότητες πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις Green εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_{rr}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda q^{(A,M)} \right)^{-2} - 1 \right]$$

$$E_{\theta\theta}^{(A,M)} = \frac{1}{2} \left( q^{(A,M)2} - 1 \right)$$

$$E_{zz} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

- ❖ Γνωρίζοντας την πίεση  $P^{(A,M)}$  που ασκείται στα τοιχώματα της αρτηρίας μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις για ισότροπα και ανισότροπα υλικά σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$P^{(A)} = \frac{(P_l + P_e)}{2}$$

$$P^{(M)} = \frac{(P_i + P_l)}{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + q^{(A,M)2} \frac{\partial W}{\partial E_{\theta\theta}}$$

$$\sigma_{zz}^{(A,M)} = -P^{(A,M)} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial E_{zz}}$$

- ❖ Με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση:

$$\lambda(P_e - P_i) + \left(\frac{2\pi}{\Theta_A}\right)^{-1} \frac{H_A R_A}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)}) + \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)}) = 0$$

Πρέπει το άθροισμα των επιμέρους ποσοτήτων να ισούται με μηδέν. Διαφορετικά, επιλέγουμε την επόμενη τιμή του  $\alpha$  (ακτίνα στη διεπιφάνεια) μειωμένη κατά 1/10 έως ότου βρούμε την τιμή για την οποία το παραπάνω άθροισμα ισούται με μηδέν.

- ❖ Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση στη διεπιφάνεια χρησιμοποιώντας τη μία από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$-P_e + P_l = \left(\frac{2\pi}{\Theta_A}\right)^{-1} \frac{H_A R_A \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(A)} + P^{(A)})$$

$$-P_l + P_i = \left(\frac{2\pi}{\Theta_M}\right)^{-1} \frac{H_M R_M \lambda^{-1}}{\alpha^2} (\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + P^{(M)})$$

- ❖ Εξαιτίας του φαινομένου της αναστροφής υπολογίζουμε την τάση  $\sigma_0$  λόγω της κάμψης του στρώματος media λαμβάνοντας «τέντωμα»  $\lambda=1$ .

Εάν λοιπόν, ακολουθήσουμε διαδοχικά τα παραπάνω βήματα μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμένουσα τάση σε οποιαδήποτε αρτηρία, με την προϋπόθεση ότι η γεωμετρία της είναι γνωστή καθώς και οι σταθερές που «μοντέλου» που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία γουρουνιού.

**Πίνακας 5.31.3** Στον πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία γουρουνιού, όταν επιβάλλεται στο υλικό αρχικό «τέντωμα» κατά την αξονική διεύθυνση  $\lambda=1.2$ . Με  $P_i$  συμβολίζεται η εσωτερική πίεση της αρτηρίας, με  $a$  η ακτίνα στη διεπιφάνεια, με  $q^{(A)}$ ,  $q^{(M)}$  το «τέντωμα» στη διεύθυνση της περιμέτρου για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα, με  $P_1$  η πίεση στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων και με  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$  και  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$  η ορθή τάση στη διεύθυνση  $\theta$ . Εάν παρατηρήσουμε το μέγεθος  $q^{(i)}$  θα συμπεράνουμε ότι τα δύο στρώματα της αρτηρίας εμφανίζουν σχεδόν ίδια παραμόρφωση στη διεύθυνση της περιμέτρου. Επιπλέον, βλέπουμε ότι όσο αυξάνουμε την πίεση εσωτερικά της αρτηρίας αυξάνεται η ακτίνα στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων. Όσον αφορά την τάση που αναπτύσσεται, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το στρώμα media εμφανίζει πολύ μεγαλύτερες τάσεις συγκριτικά με το adventitia.

<b><math>\lambda = 1.2</math> (Takamisawa)</b>						
<b><math>P_i</math> (kPa)</b>	<b><math>a</math> (mm)</b>	<b><math>q^{(A)}</math></b>	<b><math>q^{(M)}</math></b>	<b><math>P_1</math> (kPa)</b>	<b><math>\sigma_{\theta\theta}^{(A)}</math></b>	<b><math>\sigma_{\theta\theta}^{(M)}</math></b>
0	1.3090	0.9482	0.9597	0.0243	0.1118	-0.1138
4	1.8550	1.3437	1.3599	0.9427	8.3419	26.5146
8	2.0100	1.4560	1.4736	1.5757	16.4927	66.7200
12	2.0920	1.5154	1.5337	2.0612	23.7469	113.1332
16	2.1440	1.5531	1.5718	2.5318	30.0641	161.0554

**Πίνακας 5.31.4** Στον πίνακα παριστάνεται με  $\sigma_{zz}^{(A,M)}$  η κύρια τάση κατά την διεύθυνση του άξονα για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα. Με  $\sigma_o$  συμβολίζεται η τάση που αναπτύσσεται στο στρώμα media εξαιτίας της αναστροφής του τοιχώματος. Έτσι, το στρώμα media εξαιτίας του φαινομένου της αναστροφής δεν παρουσιάζει ομοιόμορφη τάση κατά τη διεύθυνση της περιμέτρου. Η τάση λοιπόν, κατά τη διεύθυνση της περιμέτρου παρουσιάζει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή, όπως φαίνεται στον πίνακα, και η κατανομή της είναι γραμμική κατά μήκος του πάχους του σωλήνα.

<b><math>\lambda = 1.2</math> (Takamisawa)</b>					
<b><math>P_i</math> (kPa)</b>	<b><math>\sigma_{zz}^{(A)}</math></b>	<b><math>\sigma_{zz}^{(M)}</math></b>	<b><math>\sigma_o</math></b>	<b><math>\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + \sigma_o</math></b>	<b><math>\sigma_{\theta\theta}^{(M)} - \sigma_o</math></b>
0	6.2787	8.6806	-0.6436	-0.7574	0.5298
4	10.6814	16.8536	17.4592	43.9738	9.0554
8	14.1365	27.3449	44.1284	110.8484	22.5916
12	16.9189	38.0728	74.5565	187.6897	38.5767
16	19.2007	48.2065	105.6715	266.7269	55.3839

**Πίνακας 5.31.5** Στον πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία γουρουνιού, όταν επιβάλλεται στο υλικό αρχικό «τέντωμα» κατά την αξονική διεύθυνση  $\lambda=1.3$ . Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας με τα αντίστοιχα του Takamisawa επιλέξαμε την περίπτωση που η επιβαλλόμενη πίεση στο εσωτερικό του σωλήνα ισούται με  $P_i = 16$  kPa και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αποκλίσεις είναι μικρές. Πιο συγκεκριμένα, η ακτίνα  $a$  είναι μεγαλύτερη της τιμής δύο ( $a>2$ ), τα «τεντώματα»  $q^{(A)}$  και  $q^{(M)}$  προσεγγίζουν την τιμή 1.70, ενώ οι τάσεις εμφανίζουν σημαντική απόκλιση. Σύμφωνα με τον Takamisawa πρέπει  $\sigma_{\theta\theta}^{(A)} \approx 50$  kPa και  $\sigma_{\theta\theta}^{(M)} \approx 150$  kPa. Οι απόκλιση αυτή όσον αφορά τις τάσεις πιθανότατα οφείλεται στο φαινόμενο της αναστροφής. **Τα κινηματικά μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν χωρίς να λάβουμε υπόψη το φαινόμενο της αναστροφής, δίνοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα.**



Αντίθετα, για τον υπολογισμό των τάσεων πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την αναστροφή του εσωτερικού στρώματος της αρτηρίας.

$\lambda = 1.3$ (Takamisawa)						
$P_i$ (kPa)	$a$ (mm)	$q^{(A)}$	$q^{(M)}$	$P_i$ (kPa)	$\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$
0	1.2700	0.9199	0.9311	0.0555	0.2369	-0.2946
4	1.7880	1.2952	1.3109	1.0166	9.0946	25.9979
8	1.9500	1.4126	1.4296	1.7198	18.4128	66.4539
12	2.0360	1.4749	1.4927	2.2801	26.8282	113.3139
16	2.092	1.5154	1.5337	2.7739	34.4397	163.5416

**Πίνακας 5.31.6** Στον πίνακα παριστάνεται με  $\sigma_{zz}^{(A,M)}$  η κύρια τάση κατά την διεύθυνση του άξονα για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα. Με  $\sigma_o$  συμβολίζεται η τάση που αναπτύσσεται στο στρώμα media εξαιτίας της αναστροφής του τοιχώματος. Στην περίπτωση που το αρχικό «τέντωμα» της αρτηρίας ισούται με  $\lambda=1.3$  και η εσωτερική πίεση με  $P_i = 16$  kPa, όπως μπορούμε να δούμε στον πίνακα, η μέγιστη τάση στο στρώμα media ισούται με  $\sigma_{\theta\theta} \approx 235$  kPa και η ελάχιστη τάση με  $\sigma_{\theta\theta} \approx 93$  kPa.

$\lambda = 1.3$ (Takamisawa)					
$P_i$ (kPa)	$\sigma_{zz}^{(A)}$	$\sigma_{zz}^{(M)}$	$\sigma_o$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + \sigma_o$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)} - \sigma_o$
0	14.6407	20.6363	-1.0348	-1.3294	0.7402
4	22.7485	35.7331	10.8219	36.8198	15.1760

8	29.4799	55.6142	28.6549	95.1088	37.7990
12	34.9497	75.7609	49.0034	162.3173	64.3105
16	39.5859	95.5414	70.5565	234.0981	92.9851

**Πίνακας 5.31.7** Στον ανωτέρω πίνακα απεικονίζονται τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία στεφανιαία αρτηρία γουρουνιού, όταν επιβάλλεται στο υλικό αρχικό «τέντωμα» κατά την αξονική διεύθυνση  $\lambda=1.4$ .

$\lambda = 1.4$ (Takamisawa)						
$P_i$ (kPa)	$a$ (mm)	$q^{(A)}$	$q^{(M)}$	$P_i$ (kPa)	$\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$
0	1.228	0.8896	0.9003	0.1121	0.4849	-0.5997
4	1.679	1.2163	1.2309	1.1233	9.4826	23.4814
8	1.851	1.3408	1.3570	1.9252	20.0177	62.0166
12	1.944	1.4082	1.4252	2.5928	29.8360	107.1635
16	2.005	1.4524	1.4699	3.1855	38.8941	155.9109

**Πίνακας 5.31.8** Στον πίνακα παριστάνεται με  $\sigma_{zz}^{(A,M)}$  η κύρια τάση κατά την διεύθυνση του άξονα για τα στρώματα adventitia και media, αντίστοιχα, και με  $\sigma_0$  η τάση που αναπτύσσεται στο στρώμα media εξαιτίας της αναστροφής του τοιχώματος. Οι τάσεις υπολογίστηκαν για αρχικό «τέντωμα» του υλικού ίσο με  $\lambda=1.4$  και για διάφορες περιπτώσεις της πίεσης  $P_i$ .

$\lambda = 1.4$ (Takamisawa)					
$P_i$ (kPa)	$\sigma_{zz}^{(A)}$	$\sigma_{zz}^{(M)}$	$\sigma_o$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)} + \sigma_o$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)} - \sigma_o$
0	34.0012	49.6658	-1.4073	-2.0070	0.8076
4	47.5402	72.4636	4.0091	27.4905	19.4723
8	59.9810	105.4177	12.9889	75.0055	49.0277
12	70.3431	139.2221	23.4116	130.5751	83.7519
16	79.2558	172.4452	34.5933	190.5042	121.3176

**Πίνακας 5.31.9** Τάση  $\sigma_o$  που αναπτύσσεται στο εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας media, εξαιτίας του φαινομένου της αναστροφής. Παρατηρώντας τον πίνακα, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται η πίεση εσωτερικά της αρτηρίας αυξάνεται και η τάση  $\sigma_o$ . Επιπρόσθετα, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό «τέντωμα»  $\lambda$  του υλικού στην αξονική διεύθυνση τόσο μικρότερη είναι η τάση  $\sigma_o$  λόγω της κάμψης του στρώματος media.

Τάση $\sigma_o$ (kPa) εξαιτίας του φαινομένου της αναστροφής στο στρώμα media			
$P$ (kPa)	$\lambda = 1.2$	$\lambda = 1.3$	$\lambda = 1.4$
0	-0.6436	-1.0348	-1.4073
4	17.4592	10.8219	4.0091
8	44.1284	28.6549	12.9889
12	74.5565	49.0034	23.4116
16	105.6715	70.5565	34.5933

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε μία τυχαία πίεση  $P_i - P_e$  που ασκείται στο «σώμα» της αρτηρίας, χωρίς να λάβουμε υπόψη μας ότι κάθε στρώμα δέχεται διαφορετικές πιέσεις, τα αποτελέσματα ως προς τα κινηματικά μεγέθη δε θα μεταβληθούν σημαντικά. Αντίθετα, εάν μεταβάλλουμε την πίεση οι τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό παρουσιάζουν διακυμάνσεις ως προς τα αποτελέσματα, με συνέπεια να μην μπορούμε να τις εμπιστευτούμε όσον αφορά την αστοχία. Δικαίως λοιπόν, ο ιατρικός κόσμος εμπιστεύεται τα κινηματικά μεγέθη ως ιδιότητα, αλλά όχι την τάση! Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία, έχοντας θεωρήσει μία τυχαία πίεση  $P_i - P_e$  που επιβάλλεται στα τοιχώματα του σωλήνα.

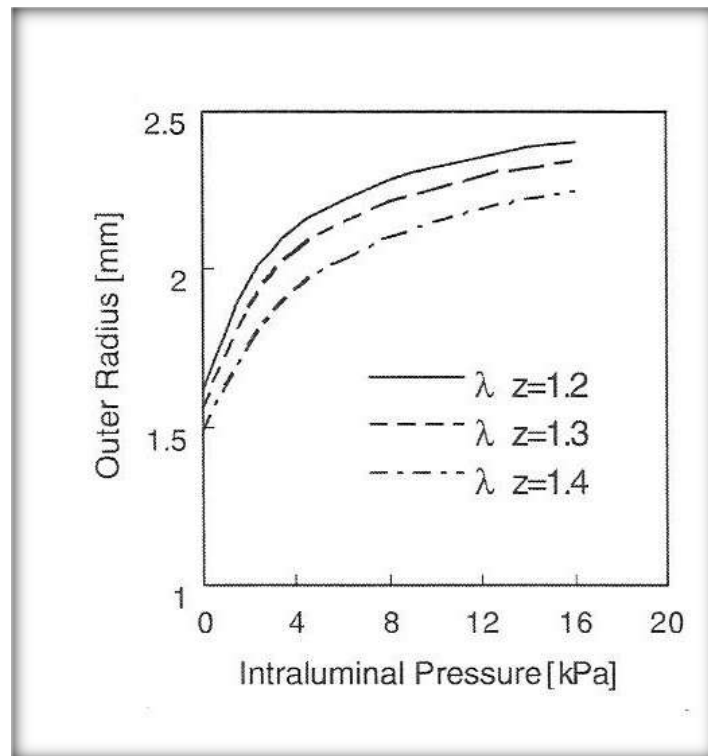
**Πίνακας 5.31.10** Στον πίνακα παραθέτουμε τα αποτελέσματα της παραμένουσας τάσης σε μία αρτηρία, έχοντας θεωρήσει μία τυχαία πίεση  $P_i - P_e$  που επιβάλλεται στα τοιχώματα του σωλήνα. Εάν παρατηρήσουμε με προσοχή τα αποτελέσματα, θα διαπιστώσουμε ότι τα κινηματικά μεγέθη δε μεταβάλλονται σημαντικά με τη μεταβολή της πίεσης σε αντίθεση με τις αναπτυσσόμενες τάσεις. **Εξαιτίας αυτού συμπεραίνουμε ότι η τάση δεν είναι αντιπροσωπευτική ιδιότητα για την περιγραφή της αστοχίας σε μία αρτηρία!**

$\lambda = 1.4$ (Takamisawa)						
$P_i$ (kPa)	$a$ (mm)	$q^{(A)}$	$q^{(M)}$	$P_i$ (kPa)	$\sigma_{\theta\theta}^{(A)}$	$\sigma_{\theta\theta}^{(M)}$
0	1.228	0.8896	0.9003	0.1121	0.5414	-0.5400
4	1.727	1.2510	1.2661	0.8851	8.3779	29.8777
8	1.889	1.3684	1.3849	1.4649	16.6404	75.0531
12	1.976	1.4314	1.4487	1.9187	23.7093	126.5427
16	2.034	1.4734	1.4912	2.2802	29.9363	182.5754

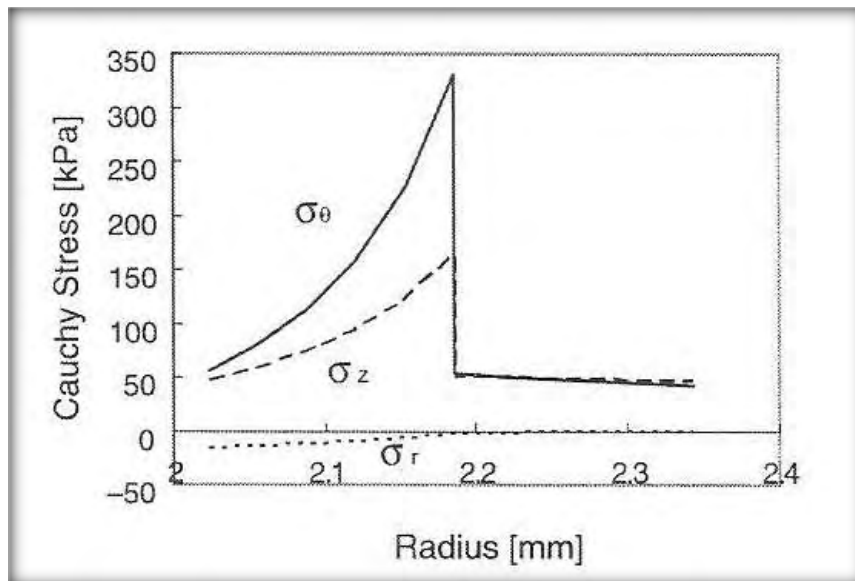
Εφόσον λοιπόν, η τάση δεν αποτελεί αντιπροσωπευτική ιδιότητα για να περιγράψουμε την αστοχία σε μία αρτηρία θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ , σύμφωνα με τη θεωρία του Volokh. **Η κρίσιμη ενέργεια ουσιαστικά διευκολύνει να διευρύνουμε την έννοια της παρατηρήσιμης αντοχής (συνολικό κριτήριο). Αντίθετα, η κρίσιμη τάση δείχνει να είναι καλή όταν αναφερόμαστε σε επιφάνειες!**

**Πίνακας 5.31.11** Στον πίνακα παραθέτουμε τα αποτελέσματα της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ . Αρχικά, υπολογίσαμε την ενέργεια παραμόρφωσης, όταν στο «σώμα» ασκείται ίδια πίεση στα στρώματα media και adventitia, ενώ στη συνέχεια τα αποτελέσματα προέκυψαν λαμβάνοντας διαφορετική πίεση σε κάθε τοίχωμα της αρτηρίας. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, τα αποτελέσματα της ενέργειας παραμόρφωσης εμφανίζουν μικρές αποκλίσεις. Ειδικότερα, για το στρώμα adventitia τα αποτελέσματα συμπίπτουν! **Μπορούμε λοιπόν, να προτείνουμε τη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης ως μία ιδιότητα για να προσδιορίσουμε την αστοχία μίας αρτηρίας!**

$\lambda$	$P_i$ (kPa)	$W_A$ (kPa) $P_i - P_e$	$W_M$ (kPa) $P_i - P_e$	$W_A$ (kPa) $P^{(A)}$	$W_M$ (kPa) $P^{(M)}$
1.2	16	4.9389	17.1623	4.5186	14.8851
1.3	16	6.6370	19.4636	6.1449	17.1018
1.4	16	9.5565	22.9646	8.9037	20.3201



**Εικόνα 5.31.1** Γραφική παράσταση που συνδέει την ακτίνα  $a$  στη διεπιφάνεια των δύο στρωμάτων της αρτηρίας, media και adventitia, με την πίεση που ασκείται στο εσωτερικό τοίχωμα. Στο γράφημα παριστάνονται τρεις καμπύλες. Κάθε μία αντιστοιχεί σε διαφορετικό αρχικό «τέντωμα» της αρτηρίας κατά τη διεύθυνση του άξονα,  $\lambda=1.2$ ,  $\lambda=1.3$  και  $\lambda=1.4$ . Όταν η πίεση εσωτερικά του σωλήνα είναι μικρή, η ακτίνα στη διεπιφάνεια λαμβάνει τιμές κατά μέσο όρο λίγο μεγαλύτερες του 1.5 mm. Όσο η πίεση αυξάνεται η τιμή του  $a$  προσεγγίζει τα 2.5 mm. Το γράφημα προέρχεται από τη δημοσίευση του Takamisawa (2009). Τα αποτελέσματα αυτά του Takamisawa επαληθεύονται, εάν εφαρμόσουμε την ανάλυση που περιγράψαμε παραπάνω.



**Εικόνα 5.31.2** Γραφική απεικόνιση των τάσεων κατά Cauchy που αναπτύσσονται στα δύο στρώματα της αρτηρίας σε σχέση με την ακτίνα στη διεπιφάνεια. Το γράφημα αντιστοιχεί σε πίεση 16 kPa εσωτερικά της αρτηρίας και αρχικό «τέντωμα» κατά την αξονική διεύθυνση ίσο με  $\lambda=1.3$ . Στη διεπιφάνεια των στρωμάτων media και adventitia παρατηρείται άλμα ως προς τις τάσεις. Η κύρια τάση στη διεύθυνση της περιμέτρου για το στρώμα media λαμβάνει τιμές που κυμαίνονται από 60 kPa έως 300 kPa. Αντίθετα, το στρώμα adventitia παρουσιάζει μικρότερη διακύμανση όσον αφορά την τιμή του  $\sigma_{\theta\theta}$ , την οποία σύμφωνα με το γράφημα μπορούμε να θεωρήσουμε σταθερή και ίση με 25 kPa περίπου. Η εικόνα βρίσκεται στη δημοσίευση του Takamisawa (2009) και τα αποτελέσματα που γραφήματος επαληθεύονται με αυτά που παρατίθενται στους ανωτέρω πίνακες.

## Παράρτημα Ο

**Ο** P. Chadwick (1972) δημοσίευσε ένα άρθρο σχετικό με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης σε δύο προβλήματα βασισμένα στη θεωρία των Mooney-Rivlin για τα ελαστικά. Ειδικότερα, αναφέρθηκε στο πρόβλημα της συνδυασμένης διόγκωσης και ελκυσμού και στη συνέχεια στην αναστροφή (πράξη κατά την οποία στρίβει το «μέσα έξω») ενός κυκλικού κυλινδρικού σωλήνα.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποίησε τη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης όπως αυτή προτείνεται από τους Mooney-Rivlin.

$$W = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) (I - 3) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (II - 3) \right\} \quad (5.137)$$

Η παραπάνω εξίσωση βρίσκει εφαρμογή σε ασυμπίεστα υλικά. **Με  $\mu$  συμβολίζεται το μέτρο διάτμησης σε απειροελάχιστες παραμορφώσεις όταν το υλικό βρίσκεται στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση, με  $\beta$  η αδιάστατη σταθερά του υλικού και με  $I$  και  $II$  η πρώτη και η δεύτερη αναλλοίωτη, αντίστοιχα.** Εκτιμάμε ότι οι ποσότητες  $\mu$  και  $\beta$  «υπακούουν» στις ανισότητες που αναγράφονται παρακάτω:

$$\mu > 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$$

**Στην περίπτωση που η σταθερά  $\beta$  ισούται με  $\frac{1}{2}$  προκύπτει το «μοντέλο» Neo-Hookean!** Για την επίλυση του προβλήματος του κυλινδρικού σωλήνα επιλέχθηκε πολικό σύστημα αναφοράς, ενώ εκτιμήθηκε ότι δεν δρουν μαζικές δυνάμεις στο σωλήνα.

### 5.32.1 Συνδυασμένη διόγκωση και ελκυσμός σε ένα κυκλικό σωλήνα

Στην περίπτωση ασυμπίεστου υλικού η παραμόρφωση δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$r = \left\{ \lambda^{-1} (R^2 - A^2) + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \theta = \Theta, z = \lambda Z \quad (5.138)$$

Όπου με  $\lambda = 1/L$  παριστάνεται το αξονικό «τέντωμα» του σωλήνα. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι τα σύνορα  $A$ ,  $B$  καθώς και το μήκος  $L$  είναι γνωστά, ενώ η εσωτερική ακτίνα  $a$  στην παραμορφωμένη κατάσταση



μπορεί να προβλεφθεί. Επιπλέον, στην εξωτερική καμπυλωμένη επιφάνεια του σωλήνα δεν επιβάλλονται τάσεις (stress free).

Μία τυπική λύση του προβλήματος για ένα ασυμπίεστο ελαστικό υλικό, η ενέργεια παραμόρφωσης του οποίου αναγράφεται ανωτέρω, περιγράφεται παρακάτω. Με  $\lambda$  συμβολίζεται το αξονικό «τέντωμα» και με  $q$  η παραμόρφωση της περιμέτρου του σωλήνα.

$$f(\lambda) \equiv 2(\lambda - \lambda^{-2})(\lambda + \psi) + \frac{(\lambda q^2 - 1)(\lambda^{-1} + \psi\lambda)}{N^2 - 1 + \lambda q^2} + \frac{\lambda^{-1} + \psi\lambda(2\lambda q^2 - 1)}{N^2 - 1} \log\left(\frac{N^2 \lambda q^2}{N^2 - 1 + \lambda q^2}\right) = 0$$

$$q = \frac{a}{A} (> 1)$$

$$N = \frac{B}{A} (> 1)$$

$$\psi = \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\frac{1}{2} + \beta} (\geq 0)$$

Όταν η ποσότητα  $N^2$  τείνει στη μονάδα ( $N^2 \rightarrow 1$ ) ο τελευταίος όρος της εξίσωσης του Chadwick χρειάζεται κάποιο όριο για να επιλυθεί. Επιλύουμε λοιπόν, την ακόλουθη ποσότητα:

$$\frac{1}{(N^2 - 1)} \log\left[\frac{(N^2 - 1)\lambda q^2 + \lambda q^2}{(N^2 - 1) + \lambda q^2}\right]$$

Η παραπάνω ποσότητα εφαρμόζοντας το όριο de L' Hospital μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{1}{(N^2 - 1)} \log\left[\frac{(N^2 - 1)\lambda q^2 + \lambda q^2}{(N^2 - 1) + \lambda q^2}\right] = \frac{1}{1} \left\{ \frac{(N^2 - 1) + \lambda q^2}{(N^2 - 1)\lambda q^2 + \lambda q^2} - \left[ \frac{\lambda q^2}{(N^2 - 1) + \lambda q^2} - \frac{(N^2 - 1)\lambda q^2 + \lambda q^2}{(N^2 - 1) + \lambda q^2} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{(N^2 - 1)} \log\left[\frac{(N^2 - 1)\lambda q^2 + \lambda q^2}{(N^2 - 1) + \lambda q^2}\right] = \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει τελικά:

$$f(\lambda) \equiv 2(\lambda - \lambda^{-2})(\lambda + \psi) + \frac{(\lambda q^2 - 1)(\lambda^{-1} + \psi\lambda)}{\lambda q^2} + (\lambda^{-1} + \psi\lambda(2\lambda q^2 - 1)) \left( \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2} \right) = 0$$

$$f(\lambda) \equiv 2\lambda q^2 (\lambda - \lambda^{-2})(\lambda + \psi) + (\lambda q^2 - 1) [\lambda^{-1} + \psi\lambda + \lambda^{-1} + \psi\lambda(2\lambda q^2 - 1)] = 0$$

$$f(\lambda) \equiv 2\lambda q^2 (\lambda - \lambda^{-2}) (\lambda + \psi) + (\lambda q^2 - 1) 2 (\lambda^{-1} + \psi \lambda^2 q^2) = 0$$

$$f(\lambda) \equiv \lambda^3 q^2 - \lambda^{-1} + \psi \lambda q^2 (\lambda^2 q^2 - \lambda^{-2}) = 0$$

$$f(\lambda) \equiv \lambda^2 (\lambda q^2 - \lambda^{-3}) + \psi \lambda^2 q^2 (\lambda q^2 - \lambda^{-3}) = 0$$

$$\lambda q^2 - \lambda^{-3} = 0 \Rightarrow \lambda q^2 = \lambda^{-3} \Rightarrow q^2 = \lambda^{-4} \Rightarrow \lambda = q^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda^2 (1 + \psi q^2) \neq 0$$

Στις σχέσεις που αναγράφονται  $\lambda_\theta = q, \lambda_z = \lambda$ .

Από την ανάλυση του Chadwick (1972) προκύπτουν οι εξισώσεις που εκφράζουν την κατανομή των τάσεων μέσα σε ένα κυλινδρικό σωλήνα.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \frac{(\lambda q^2 - 1) \{ \lambda q^2 (2x^2 - 1) + 1 \}}{\lambda q^2 x^2 \{ \lambda q^2 (x^2 - 1) + 1 \}} \quad (5.139)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \left( \lambda^2 - \lambda^{-1} + \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda^2 q^2 x^2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left( \lambda^{-2} - \frac{\lambda^2 q^2 x^2}{\lambda q^2 (x^2 - 1) + 1} \right) \right\} \quad (5.140)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} \mu \left\{ \left( \frac{1}{2} + \beta \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \lambda \right\} \left\{ \frac{\lambda q^2 - 1}{(N^2 - 1) + \lambda q^2} - \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2 x^2} + \log \left\{ \left( 1 - \frac{\lambda q^2 - 1}{\lambda q^2 x^2} \right) \left( 1 + \frac{\lambda q^2 - 1}{N^2} \right) \right\} \right\} \quad (5.141)$$

$$\text{Όπου } x = \frac{r}{a} \left( 1 \leq x \leq \left\{ (N^2 - 1 + \lambda q^2) / \lambda q^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right).$$

### 5.32.2 Πολικές Συντεταγμένες

Εξίσωση ισορροπίας κατά την ακτινική διεύθυνση:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + F_r = 0 \quad (5.142)$$

Εξίσωση ισορροπίας κατά την εφαπτομενική διεύθυνση:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + F_{\theta} = 0 \quad (5.143)$$

Εξίσωση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση του άξονα:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + F_z = 0 \quad (5.144)$$

## Συμπεράσματα

**Η** σκληρομέτρηση ενός δείγματος που αποσκοπεί στον εντοπισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού πράγματι παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα, όπως περιγράφηκε αναλυτικά σε προηγούμενα κεφάλαια. Πρόκειται για μία γρήγορη, αξιόπιστη και εύκολη ως προς τη χρήση μέθοδο, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί έναν οικονομικό και μη καταστρεπτικό έλεγχο για το δείγμα.

Τα δείγματα που αποφασίσαμε να μελετήσουμε ανήκουν στην κατηγορία των ελαστομερών. Πρόκειται λοιπόν, για ελαστικά υλικά (rubber-like materials) που είναι τα κοινά λάστιχα, ενισχυμένα με τάλκη Gels (gel-like materials) και το κοινό γιαούρτι του εμπορίου που ανήκει στην κατηγορία των Gels. Τα «ελαστομερή» είναι ουσιαστικά πολυμερή που διαθέτουν υψηλή ελαστικότητα. Ειδικότερα, πρόκειται για ένα μακρομοριακό υλικό που έχει την ιδιότητα της βισκοελαστικότητας (φαινόμενα ερπυσμού ή χαλάρωσης). Τα ελαστικά «σώματα» (λάστιχα) ανήκουν στην κατηγορία των υλικών που έχουν υποστεί βουλκανισμό. Με τον όρο «βουλκανισμός» εννοούμε τη διαδικασία που μειώνει τη ροή, δηλαδή τις μεγάλες ανεξέλεγκτες παραμορφώσεις του πολυμερούς λόγω των συνδέσεων που δημιουργούνται εσωτερικά στο «σώμα», αυξάνει την εφελκυστική του αντοχή καθώς και προσδίδει σε αυτό πλήρως ελαστική συμπεριφορά μετά την αποφόρτιση.

Για τη μέτρηση της σκληρότητας σε ελαστομερή υλικά επιλέχθηκαν δύο τύποι διεισδυτών. Ειδικότερα, πρόκειται για έναν άκαμπτο σφαιρικό διεισδυτή καθώς και για έναν κωνικό διεισδυτή με σφαιρική αιχμή. Ανάλογα με τον τύπο του διεισδυτή εφαρμόστηκαν οι κατάλληλες θεωρίες για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστομερών δοκιμίων.

Στην περίπτωση των πειραμάτων με σφαιρικού τύπου διεισδυτή υποβλήθηκαν σε σκληρομέτρηση ελαστικά δοκίμια. Όλες οι διεισδύσεις επανήλθαν πλήρως και δεν παρατηρήθηκε καμία μόνιμη παραμόρφωση! Για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων και συγκεκριμένα του μέτρου ελαστικότητας, για την περίπτωση σφαιρικού διεισδυτή, επιλέχθηκε η θεωρία του Hertz και του Ting. Σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz η περιοχή επαφής προσεγγίζεται σαν μία καμπύλη, ενώ στην πραγματικότητα περιγράφεται από την εξίσωση του κύκλου, λόγω του σφαιρικού διεισδυτή, σύμφωνα με τη θεωρία του Ting. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις δύο μεθοδολογίες είναι συγκρίσιμα. Ωστόσο, η μέθοδος του Hertz, στην οποία χρησιμοποιείται η εξίσωση της παραβολής, δίνει μία σύντομη απάντηση στο πρόβλημα εύρεσης του μέτρου ελαστικότητας.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες ενός ιδιαίτερα λεπτού δείγματος, χρησιμοποιώντας για τη σκληρομέτρηση άκαμπτο σφαιρικό διεισδυτή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους πίνακες των Chen και Engel. Χρειαζόμαστε λοιπόν, εκτός από το επιθυμητό δείγμα ανεπαρκούς πάχους και ένα ακόμη ελαστικό υλικό επαρκούς πάχους, του οποίου οι ιδιότητες θεωρούνται γνωστές, ως υπόστρωμα πάνω στο οποίο επικάθεται το λεπτό δοκίμιο. Η

μέθοδος αυτή (με χρήση πινάκων) αν και είναι ακριβής δε συνιστάται λόγω πολυπλοκότητας. Εναλλακτικά, για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα της επιρροής του άκαμπτου υπόβαθρου της συσκευής, εξαιτίας του πολύ λεπτού στρώματος του υλικού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική σχέση των Stevanovic et al. συνδυασμένη με τη θεωρία του Ting για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Η μεθοδολογία αυτή αν και δεν είναι απλή ως προς την επίλυση, λόγω του ότι περιλαμβάνει δύο επαναληπτικές σχέσεις, οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα και για το λόγο αυτό δείχνουμε να την προτιμάμε συγκριτικά με τους πίνακες Chen και Engel. Επιπρόσθετα, εάν στην βάση του μετρούμενου λεπτού δείγματος τοποθετήσουμε πολλά στρώματα του ίδιου υλικού (συνήθως περισσότερες από τρεις στρώσεις) το σκληρό άκαμπτο, σε σχέση με το δείγμα, υπόβαθρο της συσκευής παύει να επηρεάζει τα αποτελέσματα του πειράματος.

Όσον αφορά τη θεωρία των Lin et al. και συγκεκριμένα το διάγραμμα που εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ακτίνας επαφής και του βάθους διείσδυσης, στο πρόβλημα του σφαιρικού διεισδυτή, συμφωνεί απόλυτα με την αντίστοιχη καμπύλη που προκύπτει από τη θεωρία του Ting. Έτσι λοιπόν, το διάγραμμα των Lin et al. επαληθεύεται από το νόμο του Ting, όμως αυτό δεν οφείλεται στη μη γραμμικότητα του καταστατικού νόμου, όπως υποστηρίζουν οι Lin et al., αλλά στη γεωμετρία του «μοντέλου». Για το λόγο αυτό προτείνεται η μεθοδολογία του Ting!

Εναλλακτικά, για να μετρήσουμε τη σκληρότητα πολύ λεπτών δοκιμίων μπορούμε να επιλέξουμε απευθείας μία συσκευή κατάλληλη για τέτοιου είδους μετρήσεις. Έτσι λοιπόν, η σκληρομέτρηση δειγμάτων που χαρακτηρίζονται από ανεπαρκές πάχος μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση οργάνου που διαθέτει ενσωματωμένο κωνικό διεισδυτή σφαιρικής αιχμής. Στην περίπτωση αυτή, για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του κωνικού διεισδυτή και να υπολογίσουμε το επιθυμητό μέτρο ελαστικότητας, ανάλογα με το ποσοστό εισχώρησης του διεισδυτή στο δείγμα, εφαρμόζουμε τη θεωρία του Hertz (ή Ting) ή του Ciavarella. Ειδικότερα, όταν κατά τη σκληρομέτρηση εισέρχεται στο «σώμα» μόνο το τμήμα της σφαιρικής αιχμής του κώνου, το υλικό συμπεριφέρεται σαν να διεισδύει σε αυτό ένας σφαιρικός διεισδυτής, όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε τις θεωρίες των Hertz ή Ting. Αντίθετα, όταν μεγάλο τμήμα του διεισδυτή έχει εισχωρήσει μέσα στο δοκίμιο, υπερβαίνοντας την ακτίνα της σφαιρικής αιχμής, το υλικό αναγνωρίζει έναν κωνικό διεισδυτή που εισέρχεται στην επιφάνεια του. Στην περίπτωση αυτή, για να επιλύσουμε το πρόβλημα προτείνουμε τη μεθοδολογία του Ciavarella.

Το μέτρο ελαστικότητας ενός δείγματος, στην περίπτωση του κωνικού διεισδυτή, μπορεί να υπολογιστεί και με τη θεωρία των Lin et al. Έτσι, όταν η εξωτερική γωνία του κώνου είναι μικρή, οι μεθοδολογίες των Lin et al. και Ciavarella συμπίπτουν. Η ταύτιση των δύο θεωριών προκύπτει από ανάλυση των σχέσεων και δεν οφείλεται σε κάποιο εύρος τιμών, ούτε ισχύει για συγκεκριμένο υλικό δοκίμιο, αλλά ισχύει πάντοτε! Αντίθετα, όταν η εξωτερική γωνία του κώνου είναι μεγάλη, η θεωρία των Lin et al. προσεγγίζει καλύτερα το πρόβλημα. Μπορούμε λοιπόν να

συμπεράνουμε ότι ο Ciavarella αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση για το πρόβλημα με κωνικό διεισδυτή, όπως ο Hertz για το πρόβλημα της σφαίρας.

Στην περίπτωση σκληρομετρήσεων με κωνικό διεισδυτή προσπαθήσαμε να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα που εμφανίζονται λόγω ανεπάρκειας πάχους του δοκιμίου. Για το λόγο αυτό, ελέγχθηκε η θεωρία του Jaffar, όπου πάνω στο λεπτό «σώμα» τοποθετούμε στρώματα του ίδιου υλικού και στη συνέχεια προχωράμε στη σκληρομέτρηση. Οι προτεινόμενες σχέσεις του Jaffar δείχνουν να συγκρούονται με τα πειραματικά αποτελέσματα και έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι αδύνατο να εφαρμοστεί η εν λόγω μεθοδολογία σε ελαστομερή υλικά!

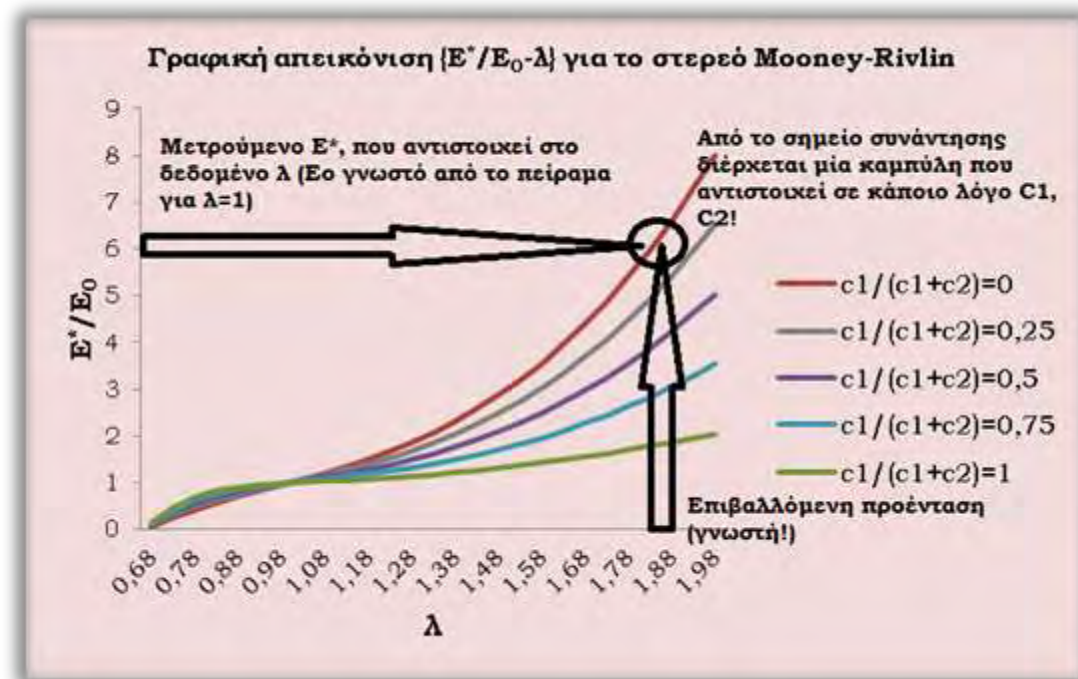
Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των υλικών που μελετάμε (ελαστομερή) προτείναμε την αρχική προένταση αυτών με ελκυσμό, στη συνέχεια τα υποβάλλαμε σε σκληρομέτρηση και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες θεωρίες υπολογίσαμε το επιθυμητό μέτρο ελαστικότητας. Τα δοκίμια που επιλέχθηκαν χαρακτηρίζονται ως ισότροπα. Με τον όρο «ισότροπο» υλικό, εννοούμε το «σώμα» του οποίου οι φυσικές ιδιότητες είναι ίδιες προς όλες τις κατευθύνσεις. Τα ελαστομερή υλικά χαρακτηρίζονται και ως ασυμπίεστα. Τα ασυμπίεστα υλικά έχουν την ικανότητα να διατηρούν τον όγκο τους όταν υποβάλλονται σε οποιαδήποτε μορφή παραμόρφωσης. Ειδικότερα, το δείγμα με κωδικό G&T που υποβλήθηκε σε μονοαξονικό ελκυσμό ανήκει στην κατηγορία των ελαστικών (λάστιχα). Δοκίμια τύπου Gel (gel-like materials) προσομοιάζονται με το στερεό neo-Hookean και το στερεό Mooney-Rivlin. Το στερεό neo-Hookean αποτελεί υποπερίπτωση του στερεού Mooney-Rivlin και χαρακτηρίζεται ως το πιο απλό γραμμικό μοντέλο. Το στερεό Mooney-Rivlin ταυτίζεται με το μοντέλο neo-Hookean όταν η σταθερά  $C_2$  του υλικού είναι ίση με μηδέν. Αντίστοιχα, τα ελαστικά δοκίμια (rubber-like materials) προσομοιάζονται με τα υπέρ-ελαστικά μοντέλα του Yeoh και του Gent. Το μοντέλο του Yeoh αποτελεί προεόρτιο του Gent. Όσον αφορά το μοντέλο του Gent, αξίζει να αναφέρουμε ότι ταυτίζεται με το στερεό neo-Hookean όταν υποβάλλουμε στο υλικό «τέντωμα» μικρότερο της τιμής 1.2. Το «μοντέλο» του Gent δεν παρουσιάζει προβλήματα στις περιπτώσεις που η παράμετρος  $J_m > 12$ . Το υλικό «σώμα» σε αυτό το προσομοίωμα συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά τα μοντέλα των neo-Hookean και Mooney-Rivlin μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για έντονο θλιπτικό φορτίο εμφανίζεται ένα κρίσιμο σημείο ( $\lambda = 0.67$ ). Έτσι λοιπόν, προτείνεται πειραματικά να αποφεύγεται η δοκιμή σε θλίψη και να επιβάλλεται έντονη προένταση του δοκιμίου σε εφελκυσμό (ή δυνατόν  $\lambda > 1.5$ ). Ολοκληρώνοντας λοιπόν την προσομοίωση των δοκιμίων, υλικά που ανήκουν στην κατηγορία των έμβιο-υλικών (bio-materials) προσομοιάζονται με το μοντέλο του Fung. Το «μοντέλο» του Yeoh προσομοιάζει καλύτερα ελαστικά υλικά. Πρόκειται για ένα «μοντέλο» που εμφανίζει αστάθεια για παραμορφώσεις μεγαλύτερες του  $\lambda = 1.5$ .

Όσον αφορά το πρόβλημα της προέντασης, το δοκίμιο εφελκύεται μονοαξονικά και υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση. Έτσι, η επιβολή αρχικής προέντασης στο δείγμα προκαλεί ανισότροπη συμπεριφορά στο

υλικό. Εάν παρατηρήσουμε τις μετρήσεις, όπως προέκυψαν σε προηγούμενα κεφάλαια, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η επιβολή αρχικής προέντασης (ελκυσμός) σε ένα ελαστικό «σώμα» ελαττώνει το πάχος του, αυξάνει τη σκληρότητα του και κατ'επέκταση αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας του, δηλαδή προσδίδει στο υλικό μεγαλύτερη ακαμψία! Μπορούμε να διαπιστώσουμε λοιπόν, ότι με την επιβολή μονοαξονικού ελκυσμού στο υλικό προκύπτει ένα «νέο» ελαστικό «σώμα». Το αρχικό απαραμόρφωτο ελαστικό δοκίμιο χαρακτηρίζεται ως ισότροπο, ενώ με τη επιβολή προέντασης σε αυτό μετατρέπεται σε ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό και το αποτύπωμα του διεισδυτή πάνω στην επιφάνεια του δείγματος έχει μορφή έλλειψης.

Για τη σκληρομέτρηση του προεντεταμένου ελαστικού υλικού επιλέχθηκε συσκευή με ενσωματωμένο άκαμπτο σφαιρικό διεισδυτή. Επομένως, για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας εφαρμόζονται οι θεωρίες του Hertz ή του Ting. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που αφορούν το μέτρο ελαστικότητας, σύμφωνα με τις δύο θεωρίες που προαναφέρθηκαν, παρατηρούμε ότι η μεθοδολογία του Ting είναι καλύτερη συγκριτικά με τη συντηρητική μεθοδολογία του Hertz.

Η προένταση λοιπόν, αποτελεί τη μοναδική μέθοδο για να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε το υλικό. Αυτό επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τις σταθερές του «μοντέλου» ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , κλπ.) που επιλέγεται σε κάθε περίπτωση. Η σκληρομέτρηση ενός δείγματος στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration) οδηγεί σε μια εξίσωση της μορφής π.χ.  $E_0 = 6(C_1 + C_2)$ . Εφαρμόζοντας την κατάλληλη θεωρία υπολογίζουμε το αρχικό  $E_0$ , όμως οι άγνωστες ποσότητες στην εξίσωση που προαναφέρθηκε παραμένουν δύο ( $C_1$  και  $C_2$ ). Χρειαζόμαστε λοιπόν, μία ακόμη εξίσωση που συμπεριλαμβάνει τις δύο άγνωστες ποσότητες για να επιλυθεί το πρόβλημα. Την επιπρόσθετη αυτή εξίσωση και κατ'επέκταση τη λύση «προσφέρει» η προένταση του δοκιμίου. Αντίθετα, για το στερεό neo-Hookean τα πράγματα είναι απλούστερα. Αυτό συμβαίνει διότι το «μοντέλο» αποτελείται μόνο από μία σταθερά  $C_1$  (διότι  $C_2 = 0$ ) και έτσι η παραπάνω ισότητα μετατρέπεται ως εξής  $E_0 = 6C_1$ . Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το αρχικό  $E_0$  (απαρμόρφωτο υλικό) και εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση να προσδιορίσουμε τη μοναδική σταθερά  $C_1$  του «μοντέλου». Γενικότερα, σε περίπτωση που διαθέτουμε περισσότερες από μία σταθερές ( $n$  σταθερές), πρέπει να επιβάλλουμε  $n-1$  διαφορετικές προεντάσεις και να έχουμε πάντα μία σχέση προερχόμενη από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του «σώματος» ( $\lambda = 1$ ) που συνδέει το  $E_0$  με όλες τις σταθερές του επιλεγμένου «μοντέλου». Ακολουθεί σχηματική αναπαράσταση που περιγράφει αναλυτικά τη μεθοδολογία προσδιορισμού των σταθερών του υλικού  $C_1$  και  $C_2$  στο στερεό «μοντέλο» των Mooney-Rivlin.



Σχηματική αναπαράσταση που περιγράφει αναλυτικά τη μεθοδολογία προσδιορισμού των σταθερών του υλικού  $C_1$  και  $C_2$  στο στερεό «μοντέλο» των Mooney-Rivlin. Η διαδικασία αυτή είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε «μοντέλο». Με τη σκληρομέτρηση ενός προεντεταμένου δείγματος μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε όλες τις σταθερές παραμέτρους ενός υλικού για όλες τις περιπτώσεις καταστατικών νόμων. Αυτό μπορεί να συμβεί επειδή το υλικό είναι μη γραμμικό. Αντίθετα, εάν προεντείνουμε ένα γραμμικό ελαστικό υλικό δε θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε τις σταθερές παραμέτρους του «μοντέλου». Για να συμβεί αυτό θα πρέπει, όπως είπαμε προηγουμένως να ενεργοποιήσουμε τη μη γραμμικότητα.

Εκτός από τις θεωρίες των Hertz ή Ting που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τελικά το επιθυμητό μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου υλικού, έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε εναλλακτικά τις καμπύλες των Vlassak et al. ή Willis. Έχοντας λοιπόν, υπολογίσει το μέτρο ελαστικότητας του προεντεταμένου υλικού στην τρέχουσα κατάσταση (spatial configuration) σύμφωνα με τις μεθοδολογίες των Waters ή Stevanovic et al., μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου στην αρχική του απαραμόρφωτη κατάσταση (reference configuration) μέσω της εκκεντρότητας του αποτυπώματος στο υλικό, εξαιτίας της ανισοτροπίας του δείγματος, εφαρμόζοντας τα σχετικά διαγράμματα των Vlassak et al. ή Willis. Εάν παρατηρήσουμε τα γραφήματα, θα διαπιστώσουμε ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους. Επομένως, οι μεθοδολογίες των Vlassak et al. και Willis είναι ταυτόσημες και μπορούν να εφαρμοστούν δίνοντας τα ίδια αποτελέσματα.

Τις μηχανικές ιδιότητες ενός ελαστομερούς δοκιμίου που υποβάλλεται σε σκληρομέτρηση, με συσκευή που διαθέτει ενσωματωμένο σφαιρικό διεισδυτή, μπορούμε να τις υπολογίσουμε εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του Waters. Στην εν λόγω μέθοδο εισάγουμε το πάχος του δοκιμίου και εξαιτίας αυτού έχουμε τη



δυνατότητα να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού στην απαραμόρφωτη αλλά και την παραμορφωμένη κατάσταση. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που αφορούν το μέτρο διάτμησης  $G$  καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι μεθοδολογίες των Waters και Stevanovic et al. (με χρήση των σχέσεων του Ting) δεν παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις ως προς τα αποτελέσματα. Ειδικότερα, η μεθοδολογία του Waters παρουσιάζει συνέπεια όσον αφορά τα αποτελέσματα που προκύπτουν, δίνοντας μικρά «νούμερα» συγκριτικά με τα αντίστοιχα κατά Stevanovic et al.. Παρόλα αυτά όμως προτείνουμε τη μεθοδολογία του Waters (για  $A=0.41$ ) επειδή τα αποτελέσματα του μέτρου ελαστικότητας σε αυτή την περίπτωση προσεγγίζουν σημαντικά την πραγματική τιμή  $E_0$ . Αντίθετα, η τροποποιημένη μέθοδος Waters (για  $A=1.10$ ) δεν είναι αντιπροσωπευτική, εφόσον τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε για το μέτρο ελαστικότητας δείχνουν να αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό από το πραγματικό  $E_0$ . Συγκρίνοντας λοιπόν, όλες τις μεθοδολογίες που περιγράφηκαν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η θεωρία του Waters (για  $A=0.41$ ) είναι απλούστερη σε σχέση με τις υπόλοιπες και οδηγεί σε αξιόπιστα αποτελέσματα!

Τα πειράματα σκληρομέτρησης καθώς και οι θεωρίες που περιγράφηκαν προηγουμένως αφορούν κυρίως βουλκανισμένα υλικά, όπως είναι τα ελαστικά (rubber-like materials). Όταν λοιπόν, επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες σε μαλακότερα υλικά τύπου Gel (gel-like materials) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικές μεθοδολογίες ως προς τη μέτρηση της σκληρότητας. Σε υλικά τύπου Gel επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε επίπεδο κυκλικό διείσδυτή, ώστε να απλουστεύσουμε το πρόβλημα που προκύπτει για τον υπολογισμό της ακτίνας επαφής. Για την εύρεση του μέτρου ελαστικότητας του δείγματος υλοποιήθηκαν διαδοχικά πειράματα καμπτικής και εφελκυστικής διείσδυσης, μετρώντας τη στροφή και τη μετατόπιση αντίστοιχα, και εφαρμόστηκαν οι κατάλληλες εξισώσεις.

Στον συνοπτικό πίνακα που ακολουθεί προτείνουμε μία διαδικασία, ώστε να μπορούμε να χαρακτηρίζουμε άγνωστα ισότροπα ελαστομερή υλικά μέσω του πειράματος της προεντεταμένης διείσδυσης.

#### **Διαδικασία χαρακτηρισμού ενός αγνώστου ισότροπου ελαστομερούς μέσω πειράματος προεντεταμένης διείσδυσης**

(α) Εκτελούμε διείσδυση σε αρχικά μη προεντεταμένο υλικό και χρησιμοποιούμε την κλασσική ανάλυση για να υπολογίσουμε το αρχικό μέτρο ελαστικότητας  $E_0$ . Εάν υπάρχει ζήτημα πάχους διορθώνουμε το αποτέλεσμα κατά Waters ή κατά Stevanovic et al. Στην περίπτωση αυτή υπερισχύει η μέθοδος Waters.

(β) Εκτελούμε διαδοχικά πειράματα διείσδυσης με διαφορετικά μεγέθη προέντασης. Στη συνέχεια, προβαίνουμε σε διόρθωση του ισότροπου τμήματος χρησιμοποιώντας τα βασικά είδη των πυκνοτήτων ελαστικής ενέργειας (για Gels Mooney-Rivlin, για ελαστικά neo-Hookean, Gent, Yeoh και για ιστούς Mooney-Rivlin, Fung). Επίσης, διορθώνουμε και ως προς το ανισότροπο τμήμα της προέντασης εφαρμόζοντας τις μεθοδολογίες των Vlassak et al. ή του Willis. Υπερισχύει η μεθοδολογία των Vlassak et al..

(γ) Οι διορθωμένες τιμές του μέτρου ελαστικότητας από τα ανωτέρω πειράματα θα πρέπει να προσεγγίζουν την πραγματική τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E_0$  του δείγματος. Η διόρθωση που αφορά την πυκνότητα ενέργειας  $W$ , που καταφέρει να προσεγγίζει όλες τις πειραματικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας, είναι η πιο πιθανή πυκνότητα ελαστικής ενέργειας.

**Για να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του δείγματος στην περίπτωση του ίσο-διαξονικού ελκυσμού το υλικό δοκίμιο κατέχει σημαντικό ρόλο στην επιλογή του κατάλληλου καταστατικού «μοντέλου», εφόσον πραγματοποιείται διόρθωση μόνο του συμμετρικού μέρους  $N(\lambda)$ . Αντίθετα, όταν στο δείγμα επιβάλλουμε μονοαξονικό ελκυσμό απαιτείται διόρθωση και του αντισυμμετρικού μέρους  $M(e)$ . Η διόρθωση αυτή είναι γενική και ανεξάρτητη του υλικού και αρκεί μόνο η γνώση της εκκεντρότητας!**

Το κοινό γιαούρτι του εμπορίου ανήκει στην κατηγορία των υλικών τύπου Gel. Για να υπολογίσουμε λοιπόν, το μέτρο ελαστικότητας του θα πρέπει να εκτελέσουμε πειράματα καμπτικής ή εφελκυστικής διείσδυσης στην εξωτερική επιφάνεια του δείγματος. Με απώτερο στόχο την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς ενός τέτοιου δοκιμίου προχωρήσαμε στην περίσφιξη του γιαουρτιού περιμετρικά του δοχείου, έχοντας τοποθετήσει στην επιφάνεια του ένα μικρό ως προς τη διάσταση και το βάρος σφαιρικό «σώμα» που αρχικά επικάθεται πάνω στο υλικό. Τα αποτελέσματα του πειράματος περίσφιξης επαληθεύουν τη θεωρία, εμφανίζοντας ένα κρίσιμο σημείο στην περίπτωση επιβολής μεγάλου θλιπτικού φορτίου στο δείγμα. Χρησιμοποιώντας τον όρο «κρίσιμο σημείο» εννοούμε ότι με την επιβολή έντονης περίσφιξης στο δείγμα παρουσιάζεται κάποια μορφή αστάθειας στο υλικό. Συγκεκριμένα, εάν περισφίξουμε περιμετρικά το δείγμα σε μεγάλο βαθμό, θα παρατηρήσουμε ότι η εξωτερική του επιφάνεια εμφανίζει πτυχώσεις και ρηγματώσεις, ενώ το σφαιρικό «σώμα» τείνει να βυθιστεί μέσα στο θλιβόμενο υλικό! Επομένως, λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας που παρουσιάζεται στα προβλήματα θλίψης, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με το ποσοστό περίσφιξης που θα επιβάλλουμε στο δοκίμιο, ώστε τα αποτελέσματα των μετρήσεων που θα λάβουμε να είναι αντιπροσωπευτικά.

Η προένταση λοιπόν, σε υλικά τύπου rubber επηρεάζει σημαντικά τις μηχανικές τους ιδιότητες. Ειδικότερα, ο εφελκυσμός ελαστικών δοκιμίων αυξάνει την ακαμψία στα αποτελέσματα διείδυσης τις περισσότερες φορές, ενώ κατά την επιβολή θλιπτικού φορτίου η απόκριση λόγω διείδυσης κάνει το «σώμα» πιο εύκαμπτο. Επιπρόσθετα, η προένταση ενός δείγματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των σταθερών παραμέτρων του υλικού διαμέσου του πειράματος διείδυσης. Η επιφάνεια του υλικού μπορεί να εμφανίσει κάποιας μορφής αστάθεια υπό συνθήκες έντονης σύνθλιψης του δοκιμίου, όμως εξαρτάται πάντα από τον καταστατικό νόμο.

Με απώτερο στόχο να επεκτείνουμε τις γνώσεις μας και στην κατηγορία των εμβιοϋλικών, επιλέξαμε το «μοντέλο» μίας αρτηρίας ως ένα ανισότροπο ασυμπίεστο υλικό, για να εφαρμόσουμε τους καταστατικούς νόμους που προαναφέραμε. Οι καταστατικοί νόμοι που χρησιμοποιήσαμε αφορούν ανισότροπα «σώματα», όμως δε συμπεριλαμβάνουν τη μικροδομή του υλικού. Με την επιλογή του κατάλληλου καταστατικού νόμου και γνωρίζοντας από τη βιβλιογραφία τις σταθερές του υλικού της αρτηρίας προτείναμε μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης, όταν το υλικό βρίσκεται υπό συνθήκες ελεύθερης τάσης (stress-free state). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι αρτηρίες δε μπορούν να διογκωθούν σε μεγάλο βαθμό, επειδή η παραμόρφωση στη διεύθυνση της περιμέτρου δε μεταβάλλεται σημαντικά σε συνθήκες φυσιολογικής πίεσης και υπερπίεσης. Όσον αφορά τις τάσεις, το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας media αναπτύσσει μεγαλύτερες τάσεις σε σχέση με το εξωτερικό στρώμα που αποκαλείται adventitia. Τα παραδείγματα που πραγματοποιήσαμε έδειξαν ότι εάν μεταβάλλουμε την πίεση εσωτερικά του σωλήνα οι τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο τοιχώματα δεν παρουσιάζουν σταθερότητα όσον αφορά τις τιμές, σε αντίθεση με τα κινηματικά μεγέθη. Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι οι τάσεις δεν είναι αντιπροσωπευτικές για να περιγράψουμε την κατάσταση αστοχίας σε μία αρτηρία και δικαίως ο ιατρικός κόσμος δεν τις εμπιστεύεται. Αντίθετα, ένα μέγεθος που παρουσιάζει σταθερότητα ως προς τις τιμές για διάφορες επιβαλλόμενες πιέσεις είναι η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$ . Για το λόγο αυτό προτείνουμε την ενέργεια παραμόρφωσης ως την κατάλληλη ιδιότητα για να περιγράψουμε την κατάσταση αστοχίας σε μία αρτηρία!

Οι υγιής αρτηρίες χαρακτηρίζονται ως ανισότροπα υλικά και συνήθως προσομοιάζονται με το «μοντέλο» του Fung. Σε μελλοντικό επίπεδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το «μοντέλο» του Holzapfel το οποίο περιγράφεται από πλήθος παραμέτρων που αφορούν την αρτηρία. Παρόλα αυτά υπάρχουν ζητήματα ως προς τον αριθμό των παραμέτρων που συμμετέχουν στη μοντελοποίηση. Πράγματι το πλήθος των σταθερών περιγράφει ορθότερα το φυσικό πρόβλημα, όμως παρουσιάζει πολύ σημαντικά προβλήματα ως προς τη μέτρηση των ιδιοτήτων και ως προς την ευαισθησία τους ως προς τα τελικά αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, χρειαζόμαστε αναλύσεις που δεν οδηγούν σε υπέρ-ευαίσθητα αποτελέσματα, όπως είναι οι τάσεις. Χρειαζόμαστε επομένως τόσο πολύπλοκα «μοντέλα»; Μάλλον όχι.

## Μελλοντική έρευνα

**Σ**το σημείο αυτό θα κάνουμε μία σύντομη περιγραφή σχετικά με τα ζητήματα που καταφέραμε να ολοκληρώσουμε στην παρούσα εργασία, αλλά και σε αυτά που προτείνουμε για μελλοντική έρευνα.

Αρχικά, ασχοληθήκαμε εκτενώς με το πείραμα της διείδυσης σε ελαστομερή υλικά, κυρίως σε ελαστικά και υλικά τύπου gel, για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων. Το πείραμα της διείδυσης όμως δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των σταθερών του υλικού. Έτσι, επιλέξαμε να επιβάλλουμε κάποια αρχική προένταση στο δείγμα για να προσδιορίσουμε τελικά τις σταθερές του υλικού για τα διάφορα προσομοιώματα. Με την προένταση του δοκιμίου μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε τις σταθερές παραμέτρους του «μοντέλου» με την προϋπόθεση ότι το υλικό δεν είναι γραμμικό ελαστικό, αλλά έχει ενεργοποιηθεί η μη γραμμικότητα. Τα «μοντέλα» που εξετάσαμε αφορούν κυρίως ισότροπα «σώματα», όπως είναι για παράδειγμα τα ελαστικά υλικά. Στη συνέχεια, επιλέξαμε να ερευνήσουμε τη συμπεριφορά ενός ανισότροπου υλικού, όπως είναι η αρτηρία. Για την προσομοίωση του υλικού επιλέξαμε έναν καταστατικό νόμο που εφαρμόζεται σε ανισότροπα «σώματα», χωρίς να συμπεριλάβουμε σε αυτή τη φάση τη μικροδομή της αρτηρίας, όπως είναι οι ίνες στα τοιχώματά της. Γνωρίζοντας λοιπόν, από τη βιβλιογραφία, τις σταθερές για την αρτηρία προτείνουμε μία μεθοδολογία με στόχο τον υπολογισμό της παραμένουσας τάσης σε συνθήκες ελεύθερης φόρτισης και φόρτισης. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποια θέματα που δεν καταφέραμε να τα καλύψουμε.

Τα αποτελέσματα που αποδείχθηκαν στην περίπτωση των μικρό-διεισδύσεων (κλίμακες της τάξεως των mm) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ακόμα μικρότερες διεισδύσεις με κατάλληλες προϋποθέσεις (κλίμακες της τάξεως των  $\mu\text{m}$ ). Πρέπει όμως να πραγματοποιηθούν εκτενή σχετικά πειράματα προς επιβεβαίωση, όπως έχει γίνει στο παρελθόν και σε άλλα υλικά (μέταλλα και κεραμικά).

Όσον αφορά την προένταση, μπορούμε να πούμε ότι οι εφελκυστικές προεντάσεις δείχνουν με προφανή τρόπο όλα όσα έχουν αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια. Αντίθετα, οι θλιπτικές προεντάσεις εμφανίζουν θεωρητικές και πειραματικές δυσκολίες. Σχετικά με τις θεωρητικές δυσκολίες μπορούμε να πούμε ότι παρουσιάζονται κίνδυνοι απώλειας ευστάθειας του προσομοιώματος, ενώ ως προς το πειραματικό ζήτημα είναι απαραίτητο η περίσφιξη να υλοποιηθεί με ιδιαίτερη προσοχή. Επιπρόσθετα, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να μελετηθούν και να σχεδιαστούν συσκευές που επιτρέπουν με ευχέρεια και ακρίβεια την επιφανειακή διαζωνική θλιπτική προένταση.

Στο μέλλον θα πρέπει να ασχοληθούμε εκτενώς με το πρόβλημα της διείδυσης σε αρτηρίες από την πλευρά των ανισότροπων ελαστομερών. Επομένως, θα πρέπει να επανέλθουμε στις αναλύσεις εφαρμόζοντας τους νέους καταστατικούς νόμους που αφορούν τα ανισότροπα «σώματα» και εισάγουν στο πρόβλημα τη μικροδομή του

υλικού. Τέτοιους καταστατικούς νόμους αναφέρουν οι Ren και Yuan (2010). Εάν λοιπόν, στην πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης συμπεριλάβουμε τη μικροδομή το πρόβλημα θα γίνει πολύ σύνθετο. Ο καταστατικός νόμος σε αυτή την περίπτωση μετασχηματίζεται, όπως περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

Για το εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας (media) οι ελαστικές ίνες κολλαγόνου παρουσιάζουν ελικοειδή μορφή και είναι κατανεμημένες σε διάφορες κατευθύνσεις. Το τοίχωμα της αρτηρίας μοντελοποιείται σαν ένα ασυμπίεστο ενισχυμένο με ίνες σύνθετο υλικό, στο οποίο οι ίνες εμφανίζονται μονοδιάστατες στο υλικό, ασκώντας τάση μόνο στην κατεύθυνση της ίνας.

$$W = W_M + W_F + W_A$$

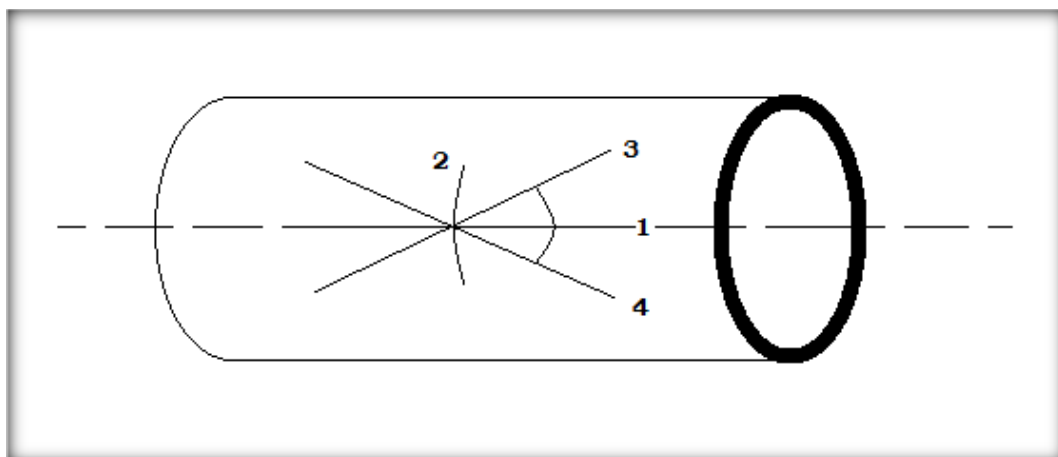
Όπου με  $W_M$  συμβολίζεται η ενέργεια παραμόρφωσης του μητρώου και περιγράφεται από το ασυμπίεστο υπέρ-ελαστικό υλικό του Ogden.

$$W_M = \sum_r \frac{\mu_r}{\alpha_r} \left( \lambda_r^{\alpha_r} + \lambda_\theta^{\alpha_r} + \lambda_z^{\alpha_r} - 3 \right)$$

Όπου  $\alpha_1=1.3$ ,  $\alpha_2=5.0$ ,  $\alpha_3=-2.0$ ,  $\mu_1=1.491\mu^m$ ,  $\mu_2=0.003\mu^m$  και  $\mu_3=-0.023\mu^m$  και με  $\mu^m$  παριστάνεται το μέτρο διάτμησης για το στρώμα media. Με  $\lambda_r$ ,  $\lambda_\theta$  και  $\lambda_z$  είναι το «τέντωμα» στις κύριες κατευθύνσεις. Με  $W_F$  συμβολίζεται η ενέργεια παραμόρφωσης των ινών και περιγράφεται από το «μοντέλο» της οικογένειας τεσσάρων ινών.

$$W_F = \sum_{k=1}^4 \frac{c_{1(k)}}{4c_{2(k)}} \left\{ \exp \left[ c_{2(k)} \left( I_{4(k)} - 1 \right)^2 \right] - 1 \right\}$$

Όπου οι σταθερές του υλικού  $c_{1(k)}$  αποτελούν την ακαμψία της  $k$  οικογένειας των ινών και  $c_{2(k)}$  περιγράφει το βαθμό της μη γραμμικότητας της  $k$  οικογένειας των ινών.  $I_{4(k)} = \mathbf{M}_{a(k)}(\mathbf{C}\mathbf{M}_{a(k)})$  είναι η τέταρτη κύρια δεξιά Cauchy-Green παραμόρφωση,  $\mathbf{C}$  είναι η δεξιά Cauchy-Green παραμόρφωση,  $\mathbf{M}_{a(k)} = [0, \sin a(k), \cos a(k)]$  είναι οι κατευθύνσεις των ινών στην αρχική απεικόνιση και  $a(k)$  είναι οι γωνίες μεταξύ της διεύθυνσης της  $k$  οικογένειας των ινών και της αξονικής διεύθυνσης του τοιχώματος της αρτηρίας. Για το στρώμα media, που απεικονίζεται παρακάτω,  $a(1)=0^\circ$  για την αξονική ίνα,  $a(2)=90^\circ$  για την ίνα της περιμέτρου,  $a(3)=a^m$  και  $a(4)=-a^m$  για διαγώνιες ίνες.



Σχηματική αναπαράσταση της οικογένειας των ελαστικών ινών κολλαγόνου στο εσωτερικό στρώμα της αρτηρίας, media.

Με  $W_A$  παριστάνεται η ενέργεια παραμόρφωσης των λείων μυών προσανατολισμένοι στην διεύθυνση της περιμέτρου.

$$W_A = T_m \left[ \lambda_\theta + \frac{1}{3} \frac{(\lambda_m - \lambda_\theta)^3}{(\lambda_m - \lambda_o)^2} \right]$$

Όπου η ποσότητα  $T_m$  περιγράφει το επίπεδο της δραστηριότητας,  $\lambda_m$  είναι το «τέντωμα» στο οποίο η συστολή είναι η μέγιστη δυνατή και  $\lambda_o$  είναι το «τέντωμα» στο οποίο παύει η ενεργός δύναμη. Η ενέργεια παραμόρφωσης για το εξωτερικό στρώμα adventitia εκφράζεται ως εξής:

$$W = W_M + W_F$$

Όπου  $W_M$  είναι η ενέργεια παραμόρφωσης της μήτρας και περιγράφεται με  $\mu_1=1.491\mu^a$ ,  $\mu_2=0.003\mu^a$  και  $\mu_3=-0.023\mu^a$ , όπου με  $\mu^a$  παριστάνεται το μέτρο διάτμησης για το στρώμα adventitia. Με  $W_F$  συμβολίζεται η ενέργεια παραμόρφωσης των ινών και περιγράφεται από το «μοντέλο» της οικογένειας δύο ινών.

$$W_F = \sum_{k=1}^2 \frac{c_{1(k)}}{2c_{2(k)}} \left\{ \exp \left[ c_{2(k)} (I_{4(k)} - 1)^2 \right] - 1 \right\}$$

Για τις δύο διαγώνιες ίνες του adventitia ισχύει ότι  $\alpha(1)=\alpha^a$  και  $\alpha(2)=-\alpha^a$ .

## Βιβλιογραφία

V. M. Aleksandrov, "Asymptotic solution of the axisymmetric contact problem for an elastic layer of incompressible material", *J. Appl. Maths Mechs*, vol. 67, No. 4, pp. 589-593, 2003.

N. Aravas and C. S. Laspidou (2008), "On the calculation of the elastic modulus of a Biofilm Streamer", *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 101 (1), p. p. 196-200.

ASTM Standard Test Method for Rubber Property – Durometer Hardness D 2240 – 97.

F.W. Billmeyer (1962), *Textbook of Polymer Science*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley-Interscience Inc., New York.

M. A. Biot (1965), "Mechanics of Incremental Deformations", Wiley, New York, pp. 82-112.

B. J. Briscoe, K. S. Sebastian and M. J. Adams (1994), "The effect of indenter geometry on the elastic response to indentation", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 27, pp. 1156-1162.

D. M. Burmister (1944) "The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems", *J. of Applied Physics*, vol. 16 p. p. 89- 302.

Vascular Aneurysms Eds. P. Cao, A. D. Giannoukas, F. L. Moll and M. Veller, University of Thessaly Press, Volos, Greece.

P. Chadwick (1972), "The existence and uniqueness of solutions to two problems in the Mooney-Rivlin theory for rubber", *Journal of Elasticity*, vol. 2, pp. 123-128.

A. Charleby (1960), "Atomic Radiation and Polymers", Pergamon Press, Oxford.

Chen Z. Y., Diebels S. (2012) "Nanoindentation of hyperelastic polymer layers at finite deformation and parameter re-identification", *Arch. Appl. Mech.* 82: 1041-1056.

W. T. Chen and P. A. Engel (1972) "Impact and Contact Stress Analysis in Multilayer Media", *Int. J. Solids Structures*, vol. 8 p. p. 1257- 1281.

W. T. Chen (1971) "Computation of Stresses and Displacements in a Layered Elastic Medium", *Int. J. Engng Sci.*, vol. 9 p. p. 775- 800.

Michele Ciavarella (1999) "Indentation by nominally flat or conical indenters with rounded corners", *International Journal of Solids and Structures* 36 p. p. 4149- 4181.

A. Delfino, N. Stergiopulos, J. E. Moore and J. J. Meinsten (1997), "Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation", *J. Biomech.* 30, 777-786.

N. Demanget, P. Badel, S. Avril, L. Orgeas, C. Geindreau, J. Albertini, J. Favre (2012), "Computational Comparison of the Mechanical Behavior of Two Stent-Grafts Within a Tortuous Abdominal Aortic Aneurysm", 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.

R. S. Dhaliwal and B. M. Singh (1978), "The axisymmetric Boussinesq problem of an initially stressed Neo-Hookean half-space for a punch of arbitrary profile", *Int. J. Engng Sci.*, vol. 16, pp. 379-385.

C. Fretigny and A. Chateauminois (2007) "Solution for the elastic field in a layered medium under axisymmetric contact loading", *J. of Physics D: Applied Physics*, vol. 40 p. p. 5418- 5426.

Y. C. Fung (1993), "Biomechanics: material properties of living tissues, Springer.

Y.C. Fung (1993), *Biomechanics: "Mechanical Properties of Living Tissues"*, 2<sup>nd</sup> Ed., Springer-Verlag, New York.

Y. C. Gao and Y. W. Mai (2002), "The contact problem of a rubber half-space dented by a rigid cone apex", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 72, pp. 213-228.

Cyprien Gay (2000), "Does stretching affects adhesion?", *International Journal of Adhesion & Adhesives*, vol. 20, pp. 387-393.

A. N. Gent (1996), "A new constitutive relation for rubber", *Rubber Chemistry Tech.*, vol. 69, pp. 59-61.

Ghassan S. Kassab (2006), "Biomachanics of the cardiovascular system: the aorta as an illustratory example", *J. R. Soc. Interface*, vol. 3, pp. 719-740.

A.E. Giannakopoulos, A. Triantafyllou (2007), "Spherical indentation of incompressible rubber – like materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, pp. 1196-1211.

I. Goryacheva, A. Morozov, A. Lyubicheva, Yu. Martynenko, F. Antonov (2012), "Determination of the Soft Tissue Mechanical Proprties Based on the Indentation Test", 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.



A.E. Green and J.E. Adkins (1970), "Large Elastic Deformations", 2<sup>nd</sup> Ed., Clarendon Press, Oxford.

S. Hales (1733), "Statistical essays: containing Haemastatics. New York, N. Y.: Hafner Publishing Reprinted 1964.

G. A. Holzapfel (2000), "Biomechanics of Soft Tissue", Computational Biomechanics, vol. 7, pp. 1-12.

G. A. Holzapfel, T. C. Gasser and R. W. Ogden (2000), "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models", J. Elasticity, in press.

G. A. Holzapfel, T. C. Gasser and R. W. Ogden (2000), "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models", J. Elastic. 61, 1-48.

F. P. K. Hsu, C. Schwab, D. Rigamonti and J. D. Humphrey (1994), "Identification of response functions for nonlinear membranes via axisymmetric inflation tests: implications for biomechanics", Int. J. Solids Struct. 31, pp. 3375-3386

F. P. K. Hsu, J. Downs, A. M. C. Liu, D. Rigamonti and J. D. Humphrey (1995), "A triplane video-based experimental system for studying axisymmetrically inflated biomembranes", IEEE Trans. Biomed. Engng 42, pp. 442-449.

J. D. Humphrey (2003), Review Paper: "Continuum biomechanics of soft biological tissues", Proc. R. Soc. Land. A. 459, pp. 3-46.

J. D. Humphrey (1998), "Computer methods in membrane biomechanics", Comput. Meth. Biomech. Biomed. Engng 1, pp. 171-210.

J. D. Humphrey (2002), "Cardiovascular solid mechanics: cells, tissues and organs, Springer.

J. D. Humphrey, R. K. Stumpf, F. C. P. Yin (1990), "Determination of a constitutive relation for passive myocardium. I. A new functional form", ASME J. Biomech. Engng 112, 333-339.

J. D. Humphrey, R. L. Barazotto and W. C. Hunter (1992), "Finite extension and torsion of papillary muscles: theoretical framework", J. Biomech. 25, 541-547.

M. J. Jaffar (2002) "Frictionless contact between an elastic layer on a rigid base and a circular flat- ended punch with rounded edge or a conical punch with rounded tip", International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44 p. p. 545- 560.

K. L. Johnson and I. Sridhar (2001) "Adhesion between a spherical indenter and an elastic solid with a compliant elastic coating", *J. of Physics D: Applied Physics*, vol. 34 p. p. 683- 689.

G. S. Kassab (2006), "Biomechanics of the cardiovascular system: the aorta as an illustrative example", *J. of the Royal Soc. Interface* 3, 719-740.

C.S. Laspidou and N. Aravas (2007), "Variation in the mechanical properties of a porous multi-phase biofilm under compression due to void closure", *Water Science and Technology*, vol. 55 (8-9), p. p. 447-453.

C.S. Laspidou, B. E. Rittman, S.A. Karamanos, "Finite element modeling to expand the UMCCA model to describe biofilm mechanical behavior", *Water Science and Technology*, vol. 52 (7), p. p. 161-166.

N. N. Lebedev and Ia. S. Ufliand, "Axisymmetric contact problem for an elastic layer", vol. 22, No. 3, pp. 320-326, 1958.

Jackie Li and Tsu- Wei Chou (1997) "Elastic Field of a thin- film/ substrate system under an axisymmetric loading", *Int. J. Solids Structures*, vol. 34 p. p. 4463- 4478.

David C. Lin, David I. Shreiber, Emiliós K. Dimitriadis, Ferenc Horkay (2009), "Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models", *Biomech Model Mechanobiol*, vol. 8, pp. 345-358.

David C. Lin, Emiliós K. Dimitriadis, Ferenc Horkay (2007), "Robust Strategies for Automated AFM Force Curve Analysis-II: Adhesion-Influenced Indentation of Soft, Elastic Materials", *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 129, pp. 904-912.

David C. Lin, Emiliós K. Dimitriadis, Ferenc Horkay (2007), "Robust Strategies for Automated AFM Force Curve Analysis-I: Non-adhesive Indentation of Soft, Inhomogeneous Materials", *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 129, pp. 430-440.

Xiao Lu, Aditya Pandit and Ghassan S. Kassab (2004), "Biaxial incremental homeostatic elastic moduli of coronary artery: two-layer model", *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, vol. 287, pp. 1663-1669.

X. Lu, A. Pandit and G. S. Kassab (2004), "Biaxial incremental homeostatic elastic moduli of coronary artery: Two-layer model", *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 287, H1663-H1669.

M. J. Matthewson, "Axisymmetric contact on thin compliant coatings, " *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 29, no. 2, pp. 89-113, 1981.

M. Mooney (1940), "A theory of large elastic deformation", *Journal of Applied Physics*, vol. 11(9), pp. 582-592.

Namani R. and Simha N. (2009), "Inverse finite element analysis of indentation tests to determine hyperelastic parameters of soft tissue layers", *J. strain Analysis for Engineering design*, vol. 44, 347-362.

L.E. Nielsen (1974), "Mechanical Properties of Polymers and Composites", vol. 1, Marcel Dekker Inc., New York.

R. W. Ogden (1997), "Non-linear elastic deformations", New York: Dover.

Aditya Pandit, Xiao Lu, Chong Wang and Ghassan S. Kassab (2005), "Biaxial elastic material properties of porcine coronary media and adventitia", *J Physiol Heart Circ Physiol*, vol. 288, pp. 2581-2587.

A. C. Pipkin (1968), "Integration of an equation in membrane theory", *Z. Angew. Math. Phys.* 19, pp. 818-819.

A. Pandit, X. Lu, C. Wang and G. S. Kassab (2005), "Biaxial elastic material properties of porcine coronary media and adventitia", *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 288, H2581-H2587.

K. Perktold and G. Rappitsch (1995), "Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model", *J. Biomech.* 28, 845-856.

H. J. QI, K. JOYCE, M. C. BOYCE (2003) "Durometer hardness and the stress- strain behavior of elastomeric materials", *J. Rubber Chemistry and Technology* p. p. 419- 435.

S. Rabinowitz and P. Beardmore (1974), "Cyclic deformation and fracture of polymers", *Journal of Material Science*, vol. 9, pp. 81-99.

Alexander Rachev (1997), "Theoretical study of the effect of stress-dependent remodeling on arterial geometry under hypertensive conditions", *J. Biomechanics*, vol. 30, pp. 819-827.

A. Rachev (1997), "Theoretical study of the effect of stress-dependent remodeling on arterial geometry under hypertensive conditions"

M. L. Raghavan, D. A. Vorp (2000), "Toward a biomechanical tool to evaluate rupture potential of abdominal aortic aneurysm: identification of a finite strain constitutive model and evaluation of its applicability", *J. Biomechanics* 33, 475-482.

Jiu-sheng Ren and Xue-gang Yuan (2010), "Mechanics of formation and rupture of human aneurism", *Appl. Math. Mech. (English Edition)*, vol. 31, pp. 593-604.

R. S. Rivlin and D. W. Saunders (1951), "Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber", *Phil. Trans. R. Soc. Land.*, A243, 251-288.

G. Sommer, P. Regitnig, L. Koltringer and G. A. Holzapfel (2010), "Biaxial mechanical properties of intact and layer-dissected human carotid arteries at physiological and supraphysiological loadings", *Am. J. Physiol. Circ. Physiol.*, vol.298, pp. 898-912.

G. Sommer, P. Regitning, L. Koltringer and G. A. Holzapfel (2010), "Biaxial mechanical properties of intact and layer-dissected human carotid arteries at physiological and supraphysiological loading", *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 298, H898-H912.

Mirko Stevanovic, M. Michael Yovanovich, and J. Richard Culham (2001) "Modeling Contact between Rigid Sphere and Elastic Layer Bonded to Rigid Substrate", *IEEE Transactions on components and Packaging Technologies*, vol. 24 p. p. 207- 212.

Keiichi Takamizawa (2009), "Three-dimensional stress and strain distribution in a two-layer model of a coronary artery", *J. Biorheol*, vol. 23, pp. 49-55.

K. Takamisawa (2009), "Three-dimensional stress and strain distribution in a two-layer model of a coronary artery", *J. Biorheol* 23, 49-55.

T. C. T. Ting (1966) "The Contact Stresses Between a Rigid Indenter and a Viscoelastic Half- Space", *journal of Applied Mechanics* p. p. 845- 854.

L.R.G. Treloar (1975), "The Physics of Rubber Elasticity", 3<sup>rd</sup> Ed., Clarendon Press, Oxford.

A. K. Venkatasubramanian, T. Mehta, M. J. Fagan, K. J. Mylankal, G. Kuhan, B. Ray (2004), "A comparative study of aortic wall stress using finite element analysis for ruptured and non-ruptured abdominal aortic aneurysm", *Eur. J. Vasc. End vasc. Surg.* 28, 128-176.

I. I. Vorovich and I. A. Ustinov, "Pressure of a die on a elastic layer of finite thickness," *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, vol. 23, no. 3, pp. 445-455, 1959.

K. Y. Volokh (2011), "Modeling failure of soft anisotropic materials with application to arteries", Journal of the Mechanical behavior of Biomedical materials, vol. 4, pp. 1582-1594.

K. Y. Volokh and D. A. Vorp (2008), "A model of growth and rupture of abdominal aortic aneurysm", J. Biomech. 41, 1015-1021.

K. Y. Wang, Q. H. Qin, Y. L. Kang, J. S. Wang and C. Y. Qu (2005), "A direct constraint-Trefftz FEM for analyzing elastic contact problems", Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 63, pp. 1694-1718.

J. R. Willis (1966), "Hertzian contact of Anisotropic bodies", J. Mech. Phys. Solids, vol. 14, pp. 163-176.

Y. J. Xie, X. Z. Hu, X. H. Wang, "Frictional contact induced crack initiation in incompressible substrate"

Y. Yang, M. Neuss-Radu (2012), "Mathematical Modeling and Simulation of the Formation and Evolution of Plaques in Blood Vessels", 8<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria.

Th. Zisis, V.I. Zafiropoulou, A.E. Giannakopoulos (2010), "The adhesive contact of a flat punch on a hyperelastic substrate subject to a pull-out force or a bending moment", J. Mechanics of Materials, pp. 1-25.

W. Zhang, C. Herrera, S. N. Atluri, G. S. Kassab (2005), "The effect of longitudinal pre-stretch and radial constraint on the stress distribution in the vessel wall: a new hypothesis, Mech. Chem. Biosystems 2, 41-52.

W. Zhang, C. Herrera, S. N. Atluri, G. S. Kassab (2004), "The effect of surrounding tissue on vessel fluid and solid mechanics", J. Biomech. Engng. 126, 760-769.

Αναιμίακτη Διαγνωστική των Αγγειακών Παθήσεων, Α. Δ. Γιαννούκας, Α. Ν. Κατσαμούρης, Μ. Λαζαρίδης, Ν. Labropoulos, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας

<http://www.cncmachines.gr/images/technical/65.pdf>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Shore\\_durometer](http://en.wikipedia.org/wiki/Shore_durometer)

<http://www.matweb.com/reference/shore-hardness.aspx>

[http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php%3Fid%3Dshore\\_durometer\\_hardness\\_test](http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php%3Fid%3Dshore_durometer_hardness_test)

<http://dictionary.reference.com/browse/elastomer>

<http://www.answers.com/topic/elastomer>

<http://chemistry.about.com/od/chemistryglossary/g/polymerdef.htm>

[http://www.instron.us/wa/applications/test\\_types/hardness/shore.aspx](http://www.instron.us/wa/applications/test_types/hardness/shore.aspx)

[http://www.ides.com/property\\_descriptions/ISO868.asp](http://www.ides.com/property_descriptions/ISO868.asp)

<http://www.blurealmstudios.com/2009/02/25/understanding-shore-hardness/>

<http://www.instron.com/wa/product/Shore-Durometers.aspx>

[http://iatreion.gr/newsdesk\\_index.php?newsPath=19](http://iatreion.gr/newsdesk_index.php?newsPath=19)

[http://whyquit.com/greek/Joel\\_02\\_18\\_circulatory\\_damage.html](http://whyquit.com/greek/Joel_02_18_circulatory_damage.html)

<http://www.livepedia.gr>

[http://www.news-medical.net/health/Arteriosclerosis-Types-\(Greek\).aspx](http://www.news-medical.net/health/Arteriosclerosis-Types-(Greek).aspx)

<http://medlab.cs.uoi.gr/telemedicine/Cardiology/ch4/ch451.html>

<http://www.e-hospital.gr/index.php?id=5078>

[http://www.ladakis.gr/item.asp?CONTENT\\_PAGE=item.asp&webitemid=Wi0000001080&CODE2=CARDIOLOGICAL&CODE3=HEALTH](http://www.ladakis.gr/item.asp?CONTENT_PAGE=item.asp&webitemid=Wi0000001080&CODE2=CARDIOLOGICAL&CODE3=HEALTH)

[http://archive.enet.gr/online/online\\_text/c=112,dt=14.10.2008,id=19437696](http://archive.enet.gr/online/online_text/c=112,dt=14.10.2008,id=19437696)

[http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post\\_18.html](http://paidio.blogspot.com/2011/02/blog-post_18.html)

[http://www.incardiology.gr/kardia/mikri\\_megali.htm](http://www.incardiology.gr/kardia/mikri_megali.htm)

<http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%AF%CE%B1>

[http://www.incardiology.gr/kardia/mikri\\_megali.htm](http://www.incardiology.gr/kardia/mikri_megali.htm)

<http://ygeia.tanea.gr/default.asp?pid=8&ct=8&articleID=9044&la=1>

<http://el.science.wikia.com/wiki/%CE%91%CF%81%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%AF%CE%B1>

<http://www.clickatlife.gr/story/diatrofi/poies-trofes-kratoun-kathares-tis-artiries?id=1931775>

<http://el.wiktionary.org/wiki/%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%AF%CE%B1>

<http://www.vita.gr/html/ent/455/ent.7455.asp>

<http://www.incardiology.gr/kardia/aggeia.htm>

<http://dedesioannis.com/2.6>

[http://www.incardiology.gr/pathiseis\\_stefaniaia/pc\\_stent.htm](http://www.incardiology.gr/pathiseis_stefaniaia/pc_stent.htm)

<http://kardiologia.blogspot.com/2009/02/stent-to.html>

<http://www.tovima.gr/science/medicine-biology/article/?aid=389784>

<http://www.gelis.gr/index.php/medarticles/mnugenika/84-biofilms.html>